2018-2019年度第二学期 00106501

计算机图形学

童 伟 华　管理科研楼1205室

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

中国科学技术大学　数学科学学院

http://math.ustc.edu.cn/

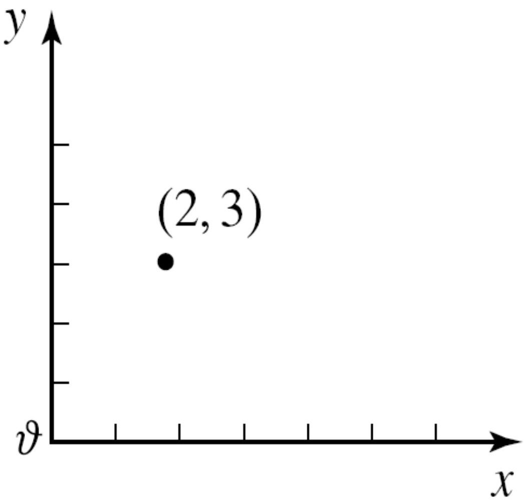
第三章 几何对象与变换

第一节 几何

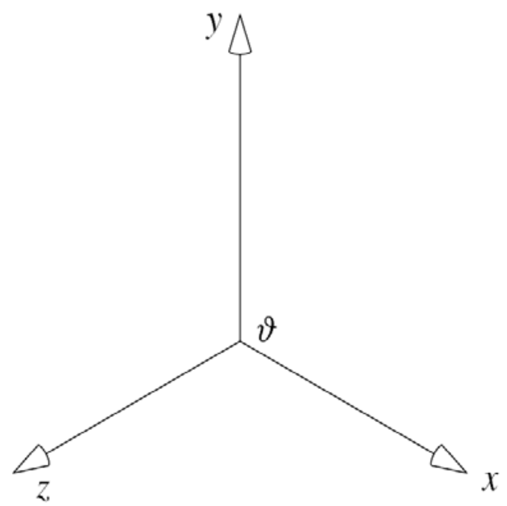
图形学中的数学

- 向量空间与仿射空间
  - 向量
  - 点
  - 仿射运算
  - 齐次坐标
- 变换
  - 矩阵表示
  - 变换矩阵的确定

坐标系

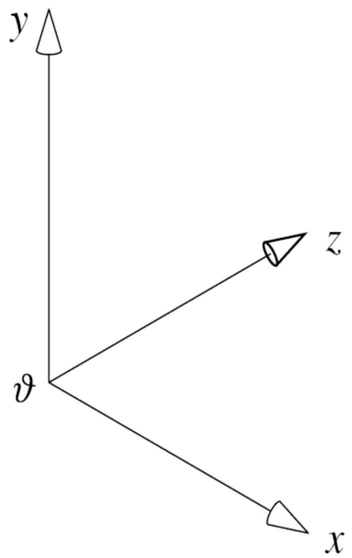


二维坐标系



三维坐标系

（右手系）



三维坐标系

（左手系）

基本几何要素

- 几何研究n维空间中对象之间的关系
  - 在计算机图形学中，我们对三维空间中的对象感兴趣
- 希望得到一个几何形状的最小集合，根据这个集合可以建立起更复杂的对象
- 需要三个几何要素
  - 标量
  - 向量
  - 点

与坐标无关的几何

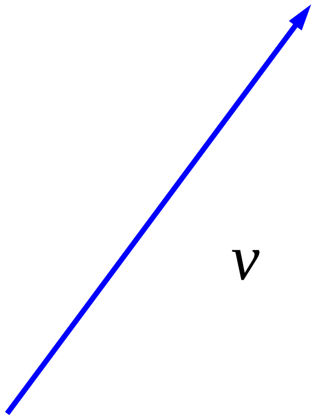
- 在初等几何的学习中，主要应用的是直角坐标系
  - 点在空间中的位置是p = (x,y,z)
  - 通过对这些坐标进行代数操作导出结果
- 这种方法不是基于物理的
  - 从物理的角度来讲，点的存在性是与坐标系的具体位置无关的
  - 绝大多数几何结果是不依赖于坐标系的
  - 欧氏几何：两个三角形全等是指它们有两个对应边和夹角相等

