2018-2019年度第二学期 00106501

计算机图形学

童 伟 华　管理科研楼1205室

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

中国科学技术大学　数学科学学院

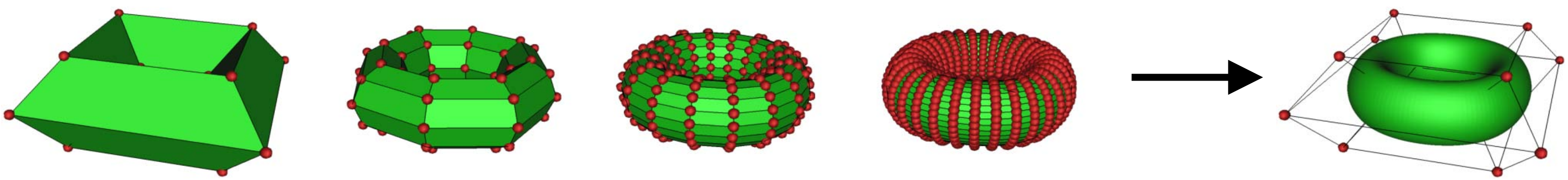
http://math.ustc.edu.cn/

第十章 建模方法

第一节 曲线与曲面的表示

曲线与曲面的表示

- 目前，曲线和曲面的主要表示方法有：
  - 参数形式
  - 隐式形式
  - 细分形式
  - 网格形式
  - 点采样形式

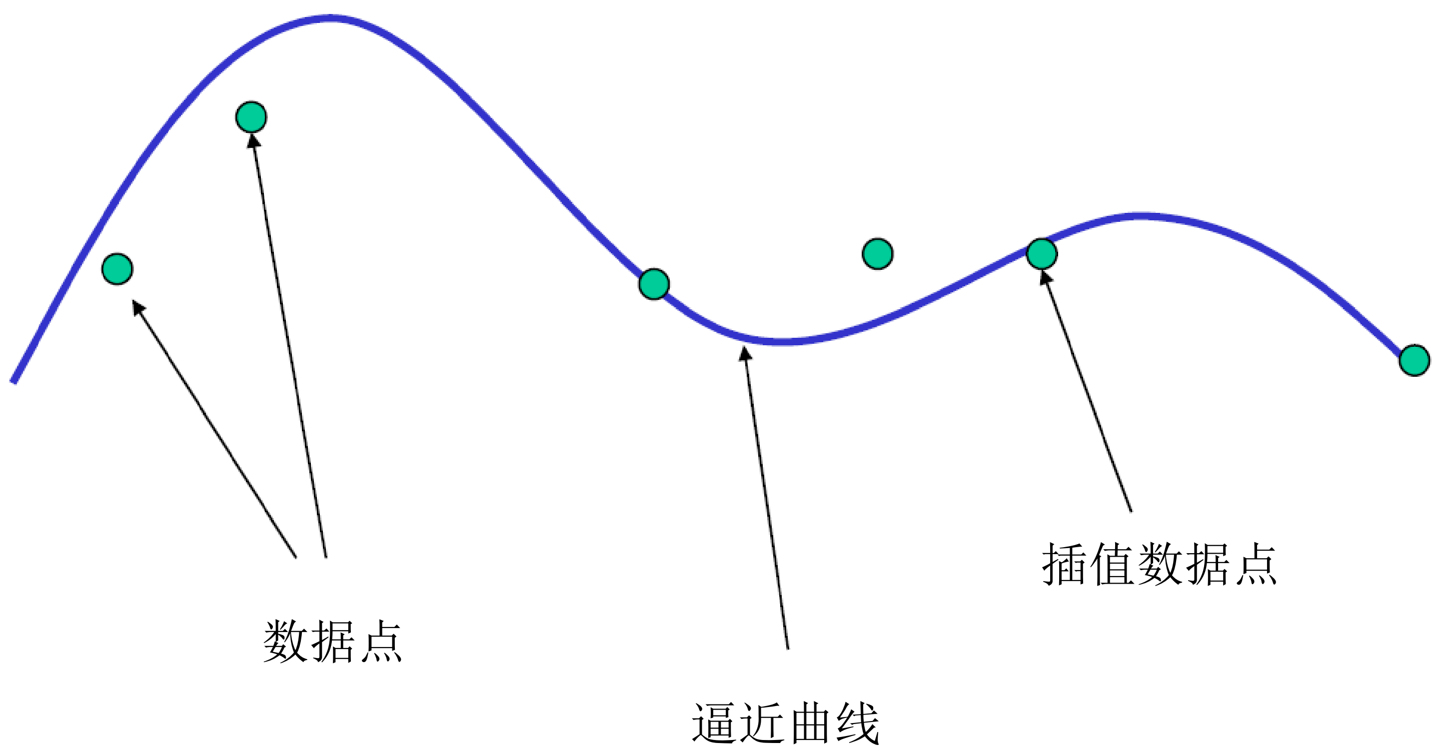


- 每种表示各有优缺点，根据具体应用选择表示形式

脱离平面

- 直到现在为止我们一直是应用平面元素进行建模，例如：直线和平面多边形
  - 非常适合于图形系统硬件
  - 数学上相当简单
- 但世界并不只是由平面元素构成的
  - 需要用到曲线和曲面
  - 可能只在应用程序层次上用到
  - 实现代码可以通过用平面元素逼近它们来显示

