计算机图形学

童 伟 华 管理科研楼1205室

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

中国科学技术大学 数学科学学院

http://math.ustc.edu.cn/

第二节 参数曲线曲面的设计

矩阵-向量形式

- 三次曲线的矩阵表示

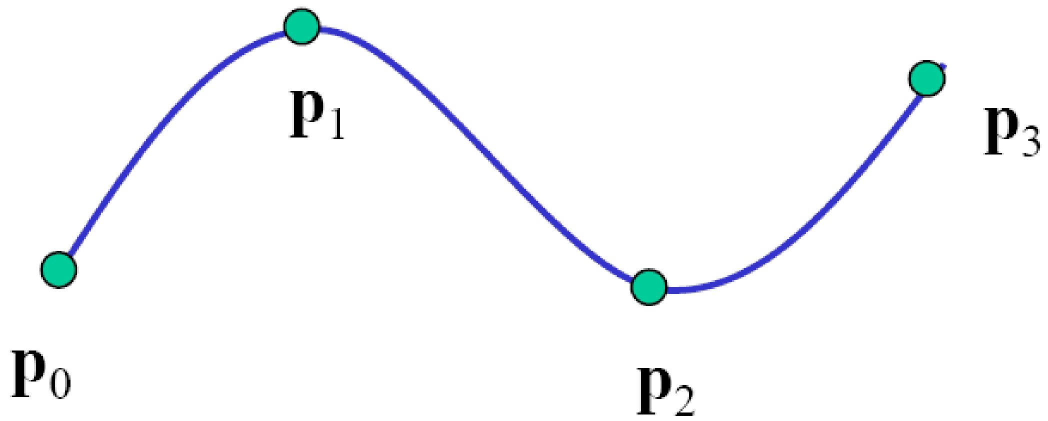
$$\mathrm{p}(u)=\sum_{k=0}^{3} c_k u^k$$

定义 $\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$

则 $\mathrm{p}(u)=\mathbf{u}^T\mathbf{c}=\mathbf{c}^T\mathbf{u}$

插值曲线

- 给定四个数据点p_0, p_1, p_2, p_3，确定一条三次曲线$p(u)$通过这三个点



需要求出系数c_0, c_1, c_2, c_3

插值方程

- 在 u=0, 1/3, 2/3, 1四点处应用插值条件

$$p_0=p(0)=c_0$$
$$p_1=p(1/3)=c_0+(1/3)c_1+(1/3)^2c_2+(1/3)^3c_2$$
$$p_2=p(2/3)=c_0+(2/3)c_1+(2/3)^2c_2+(2/3)^3c_2$$
$$p_3=p(1)=c_0+c_1+c_2+c_2$$

- 表示为矩阵形式，记 p = [p0 p1 p2 p3]T

$$\mathbf{p=Ac} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \left(\frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ 1 & \left(\frac{2}{3}\right) & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

插值矩阵

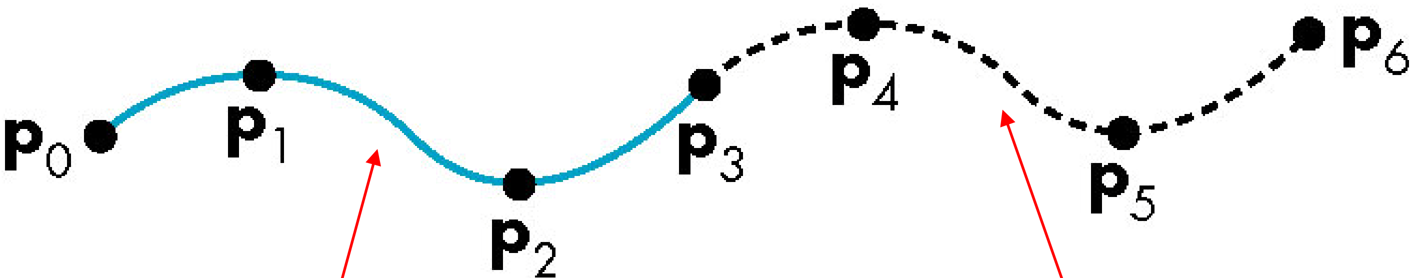
- 为了求解c，计算插值矩阵

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5.5 & 9 & -4.5 & 1 \\ 9 & -22.5 & 18 & -4.5 \\ -4.5 & 13.5 & -13.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_I \mathbf{p}$$

- 注意 $\mathbf{M}_I$ 与输入数据无关，可以对x, y, z中任一部分应用该矩阵

多段插值曲线



应用p = [p0 p1 p2 p3]^T

应用$\mathbf{p} = [p_3\ p_4\ p_5\ p_6]^T$

在交点处有连续性，但导数不一定连续

混合（blending）函数

- 把 p(u) 的方程重写为

$$p(u)=\mathbf{u}^T\mathbf{c}=\mathbf{u}^T\mathbf{M}_I\mathbf{p} = \mathbf{b}(u)^T\mathbf{p}$$