标量

- 标量可以定义为集合中的成员，集合中具有两种运算（加法和乘法），运算遵从一些基本的公理（结合律、交换律、逆）
- 例：实数或复数全体，通常的加法与乘法
- 标量自身没有几何属性

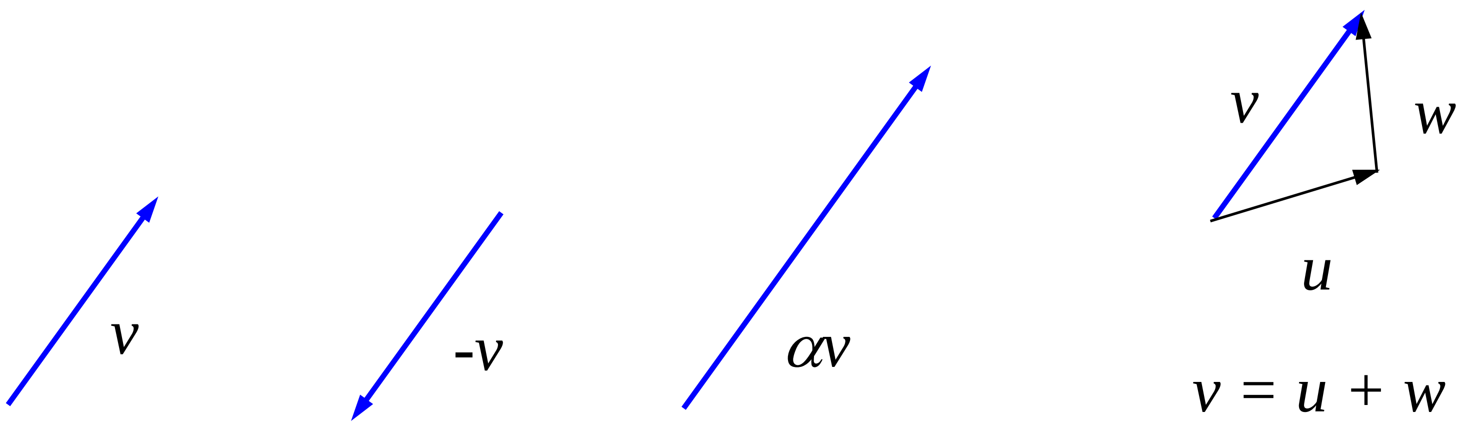
向量

- 物理定义：向量是具有如下两条性质的量
  - 方向
  - 长度：$|v|$
- 例：
  - 力
  - 速度
  - 有向线段
    - 这也是图形学中最重要的例子
    - 可以对应到其它类型上
- 用小写字母表示



向量运算

- 每个向量都有逆
  - 同样长度但是指向相反的方向
- 每个向量都可以与标量相乘
- 有一个零向量
  - 零长度，方向不定
- 两个向量的和为向量
  - 三角形法则

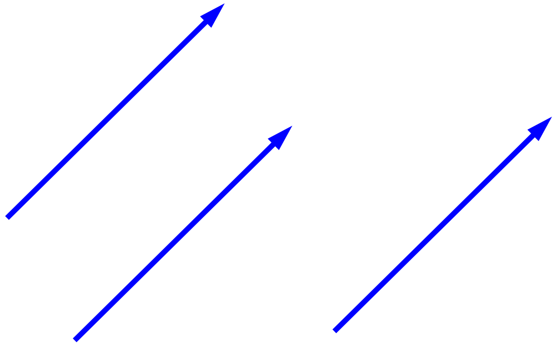


线性空间

- 处理向量的数学系统
- 运算
  - 标量乘法：$u = \alpha v$
  - 向量加法：$w = u + v$
- 在向量空间中，表达式 $v = u + 2w - 3r$ 有意义

