计算机图形学

童 伟 华　管理科研楼1205室

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

中国科学技术大学　数学科学学院

http://math.ustc.edu.cn/

第二节 表示

线性无关

- 一组向量$v_1, v_2, \ldots, v_n$称为线性无关的，是指 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ 当且仅当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$
- 如果一组向量是线性无关的，那么不能把其中一个向量表示成其它向量的线性组合
- 如果一组向量是线性相关的，那么其中至少有一个向量可以表示为其它向量的线性组合

维数

- 在向量空间中，最大的线性无关向量组的元素个数是固定的，这个数就称为空间的维数
- 在n维空间中，任意n个线性无关的向量构成空间的基
- 给定空间的一组基$v_1, v_2, \ldots, v_n$，空间中任意向量v都可以表示为

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

其中$\{\alpha_i\}$是唯一的

表示

- 到现在为止我们只是讨论几何对象，而没有使用任何参考标架，例如坐标系
- 需要一个参考标架把点和对象与物理世界中的对象联系在一起
  - 例如，点在哪儿？如果没有参考系的话，就无法回答这个问题
  - 世界坐标系
  - 照相机坐标系

坐标系

- 考虑n维向量空间的基$v_1, v_2, \ldots, v_n$
- 一个向量v可以表示为$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$
- 标量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$就称为$v$相对于给定基的表示
- 可以把表示写成列向量

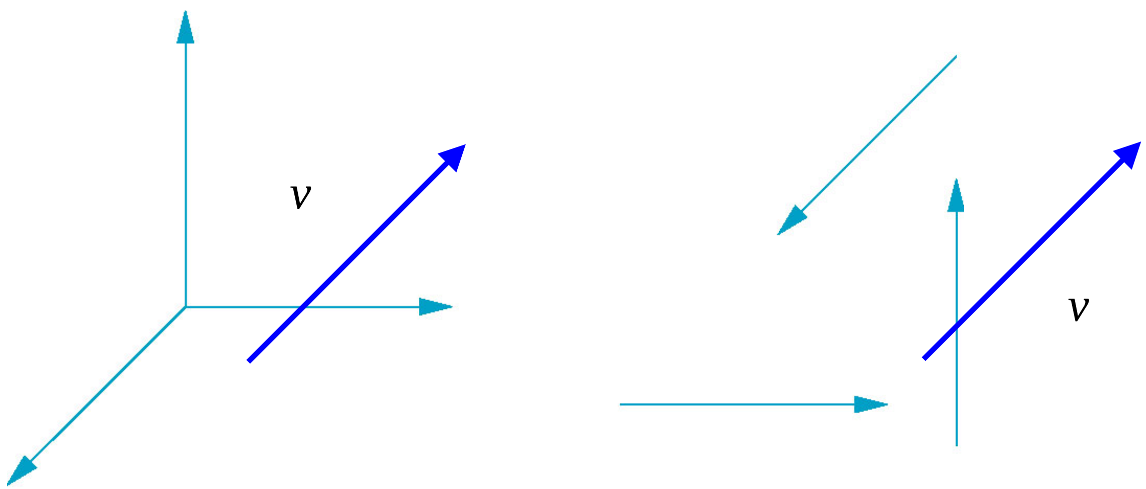
$$a = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

示例

- $v = 2v_1 + 3v_2 - 4v_3$
- $a = [2, 3, -4]^T$
- 注意上述表示是相对一个特定的基而言的
- 例如，在OpenGL中刚开始是相对于世界坐标系表示向量的，稍后要把这个表示变换到照相机坐标系（或者称为视点坐标系）中

坐标系

- 哪个正确？

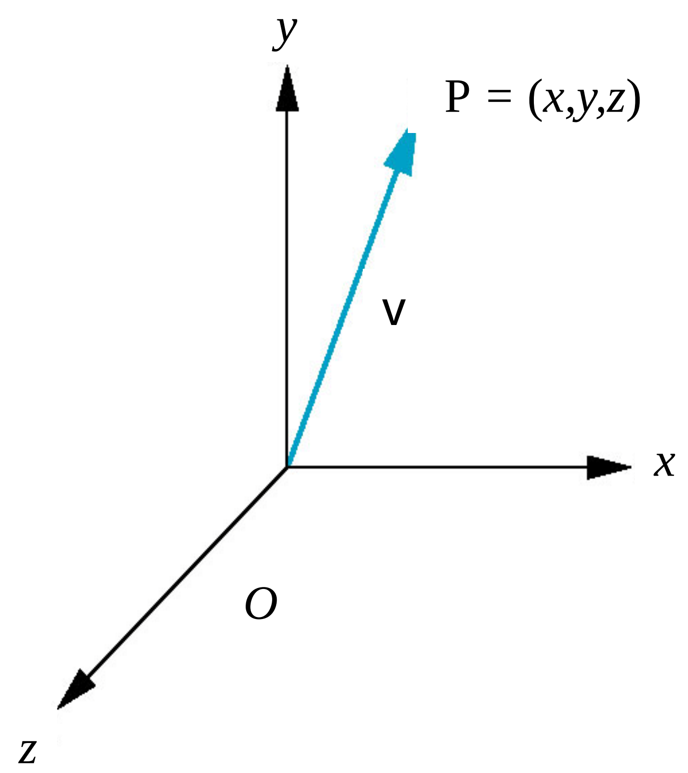


(a) (b)