- 其中b(u) = [b0(u) b1(u) b2(u) b3(u)]T 为一组多项式，称为混合函数，从而

$$p(u) = b0(u)\mathbf{p0}+ b1(u)\mathbf{p1}+ b2(u)\mathbf{p2}+ b3(u)\mathbf{p3}$$

$$b_0(u) = – 9/2(u – 1/3)(u – 2/3)(u – 1)$$

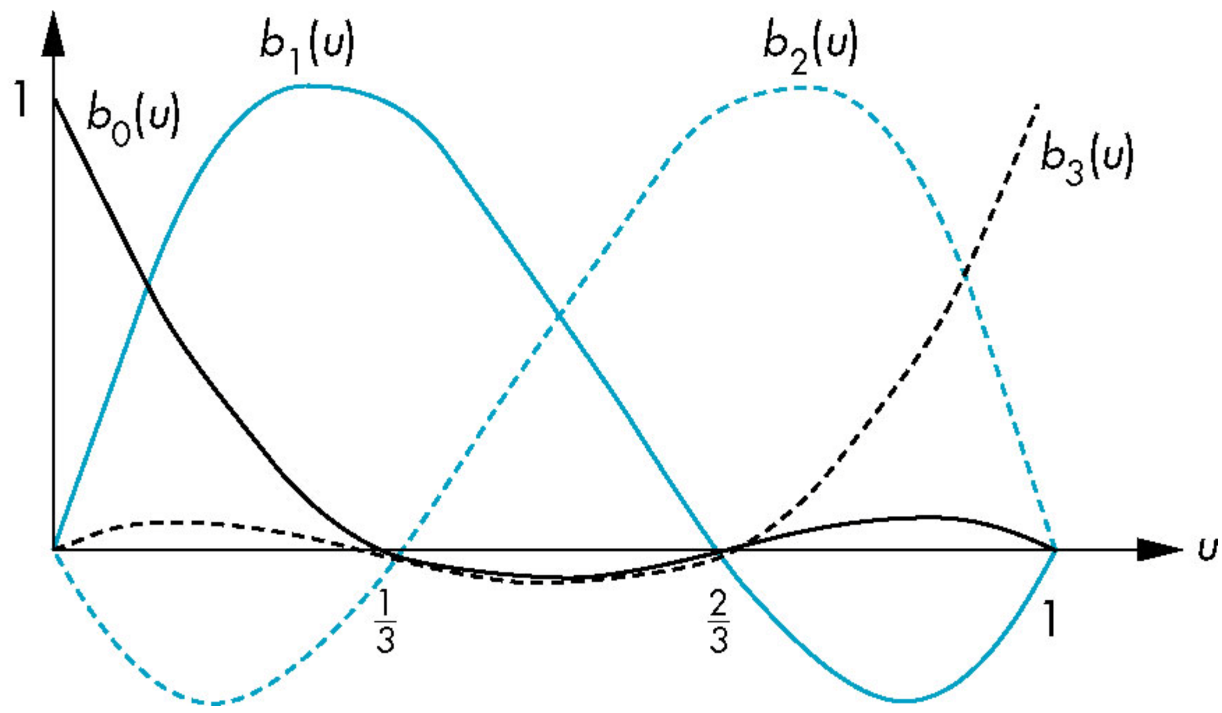
$$b_1(u) = 27/2\ u\ (u – 2/3)(u – 1)$$

$$b_2(u) = – 27/2\ u\ (u – 1/3)(u – 1)$$

$$b_3(u) = 9/2\ u\ (u – 1/3)(u – 2/3)$$

混合函数的图形

- 这些函数的形状上下变化很大
  - 因此得到的插值多项式也有类似的现象



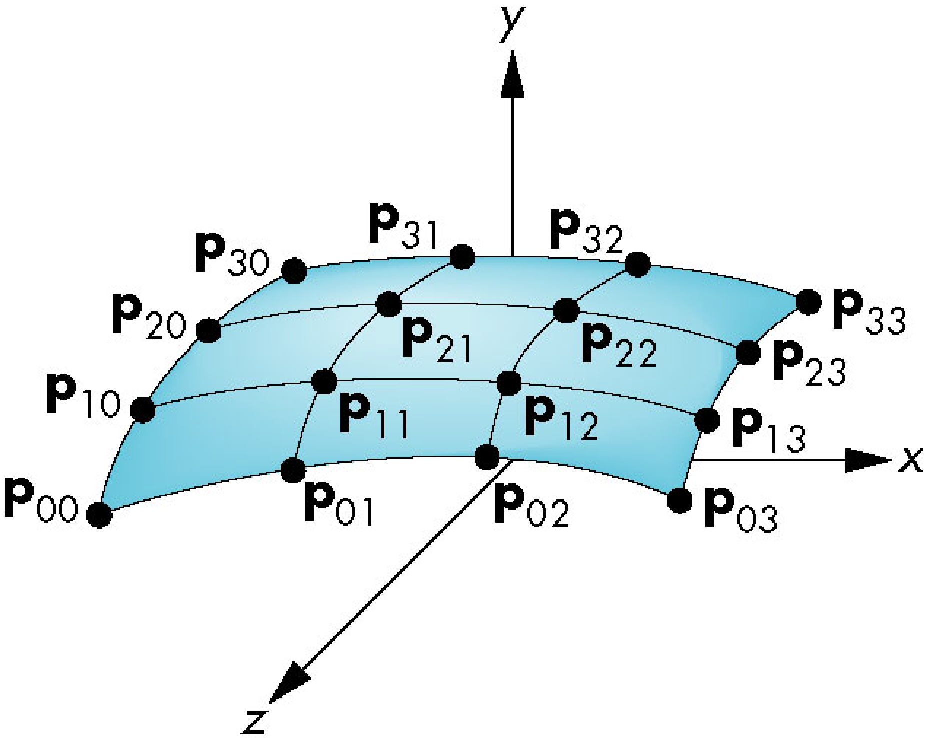
插值曲面片

- 推广到曲面形式

$$p(u,v)=\sum_{i=o}^{3}\sum_{j=0}^{3}c_{ij}u^{i}v^{j}$$

需要16个条件确定16个系数 c_{ij}

选择 u,v = 0, 1/3, 2/3, 1



矩阵形式

- 定义 $\mathbf{v} = [1\ v\ v^2\ v^3]^T$

  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$

  $p(u,v) = \mathbf{u}^T\mathbf{C}\mathbf{v}$

- 认为u（或v）为常数，那么得到的就是关于v（或u）的插值曲线，若记插值点$\mathbf{P} = [p_{ij}]$，从而