向量没有位置

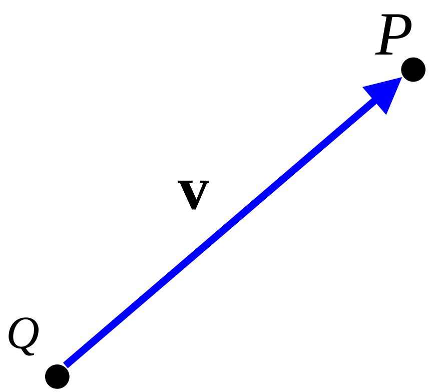
- 下述向量是相等的
  - 因为它们具有相同的方向与长度



- 对几何而言只有向量空间是不够的
  - 还需要点

点

- 空间中的位置
  - 用大写字母表示
- 点与向量之间可进行的运算
  - 点与点相减得到一个向量
  - 等价地，点与向量相加得到新点



$$\mathbf{v} = P - Q$$

$$P = \mathbf{v} + Q$$

仿射空间

- 点加上向量构造的空间
- 运算：
  - 向量与向量的加法 → 向量
  - 标量与向量的乘法 → 向量
  - 点与向量的加法 → 点
  - 标量与标量的运算 → 标量
  - 上述运算均是与坐标无关的
- 对于任意点，定义
  - $1 \cdot P = P$
  - $0 \cdot P = 0$ （零向量）

向量与点的线性组合

- 给定n个向量$v_1, v_2, \ldots, v_n$, 以及n个标量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 则

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

也是向量，称为这组向量的线性组合

- 给定n个点$P_1, P_2, \ldots, P_n$, 以及n个标量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 则

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

是什么？

  - 所给的定义需要与坐标无关

点的线性组合

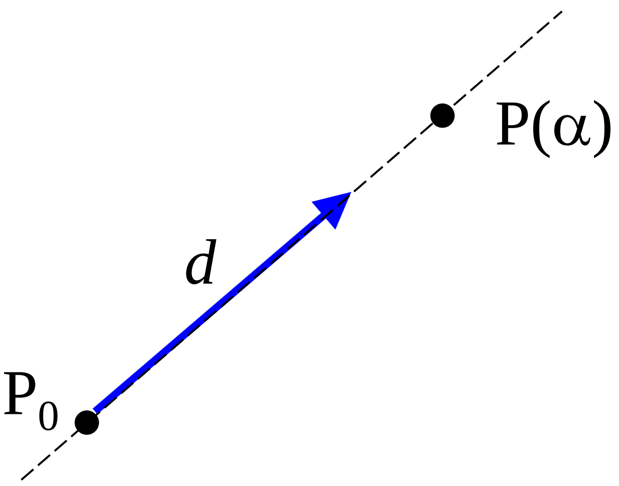
- 固定坐标系，取定其中的两点，那么P_1+P_2是什么？
  - 当P_1为原点时，P_1+P_2等于P_2
  - 当P_1与P_2关于原点对称时，P_1+P_2为原点
  - 所以P_1+P_2的位置与坐标系有关
- 组合系数不能是任意数

点的特殊线性组合

- 由归纳法，从“点 – 点 = 向量” 和 “标量·向量 = 向量”可知当组合系数和$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0$时，点的线性组合为向量
- $\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2=P_1+\frac{1}{2}(P_2-P_1)$ = 点 + 向量 = 点
  - 实际上，$\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2$表示两点的中点，这是与坐标无关的定义
- 当$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$ 时，点的线性组合为点，称为给定点的仿射组合
- 除此之外，其它形式的线性组合没有与坐标无关的意义