用曲线建模

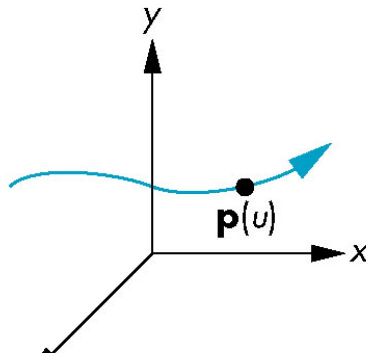


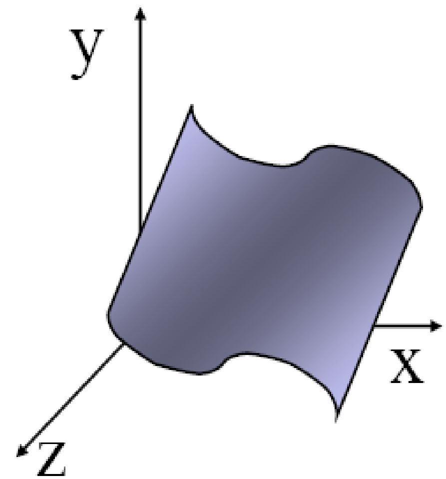
如何给出好的表示？

- 有许多方法表示曲线和曲面
- 我们需要一种方法，它具有性质
  - 稳定
  - 光滑
  - 容易求值
  - 是否一定要插值或者只是靠近数据？
  - 是否需要导数？

显式表示

- 二维空间中最熟悉的曲线形式为 $y=f(x)$
- 不能表示所有的曲线，例如
  - 竖直线
  - 圆
- 可以扩展到三维空间
  - $y=f(x), z=g(x)$
  - $z=f(x,y)$ 的形式定义了一张曲面





隐式表示

- 隐式曲线是二元函数的零点集
  - $g(x,y)=0$
- 更稳定
  - 直线：$ax + by + c = 0$
  - 圆：$x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- 三元函数的零点集$g(x,y,z) = 0$定义了一张曲面
  - 两张曲面的交得到一条曲线