  $\mathbf{C}=\mathbf{M}_I\mathbf{P}\mathbf{M}_I$

  $p(u,v) = u^T\mathbf{M}_I\mathbf{P}\mathbf{M}_I{}^T v$

混合曲面片

- 采用如下表示形式：

$$p(u,v)=\sum_{i=o}^{3}\sum_{j=0}^{3}b_i(u)b_j(v)p_{ij}$$

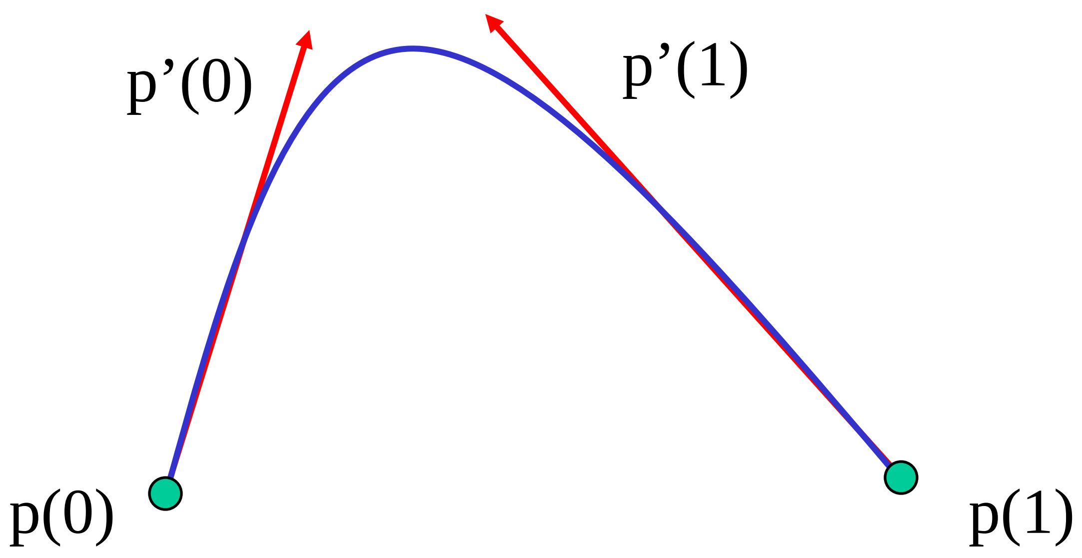
每个$b_i(u)b_j(v)$就是一个混合曲面片

应用前面关于曲线的知识，可以建立并分析这些曲面片的表示

其它类型的曲线和曲面

- 如何去掉插值形式的局限性？
  - 不必要的振荡
  - 在相交点导数不连续
- 对于三次曲线，我们在每段上可以加四个条件
  - 不必要采用位置插值条件
  - 只需要靠近数据

Hermite形式



在每段上应用两个位置插值条件以及两个导数插值条件
从而保证了段与段之间的连续性与一阶导数连续性

插值条件

- 在端点处的位置插值条件是相同的

$$p(0) = p_0 = c_0$$

$$p(1) = p_3 = c_0+c_1+c_2+c_3$$

微分后得到 $p'(u) = c_1+2uc_2+3u^2c_3$

在端点处求值

$$p'(0) = p'_0= c_1$$

$$p'(1) = p'_3= c_1+2c_2+3c_3$$

矩阵形式

- 定义

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} p_0 \\ p_3 \\ p'_0 \\ p'_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{c}$$