直线

- 考虑具有下述形式的所有点
  - $P(\alpha) = P_0 + \alpha\, d$
  - 即所有过P_0点，与P_0连线平行于向量d的点



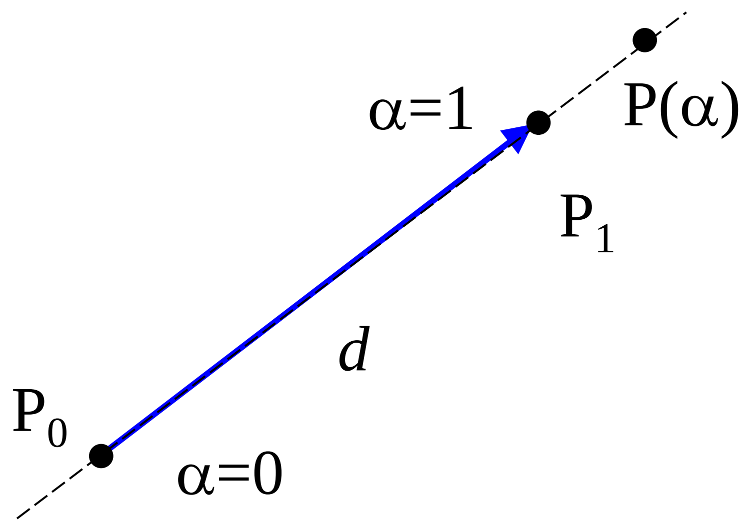
参数形式

- 上述定义直线的形式称为参数形式
  - 比其它形式更一般和稳定
  - 可以推广到曲线和曲面
- 二维形式
  - 显式：$y = mx + h$
  - 隐式：$ax + by + c = 0$
  - 参数形式：

$$x(\alpha) = x_0 + (1 - \alpha)\, x_1$$
$$y(\alpha) = y_0 + (1 - \alpha)\, y_1$$

射线与线段

- 如果限定$\alpha > 0$, 那么$P(\alpha)$就是从P_0出发，方向为 d 的射线
- 如果采用两点定义向量d, 那么
  $$P(\alpha) = P_0 + \alpha (P_1 - P_0) = (1 - \alpha) P_0 + \alpha P_1$$
- 当 $0 \le \alpha \le 1$，那么就会得到连接P_0与P_1两点的线段