都正确，因为向量没有固定位置！

标架

- 坐标系是不足以表示点的
- 如果要在仿射空间中考虑问题，那么可以在基向量组中增加一个点（称为原点），从而构成一个标架（frame）



在标架中的表示

- 标架是由$(O, v_1, v_2, \ldots, v_n)$确定的
- 在这个标架中，每个向量可以表示为

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

- 每个点可以表示为

$$\mathrm{P} = O + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

点与向量的混淆

- 考虑点与向量

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$$

$$\mathbf{P} = O + \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{v}_n$$

它们看起来具有相似的表示：

$$\boldsymbol{v} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T,$$

$$\mathbf{P} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]^T,$$

这导致点与向量很容易混淆在一起

统一的表示

- 如果定义$0 \cdot \mathrm{P} = 0$(零向量)， $1 \cdot \mathrm{P} = \mathrm{P}$，那么

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$
$$= [v_1, v_2, \ldots, v_n, O][\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0]^T$$
$$\mathrm{P} = O + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$
$$= [v_1, v_2, \ldots, v_n, O][\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 1]^T$$

从而得到$n+1$维齐次坐标表示

$$v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0]^T$$
$$\mathrm{P} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 1]^T$$

齐次坐标

- 四维齐次坐标的一般形式为

$$\mathbf{P} = [x, y, z, w]^T,$$

可以通过下述方法给出三维点(当$w \neq 0$):

$$x \leftarrow x/w, \quad y \leftarrow y/w, \quad z \leftarrow z/w$$

当$w = 0$时，表示对应的是一个向量

注意：齐次坐标表示中把四维空间中过原点的一条直线对应于三维空间中的一个点

齐次坐标与计算机图形学

- 齐次坐标是所有计算机图形系统的关键
  - 所有标准变换（旋转、平移、放缩）都可以应用4×4阶矩阵的乘法实现
  - 硬件流水线体系可以应用四维表示
  - 对于正交投影，可以通过$w=0$保证向量，$w=1$保证点
  - 对于透视投影，需要进行特别的处理：透视除法
- 优点：所有的仿射变换（包括线性变换、平移变换）都可以借助齐次坐标表示成矩阵相乘的形式，这为变换的级联带来了巨大的便利

变换坐标系

- 考虑同一个向量相对于两个不同基的表示。假设表示分别是

$$\boldsymbol{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$$

$$\boldsymbol{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T$$

其中

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [v_1, v_2, v_3]\,[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T \\ &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = [u_1, u_2, u_3]\,[\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \end{aligned}$$