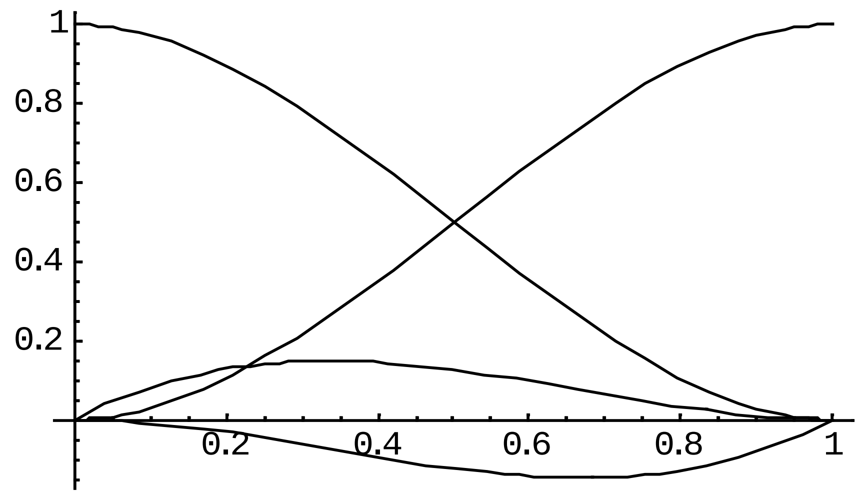
- 求解得到 $\mathbf{c}=\mathbf{M}_H\mathbf{q}$ 其中 $\mathbf{M}_H$ 称为 Hermite 矩阵

$$\mathbf{M}_H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

混合多项式

$$p(u) = \mathbf{b}(u)^{T}\mathbf{q}$$

$$\mathbf{b}(u) = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix}$$



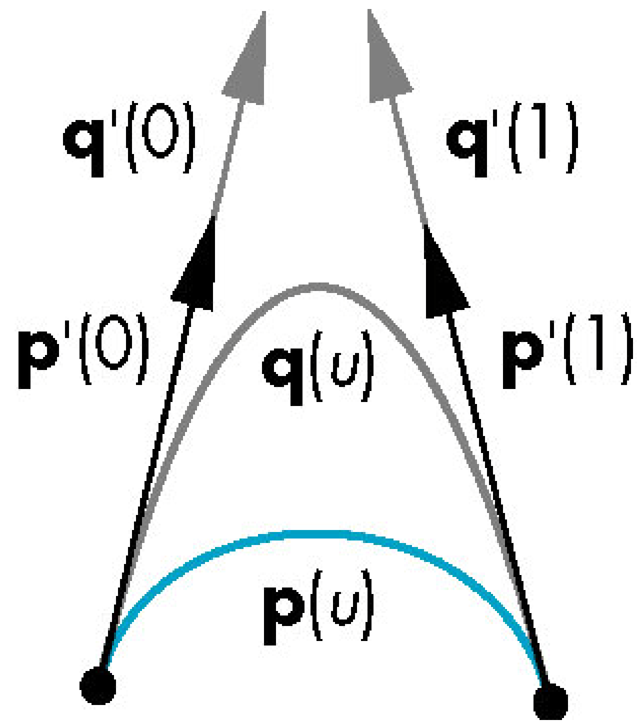
这些函数比较平滑，但是在计算机图形学和CAD中并不直接应用Hermite形式，因为我们通常有的是数据点，而不是导数。然而Hermite形式是Bézier形式的基础。

参数连续性与几何连续性

- 参数连续性：在相邻两段交点处x, y, z的导数分别完全相同
- 另外，我们可以只要求结果得到的曲线在交点处切向连续，这称为几何连续性
- 几何连续性使得我们更有弹性，因此此时我们只需要满足两个条件，而不是参数连续中的三个条件

示例

- 图中p和q在端点处有相同的切向，但导数不同
- 生成不同的Hermite曲线
- 在绘图程序中用户可以通过改变切向的长度控制曲线的形状



高维逼近

- 插值和Hermite曲线的技术可以应用到高维参数多项式中的构造中
- 对于插值形式，得到的矩阵通常具有很差的条件数，从而构造的曲线振荡严重，而且对数据误差非常敏感
- 对于这两种情形，显示所生成的多项式曲线和曲面也需要大量的工作