两点线性插值

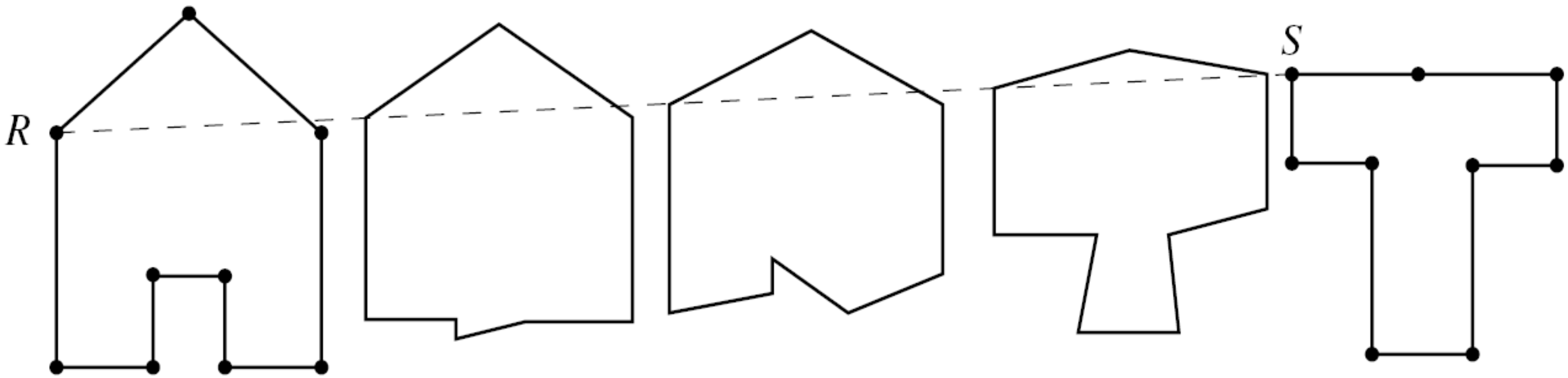
- 给定两点A, B，那么它们的仿射组合

  $$P(t) = (1 - t)\,A + t\,B$$

  就定义了过这两点的一条直线
- 线性插值在艺术和计算机动画有许多有趣的应用
  - 关键帧

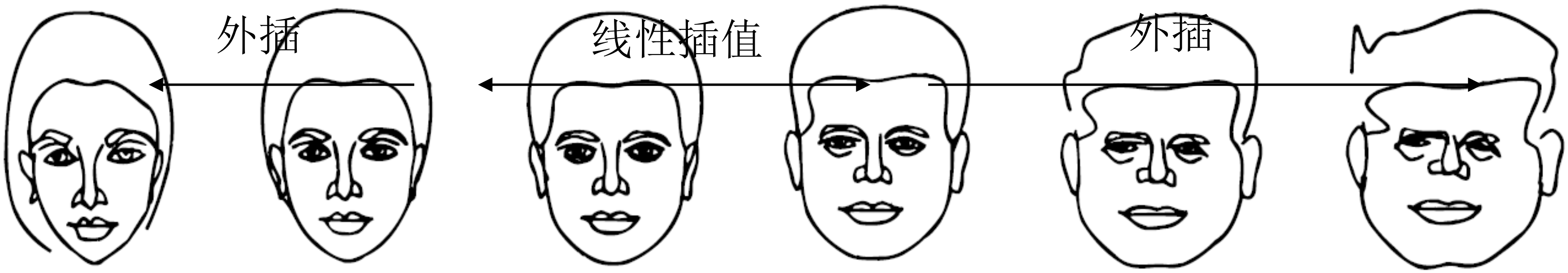
多边形的变形

- 给定两个有同样数目顶点的折线，那么利用线性插值可以给出从第一个折线到第二个折线的光滑过渡

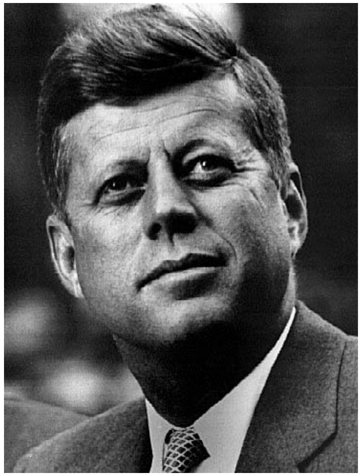


男人→女人

名人脸



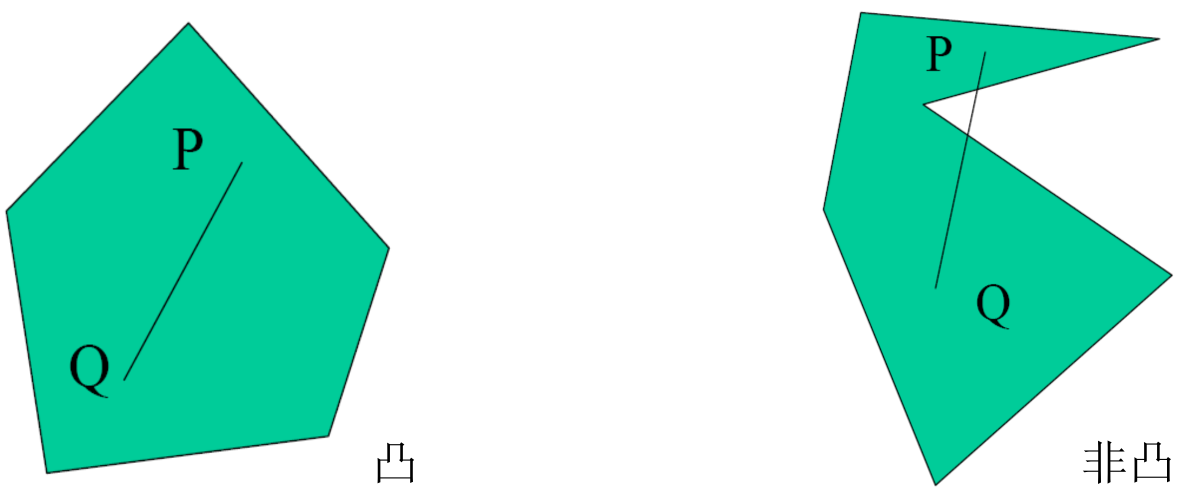
Elizabath Taylor



John F. Kennedy

凸体

- 一个对象为凸的当且仅当在对象中任何两点的连接线段也在该对象内



仿射凸组合

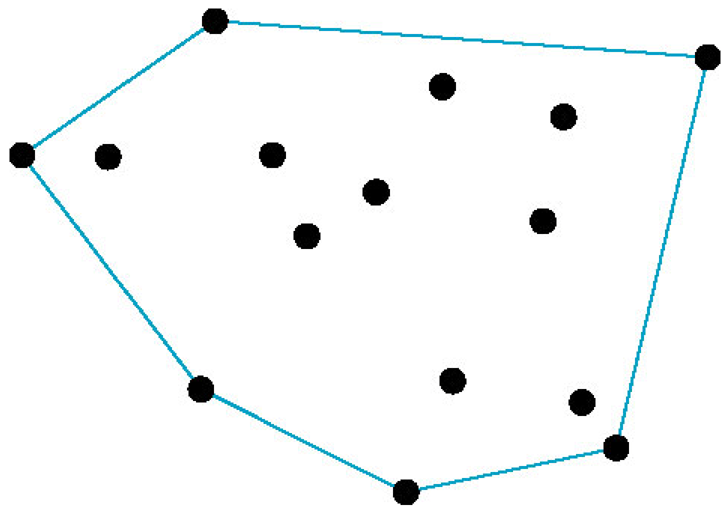
- 考虑“和”式