代数曲面

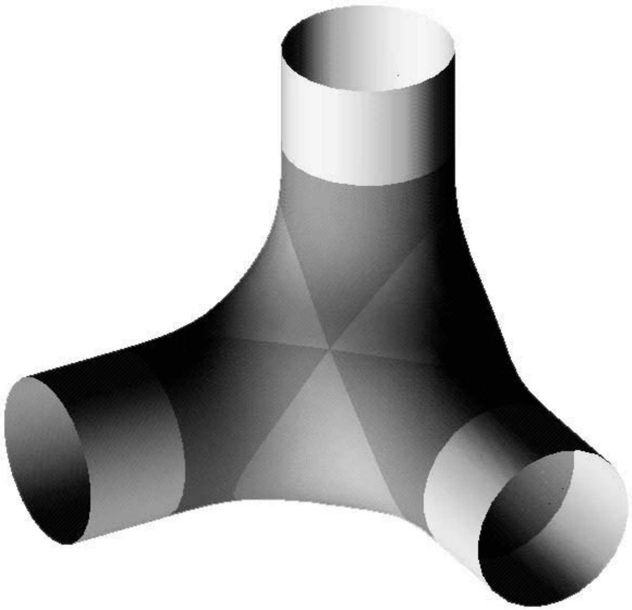
- 曲面表示形式：

$$\sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

- 二次曲面：$i+j+k \le 2$
- 最多十项
- 为了计算光线与它的交点，可以简化为求解一个二次方程
- 一般的代数曲面是代数几何的研究内容

分片代数曲面

- 具有更强的造型能力，每片的次数较低
- 容易构造复杂形体
- 与代数曲面一样，具有多分支性



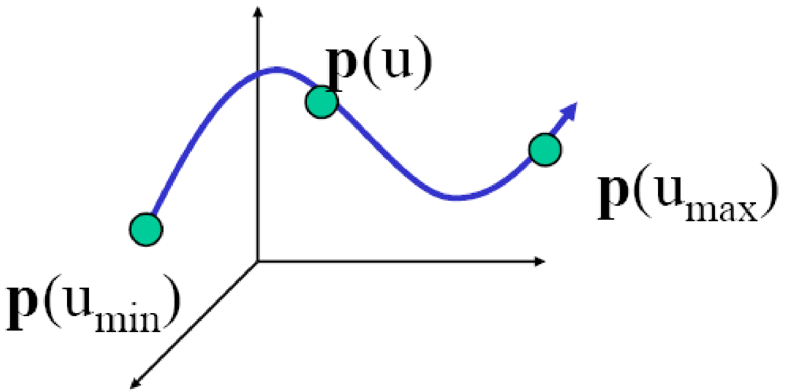
参数曲线

- 每个空间变量具有单独的方程

$$x=x(u)$$
$$y=y(u)$$
$$z=z(u)$$

$$\mathbf{p}(u)=[x(u), y(u), z(u)]^T$$

- 对于$u_{min} \le u \le u_{max}$，可以得到二维或三维空间中的一条曲线



函数的选择

- 通常我们可以选择出“好”的函数
  - 对于给定的空间曲线，表示它的函数是不唯一的
  - 可以很容易逼近或插值已知数据
  - 希望函数是容易求值的
  - 希望函数是容易求导的
    - 计算法向
    - 连接各个小片
  - 希望函数是光滑的