Bézier的想法

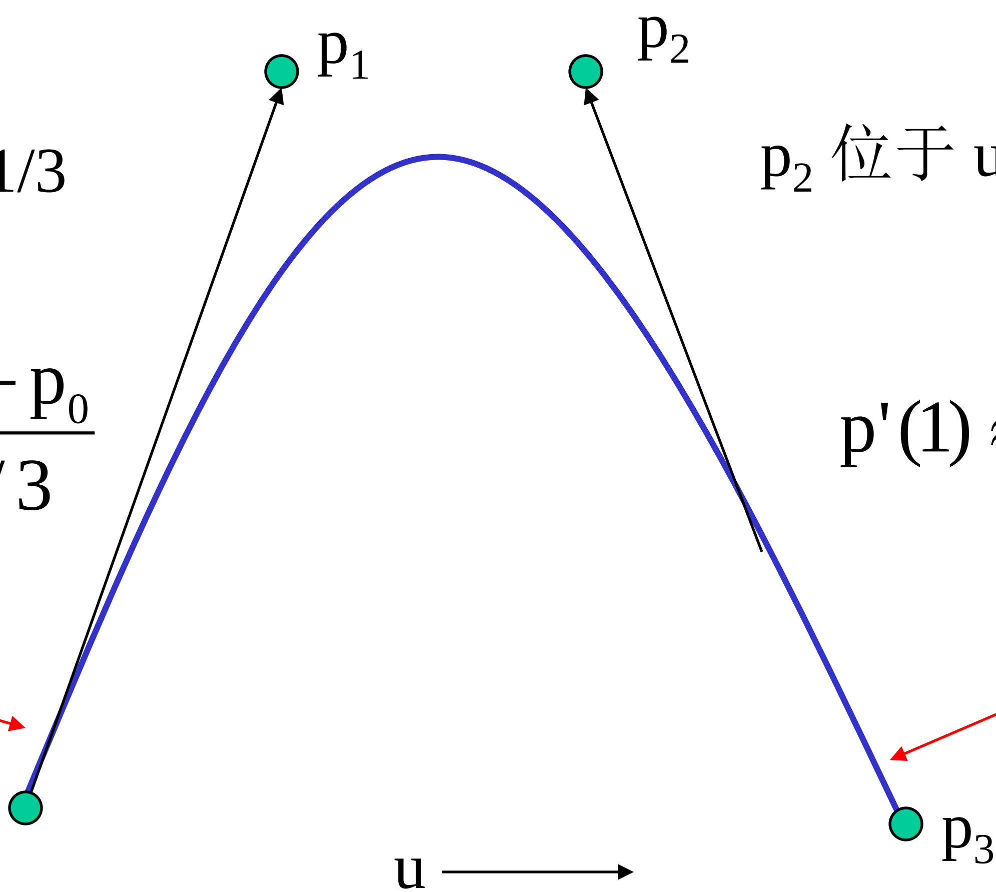
- 在图形学和CAD中，我们通常没有直接的导数信息
- Bézier（皮埃尔·贝塞尔，法国雷诺公司的一名工程师，是实体造型、几何模型和物理模型领域的奠定者之一）建议应用三次插值曲线中同样的四个数据点逼近Hermite形式中的导数

逼近导数

p_1 位于 $u=1/3$

$$p'(0) \approx \frac{p_1 - p_0}{1/3}$$

斜率 $p'(0)$



p_2 位于 $u=2/3$

$$p'(1) \approx \frac{p_3 - p_2}{1/3}$$

斜率 $p'(1)$

方程

端点位置插值条件相同

$$p(0) = p_0 = c_0$$
$$p(1) = p_3 = c_0+c_1+c_2+c_3$$

逼近导数条件

$$p'(0) = 3(p_1 - p_0) = c_0$$
$$p'(1) = 3(p_3 - p_2) = c_1+2c_2+3c_3$$

求解有四个方程的线性方程组 $\mathbf{c}=\mathbf{M}_B\mathbf{p}$

Bézier矩阵

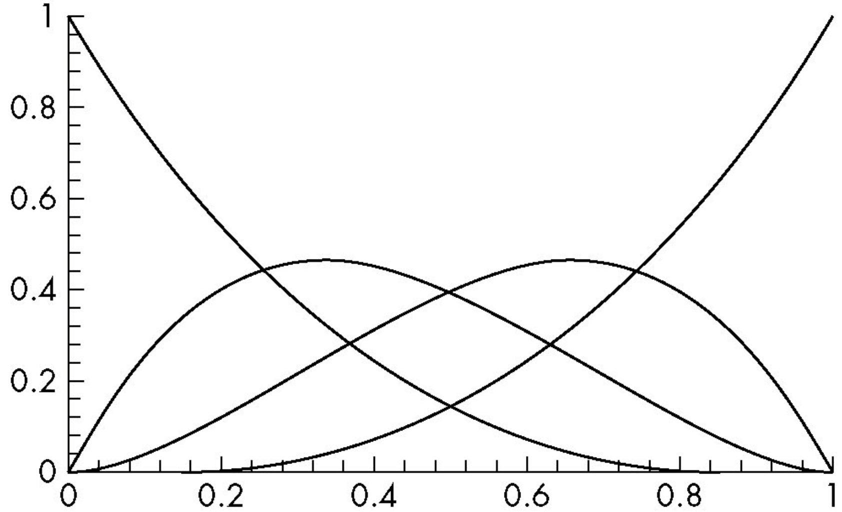
$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{p(u)} = \mathbf{u}^T\mathbf{M}_B\mathbf{p} = \mathbf{b}(\mathrm{u})^T\mathbf{p}$$