  $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$

- 当$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$时上述和式有意义，此时结果就称为点$P_1, P_2, \ldots, P_n$的仿射和
- 另外，如果$\alpha_i \geq 0$，那么得到$P_1, P_2, \ldots, P_n$的凸包（convex hull）

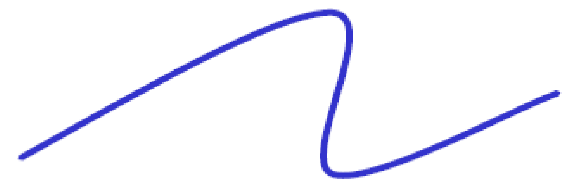
凸包

- 最小的包含$P_1, P_2, \ldots, P_n$的凸体
- 可以用“收缩包装”的方式得到

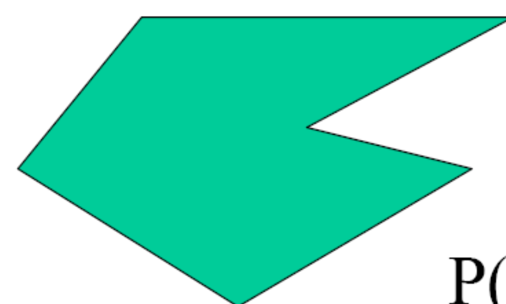


曲线与曲面

- 曲线是形式为P(α)的单参数定义的几何体，其中的函数为非线性
- 曲面是由形式为P(α, β)的两个参数定义的几何体
  - 线性函数对应于平面和多边形



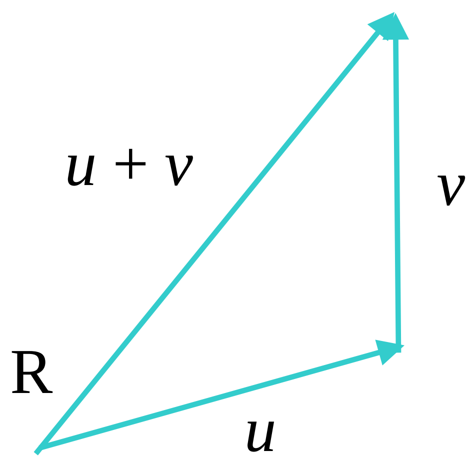
P(α)