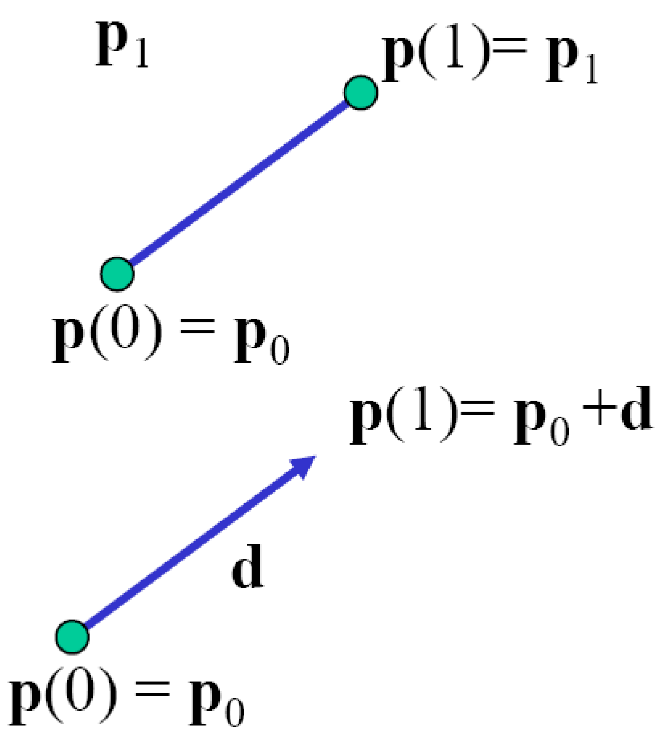
参数直线

- 可以把参数u规范化到区间[0,1]内
- 直线连接两点p_0和p_1

$$p(u) = (1-u)p_0 + u\,p_1$$

起点为p_0，方向为d的射线为

$$p(u) = p_0 + ud$$

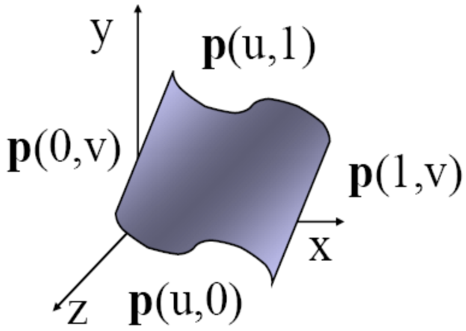


参数曲面

- 曲面需要两个参数

$$x=x(u,v)$$
$$y=y(u,v)$$
$$z=z(u,v)$$

$$\mathbf{p}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]^T$$



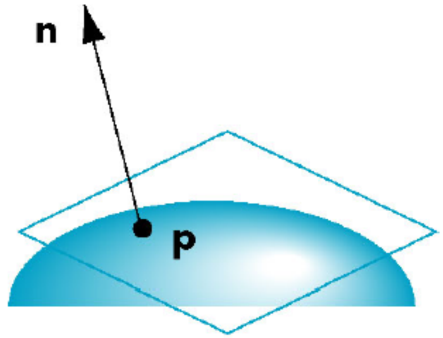
- 希望与曲线具有同样的性质
  - 光滑
  - 可导
  - 容易求值

法向计算

- 可以对u和v求偏导计算出在任意点p处的法向

$$\frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \partial x(u,v)/\partial u \\ \partial y(u,v)/\partial u \\ \partial z(u,v)/\partial u \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial v} = \begin{bmatrix} \partial x(u,v)/\partial v \\ \partial y(u,v)/\partial v \\ \partial z(u,v)/\partial v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial v}$$



参数平面

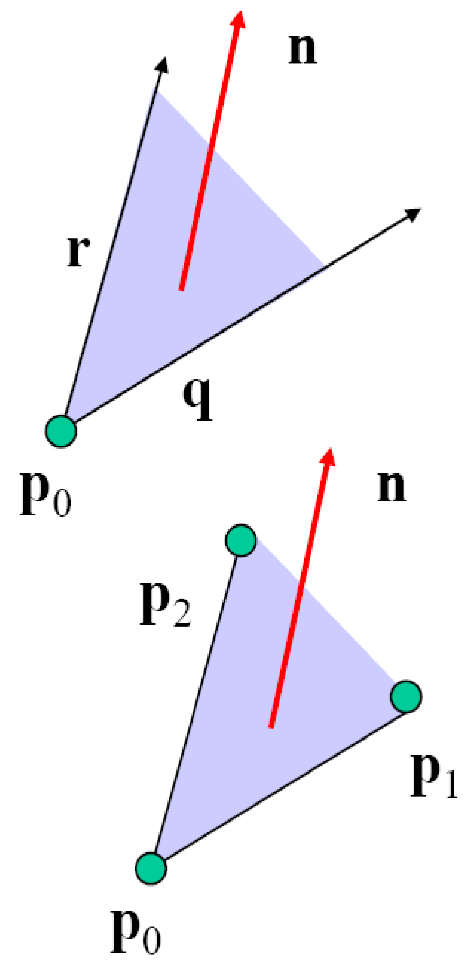
点向式

$$p(u,v)=p_0+uq+vr$$

$$n = q \times r$$

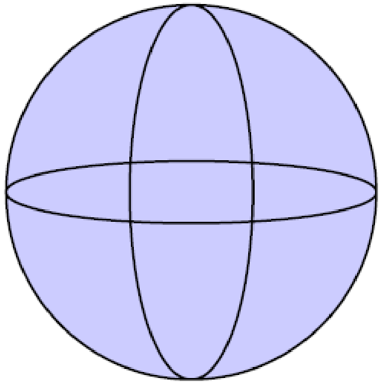
三点式

$$q = p_1 - p_0$$
$$r = p_2 - p_0$$



参数球

$$x(u,v) = r\cos\theta\sin\phi$$
$$y(u,v) = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z(u,v) = r\cos\phi$$



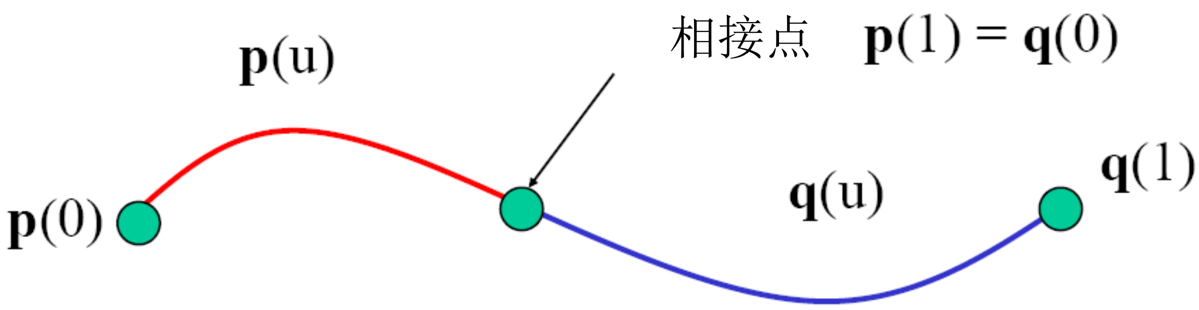
$$360 \geq \theta \geq 0$$
$$180 \geq \phi \geq 0$$