混合函数

混合函数

$$\mathbf{b}(u) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 \\ 3u(1-u)^2 \\ 3u^2(1-u) \\ u^3 \end{bmatrix}$$



注意函数的零点全在0与1使得函数在(0,1)上比较平滑

Bernstein多项式

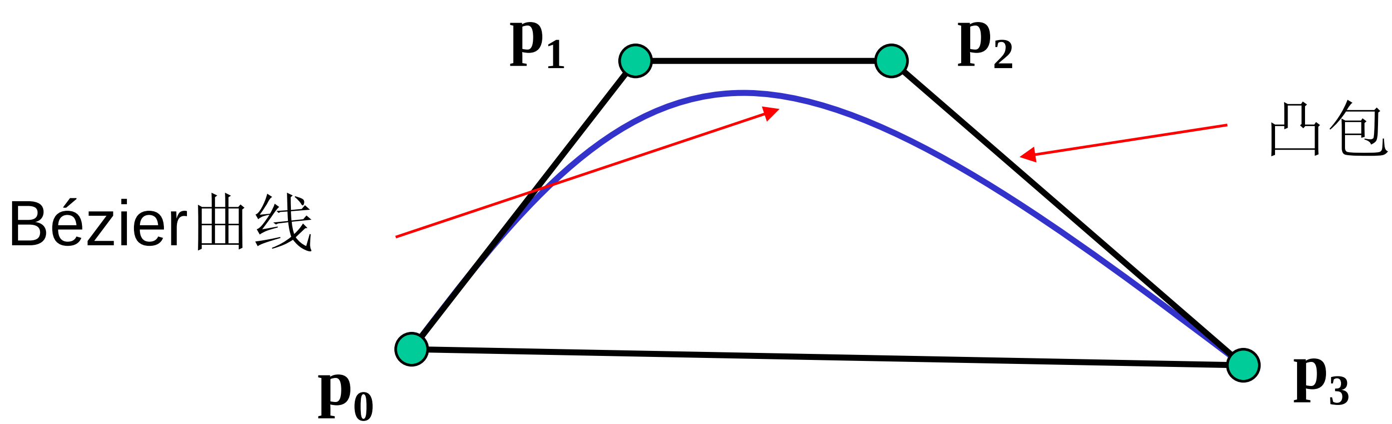
- 混合函数是Bernstein多项式的一种特殊情形

$$b_{kd}(u)=\frac{d!}{k!(d-k)!}u^{k}(1-u)^{d-k}$$

- 这些多项式定义了任意次数Bézier形式的混合多项式
  - 所有零点在0和1处
  - 对任意次数，所有多项式的和等于1
  - 在(0,1)内它们的值都在0与1之间

凸包性质

- Bernstein多项式的性质确保了所有的Bézier曲线位于它们的控制点形成的凸包（convex hull）内
- 因此，即使我们不插值所有的数据，所得结果也不会离数据太远

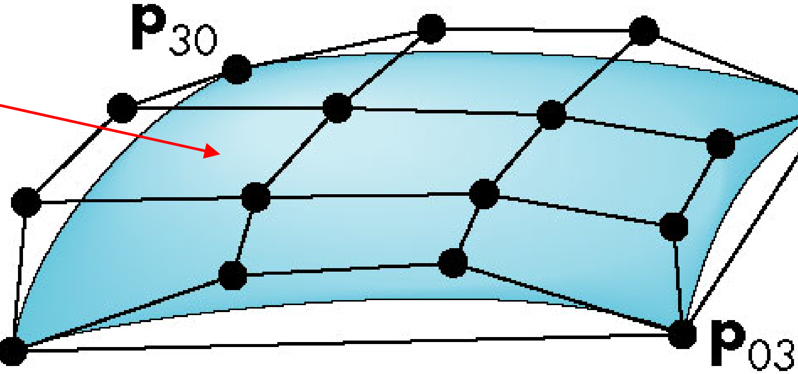


Bézier曲面片

应用与插值形式中同样的数据组$\mathbf{P}=[p_{ij}]$可以构造Bézier曲面片

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} b_i(u)\,b_j(v)\,p_{ij}=u^T\mathbf{M}_B\mathbf{P}\mathbf{M}_B^T v$$