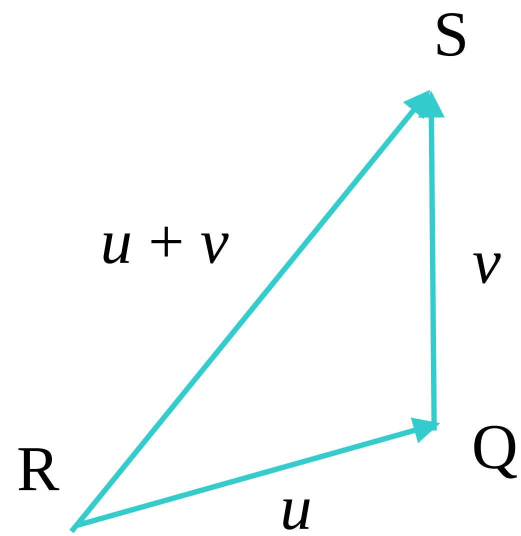
P(α, β)

平面

- 平面是由一个点与两个向量或者三个点确定的

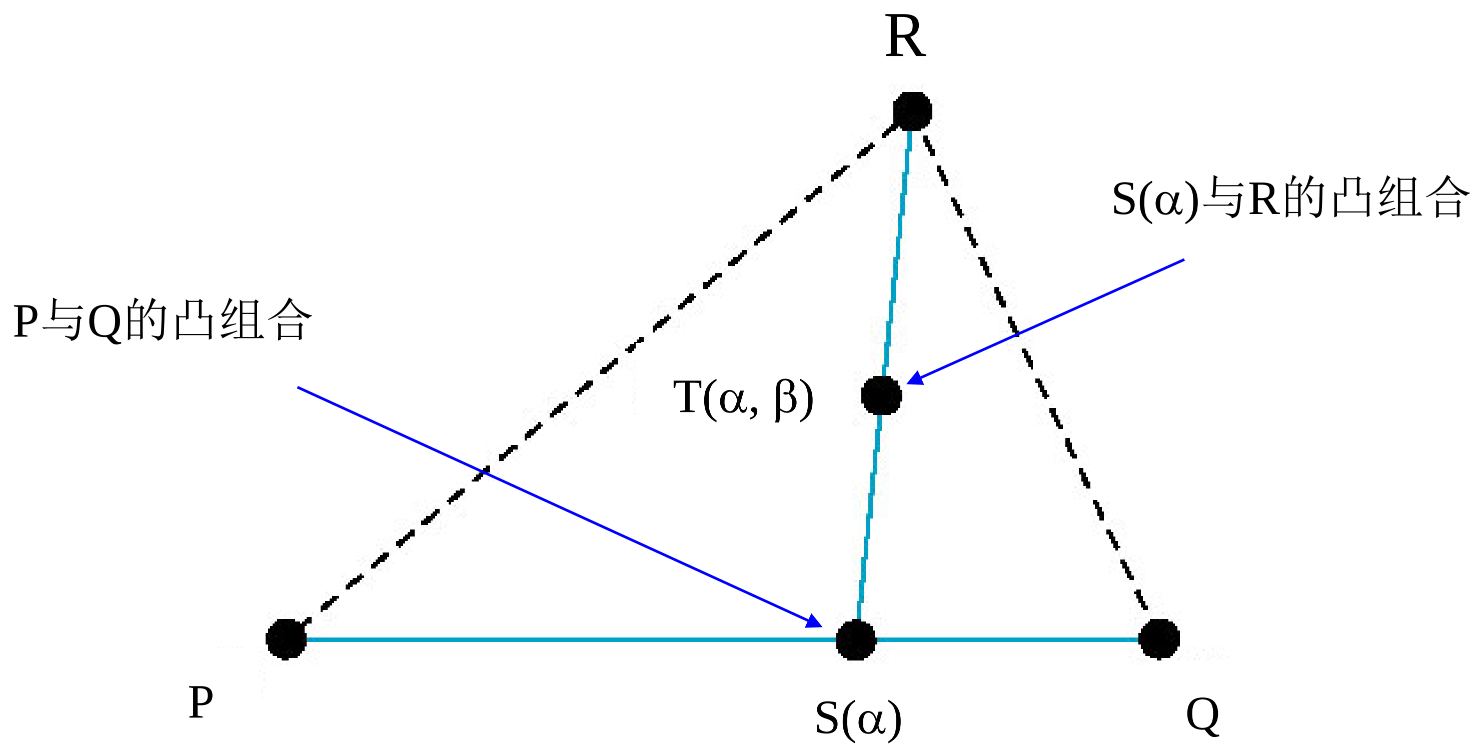


$$P(\alpha, \beta) = R + \alpha u + \beta v$$



$$P(\alpha, \beta) = R + \alpha(Q - R) + \beta(S - Q)$$

三角形



当$0 \le \alpha, \beta \le 1$时定义在三角形内的点

重心坐标

- 因为三角形是凸的，故三角形内任一点可表示成三个顶点的仿射和，即

$$T(\alpha_{1,}\alpha_{2,}\alpha_3)=\alpha_1 P+\alpha_2 Q+\alpha_3 R$$

其中$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$，　$\alpha_i >= 0$

- 称三元组$(\alpha_{1,}\alpha_{2,}\alpha_3)$为点T关于顶点P, Q, R的重心坐标
- 典型应用
  - 有限元单元构造
  - 形状插值、变形、编辑
- 思考：
  - 重心坐标满足哪些性质？