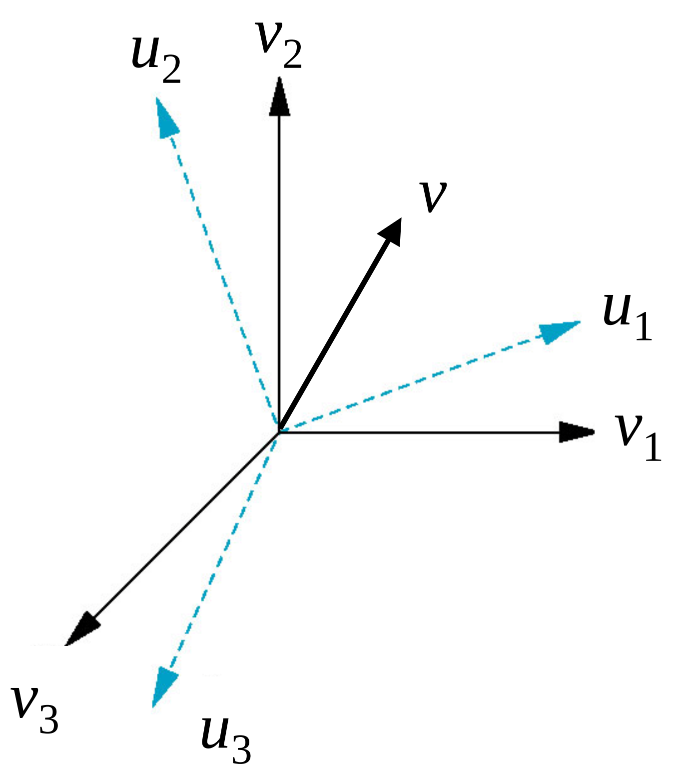
用第一组基表示第二组基

- u_1,u_2,u_3中每个向量都可以用第一组表示出来

  $u_1 = \gamma_{11}v_1 + \gamma_{12}v_2 + \gamma_{13}v_3$

  $u_2 = \gamma_{21}v_1 + \gamma_{22}v_2 + \gamma_{23}v_3$

  $u_3 = \gamma_{31}v_1 + \gamma_{32}v_2 + \gamma_{33}v_3$



矩阵形式

- 所有系数定义了一个3×3阶矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

这样两组基就可以如下联系在一起

$$\mathbf{a} = M^T \mathbf{b}$$

改变标架

- 可以对同时表示点与向量的齐次坐标进行类似的操作
- 考虑标架

$$(P_0, v_1, v_2, v_3)$$

$$(Q_0, u_1, u_2, u_3)$$

- 任何点和向量都可以用它们中的一个表示出来

用一个标架表示另一个标架

- 把基的改变方法推广可有

$$u_1 = \gamma_{11}v_1 + \gamma_{12}v_2 + \gamma_{13}v_3$$
$$u_2 = \gamma_{21}v_1 + \gamma_{22}v_2 + \gamma_{23}v_3$$
$$u_3 = \gamma_{31}v_1 + \gamma_{32}v_2 + \gamma_{33}v_3$$
$$\mathbf{Q}_0 = \gamma_{41}v_1 + \gamma_{42}v_2 + \gamma_{43}v_3 + \mathbf{P}_0$$