曲面片位于
凸包内

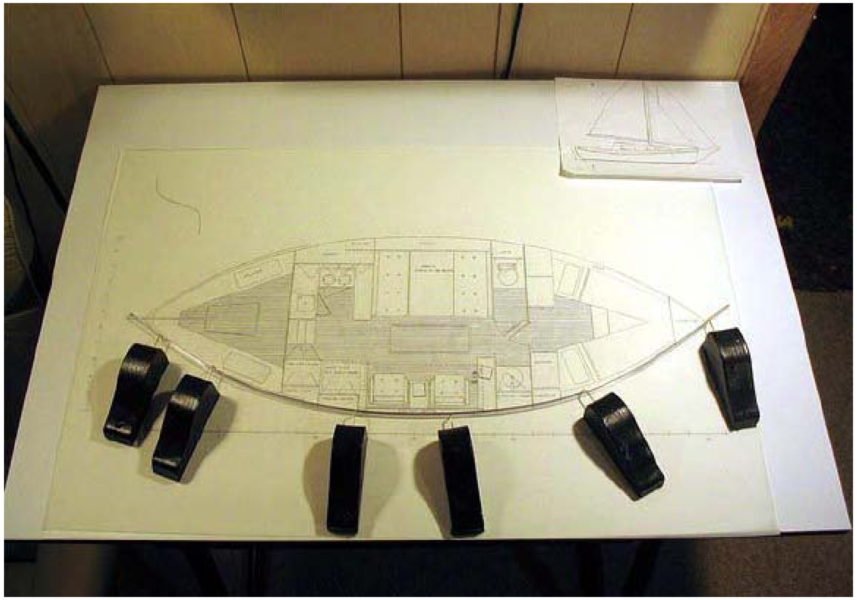


分析

- 虽然Bézier形式远优于插值形式，导数在交点处仍然不连续
- 能做得更好吗？
  - 应用高阶Bézier曲线和曲面
    - 需要做更多的工作
    - 导数的连续性仍然只是近似的
    - OpenGL支持
  - 应用不同的条件
    - 这种方法不会导致次数的增高

B-样条

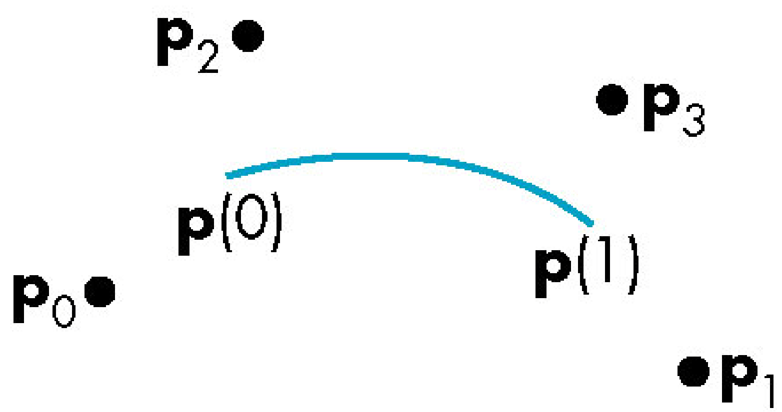
- 基本样条（Basic splines）：应用在$p=[p_{i-2}\ p_{i-1}\ p_i\ p_{i+1}]^T$的数据只定义在介于$p_{i-1}$和$p_i$之间的曲线
- 可以在每段上应用更多的连续性条件
- 对于三次情形，可以在连接点处得到连续曲线，一阶导数和二阶导数连续的曲线



三次B样条

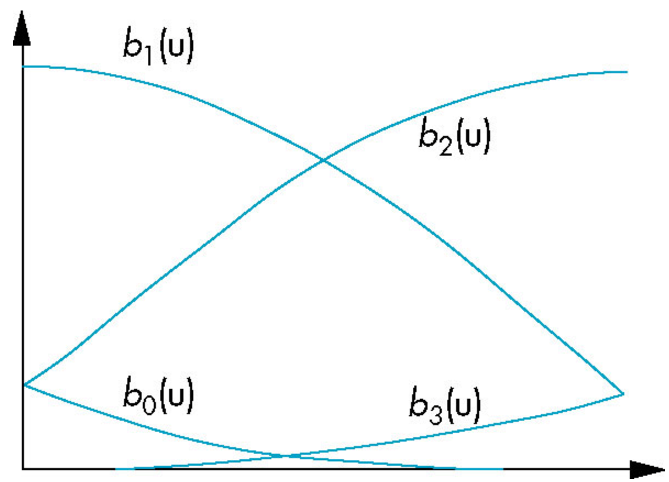
$$p(u) = \mathbf{u}^T \mathbf{M}_S \mathbf{p} = \mathbf{b}(u)^T \mathbf{p}$$

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

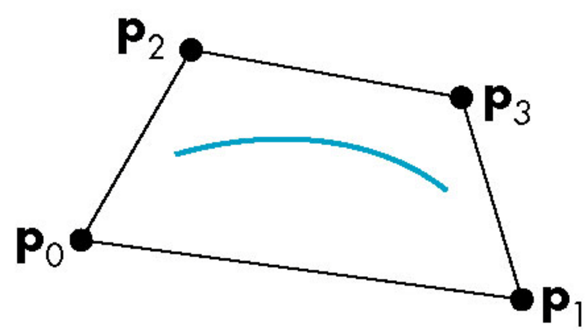


混合函数

$$\mathbf{b}(u)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}(1-u)^3\\ 4-6u^2+3u^3\\ 1+3u+3u^2-3u^2\\ u^3\end{bmatrix}$$