  - 对于一般的多边形是否可以定义重心坐标？
  - 高维空间如何推广？

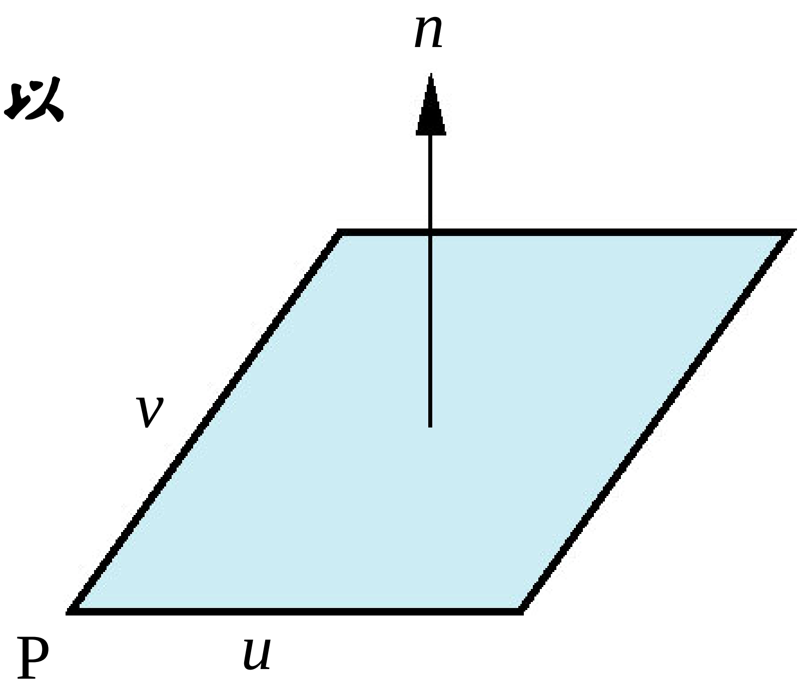
向量的内外积

- 内积：$u \cdot v = |u|\,|v| \cos\theta$, θ为两个向量的夹角
  - $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$
- 外积：$u \times v$为向量，其长度等于$|u|\,|v| \sin\theta$,　方向垂直于u, v所在的平面，并且保证$u, v, u \times v$成为右手系，其中θ为两个向量的夹角。
  - $u \times v = \mathbf{0} \Leftrightarrow u \mathbin{/\!/} v$

法向量

- 每个平面都有一个垂直于自身的向量$\boldsymbol{n}$
- 在平面的点与二向量形式 $P(\alpha, \beta) = R + \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}$中，可以应用向量的外积得到

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$$



Thanks for your attention!