由此定义了4×4阶矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

表示的变换

- 两个标架中任意点和向量具有同样形式的表示

在第一个标架中：$\boldsymbol{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T$

在第二个标架中：$\boldsymbol{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]^T$

其中当表示的是点时，$\alpha_4 = \beta_4 = 1$，表示的是向量时，

$\alpha_4 = \beta_4 = 0$, 并且$\boldsymbol{a} = \mathrm{M}^T\boldsymbol{b}$

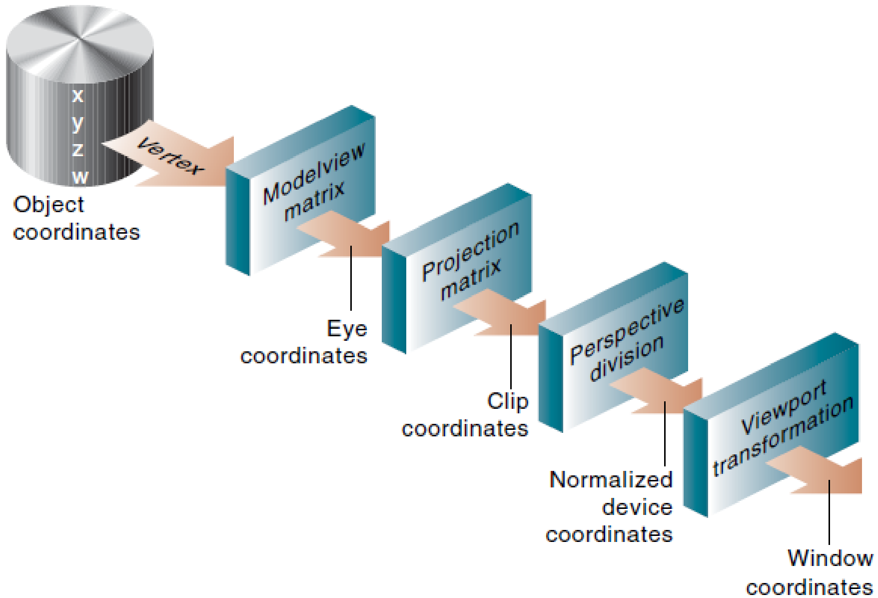
这里矩阵M是4×4阶，用齐次坐标定义一个仿射变换

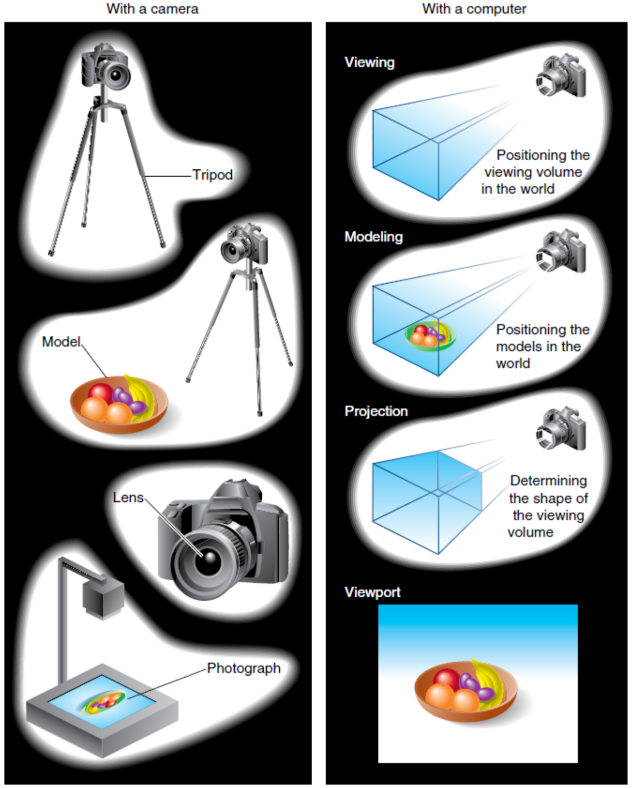
仿射变换

- 每个线性变换等价于一次标架改变
- 所有的仿射变换保持共线性
- 然而，一个仿射变换只具有12个自由度，因为所有仿射变换只是由4×4阶矩阵定义的线性变换的子集，矩阵的16个元素中有四个元素是固定的

计算机图形学中常用的坐标系

- 在计算机图形学中，经常使用以下坐标系
  - 对象坐标系或建模坐标系
  - 世界坐标系
  - 视点坐标系或照相机坐标系
  - 裁剪坐标系
  - 规范化的设备坐标系
  - 窗口坐标系或屏幕坐标系



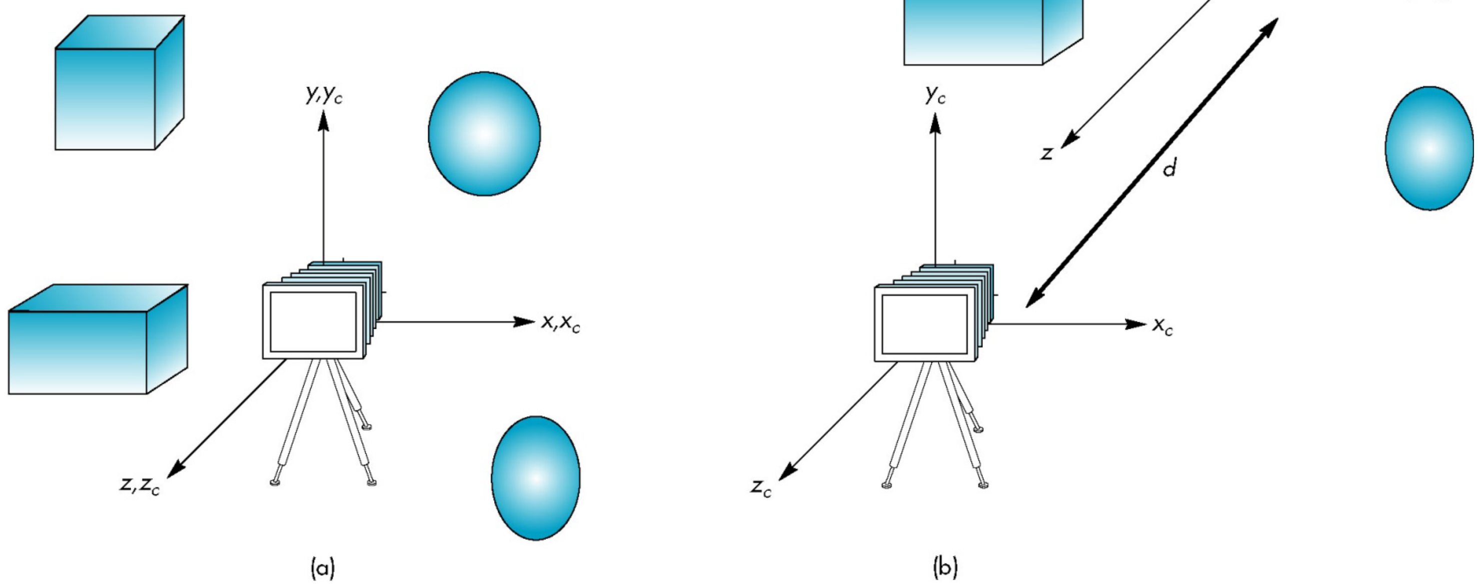


世界坐标系与照相机坐标系

- 从模型坐标到世界坐标、世界坐标到视点坐标都可以通过一个4×4阶矩阵来表示
- 在OpenGL中，为节约计算，将这两个坐标系合二为一，通过模型-视图矩阵（ModelView Matrix M ）表示
- 初始状态时，M = I
- 实际使用中，同一变换即可理解成物体在运动或者照相机在运动，两者正好相反

照相机的移动

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Thanks for your attention!