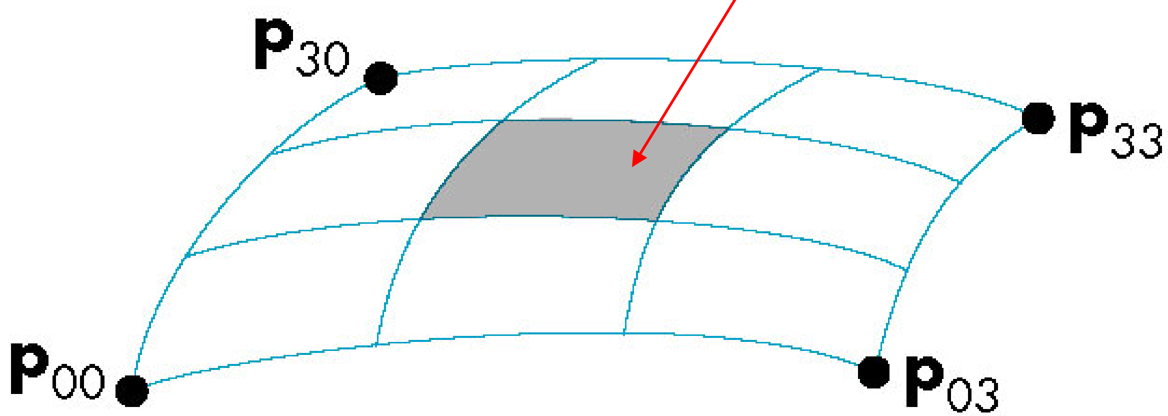
凸包性质



B样条曲面片

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} b_i(u)\, b_j(v)\, p_{ij} = u^T \mathbf{M}_S \mathbf{P} \mathbf{M}_S^T v$$

只定义区域的 1/9



样条和基函数

- 如果从控制点（数据）的角度来看，每个内部点对四段曲线的形状有贡献，具体由混合函数确定
- 可以把p(u)重写为如下形式：

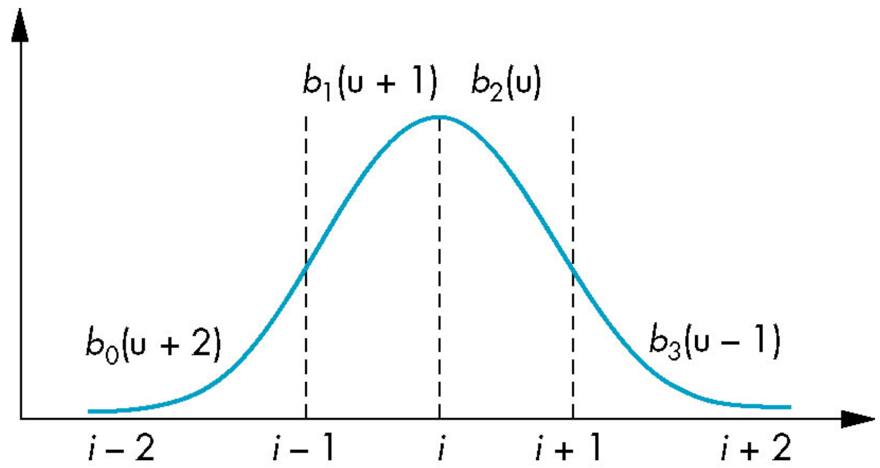
$$p(u) = \sum B_i(u)\, p_i$$

从而定义出了基函数$\{B_i(u)\}$

基函数

用混合多项式表示：

$$B_i(u)=\begin{cases} 0 & u<i-2 \\ b_0(u+2) & i-2\le u<i-1 \\ b_1(u+1) & i-1\le u<i \\ b_2(u) & i\le u<i+1 \\ b_3(u-1) & i+1\le u<i+2 \\ 0 & u\ge i+2 \end{cases}$$



样条的推广

- 可以把样条推广到任意次数的情形
- 数据和条件不需要对应于等距点（节点, knots）
  - 均匀样条和非均匀样条
  - 可以有重节点
    - 从而可以强迫样条插值某些点
- Cox-de Boor递推关系给出了计算方法

NURBS

- 非均匀有理B样条（Nonuniform Rational B-spline）曲线和曲面在x, y, z中添加了第四个变量w
  - 可以认为是控制点的权重，使得某些控制点的重要性加大
  - 也可以认为是齐次坐标表示
- 需要一次透视除法
  - NURBS对透视投影是不变的
- 二次曲面是NURBS的特殊情形

Thanks for your attention!