θ = 常数：常数经线圆

ϕ = 常数：常数纬线圆

曲线段

- 在对u进行规范化后，每条曲线都可以写为形式 $p(u) = [x(u), y(u), z(u)]^T, 0 \le u \le 1$
- 在经典的数值方法中我们通常是设计单条的整体曲线
- 在计算机图形学和CAD中，通常倾向于设计一些彼此相连的小曲线段



参数多项式曲线

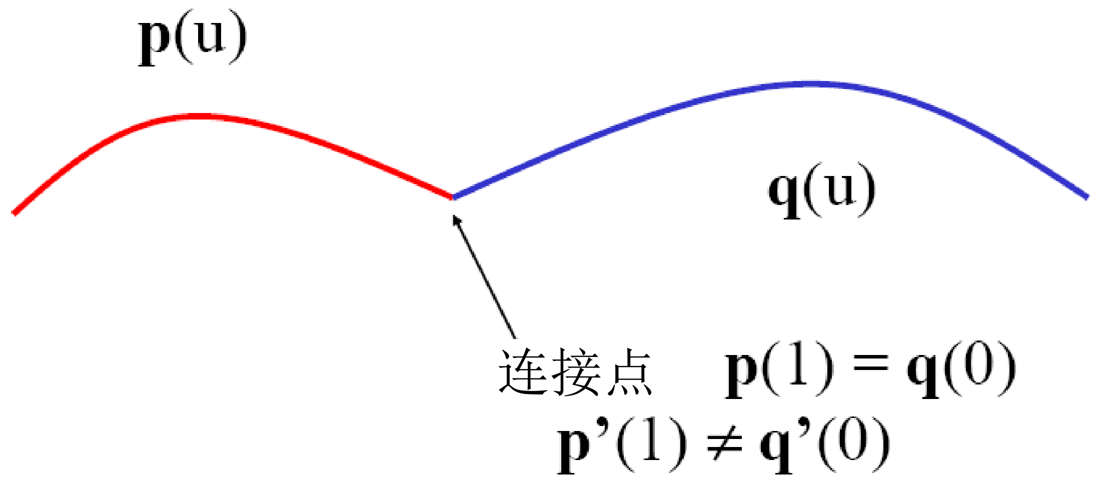
- 采用如下表示形式：

$$x(u)=\sum_{i=0}^{N} c_{xi}u^{i} \quad y(u)=\sum_{j=0}^{M} c_{yj}u^{j} \quad z(u)=\sum_{k=0}^{L} c_{zk}u^{k}$$

- 如果N=M=K，需要确定3(N+1)个系数
- 这等价于需要3(N+1)个独立的条件
- 注意曲线对x, y, z是独立的，因此可以用相同的方式分开定义每个分量
- 我们将采用形式 $p(u)=\sum_{k=0}^{L} c_k u^k$，其中p可以是x, y, z中任一个

为什么要采用多项式呢?

- 容易求值
- 处处连续而且光滑
  - 在相接点需要考虑连续性和光滑的阶数



三次参数多项式

- N=M=L=3, 这是在容易计算和设计弹性之间取得的一个折衷

$$p(u)=\sum_{k=0}^{3}c_k u^k$$

- 确定x,y,z中的每个，需要四个系数
- 对x, y, z分别考虑：对于u的四个不同值，给出四个独立条件，从而得以四个方程，有四个未知数
  - 这些条件应当包含在连接点连续性要求和对数据的拟合要求

三次多项式曲面

- 采用如下表示形式：

$$\mathbf{p}(u,v)=[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]^T$$

其中

$$\mathrm{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}c_{ij}u^i v^j$$

p 是x, y, z中任一个

需要48个系数（三组，每组16个）才能确定一张曲面片

Thanks for your attention!