线性代数 (B1)

童伟华　管理科研楼 1205 室 [1]
E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

[1] 数学科学学院　中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期　MATH1009.08

什么是代数学?

E. Artin：研究代数系统的结构与表示理论。

例如：自然数、有理数、无理数、实数、复数及其上面的运算；群、环、域、模等代数结构。

什么是几何学?

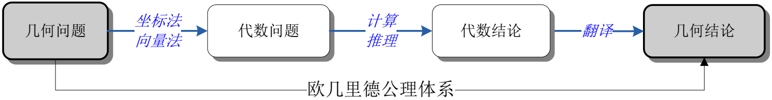
F. Klein：群作用下的不变量。

例如：点、线、面、空间等；距离、面积、体积、夹角等；共线、共面、相似等。

解析几何

解析几何：形与数的结合，其核心思想：用代数的方法去研究几何问题。

创立者：笛卡尔（哲学家，数学家，物理学家）



逻辑推理 $\Rightarrow$ 符号运算 $\Rightarrow$ 计算机运算 (几何定理的机械化证明，吴文俊等)

几何问题代数化：坐标法或向量法，图形方程化

§1.1.1 向量及其表示

定义 1.1

既有大小又有方向的量称为**向量**。

例如：力，加速度等，记为 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\mathbf{a}$（即黑体的小写字母表示，板书时常用 $\vec{\mathbf{a}}$）

向量相等：$\mathbf{a} = \mathbf{b}$　　零向量与负向量：$\mathbf{0}$，$-\mathbf{a}$

向量的长度：$|\mathbf{a}|$，向量的**模**　　单位向量：模为 1 的向量

向量的夹角，平行与垂直（正交）：$\mathbf{a} /\!/ \mathbf{b}$，$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

规定：**零向量与任何向量都平行且正交**

§1.1.2 向量的线性运算

平行四边形法则（或三角形法则）

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\lambda \mathbf{a}, \quad \lambda \overrightarrow{OA}$$

向量不是数，但可以像数那样运算！

基本运算：加法＋数乘

高级运算：数量积，向量积，混合积

加法运算规律:（交换律，结合律，单位元，逆元）

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$$

§1.1.2 向量的线性运算

数乘运算规律：（两条分配律，结合律，单位元）

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$$

$$(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$$

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

§1.1.2 向量的线性运算

单位向量： $\mathbf{a}^0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

线性运算： 加法 + 数乘

线性空间或向量空间

集合 + 加法 + 数乘 + 八条运算规律

线性代数的核心之一： *把二维或三维向量空间推广至 n 维抽象的向量空间！*

§1.1.3 向量的共线与共面

几何命题代数化

共线：一组向量称为共线的 $\Leftrightarrow$ 都平行于某条直线

共面：一组向量称为共面的 $\Leftrightarrow$ 都平行于某个平面

命题 1.1

向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ, μ，使得
$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

优点：形式对称

命题 1.2

向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, ν，使得

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

线性组合

给定一组向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 及一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，称

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n,$$

为向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 的线性组合。

线性相关与线性无关

一组向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 称为**线性相关**，如果存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，使得

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

反之，不是线性相关的一组向量称为**线性无关**。也就是说，如果上式成立，当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$。

向量运算 $\Rightarrow$ 坐标运算（通常更方便）

定理 1.3

设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为空间中三个不共面的向量，则对每个向量 $\mathbf{a}$ 都存在唯一的三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3)，使得

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

§1.2.1 仿射坐标系

定义 1.2

空间中任意三个有序的不共面的向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 称为空间的一组**基**。对于向量 $\mathbf{a}$，若

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的**仿射坐标**或简称**坐标**。

§1.2.1 仿射坐标系

定义 1.3

空间中任意一点 O 和一组基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 合在一起称为空间的一个*仿射坐标系*，记为 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$。点 O 称为*坐标原点*，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 称为*坐标向量*。$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 所在直线分别称为x *轴*，y *轴*和z *轴*，统称为*坐标轴*。三个坐标轴的任意两个决定了一个平面，称为*坐标面*，分别记为 Oxy, Oyz, Ozx。

八个卦限

位置关系：*左手仿射坐标系*；*右手仿射坐标系*。

§1.2.1 仿射坐标系

虽然空间中的点和向量都可以用坐标表示，但在仿射空间中，点与向量是不同的！

点 + 向量 = 点

点 - 点 = 向量

点 + 点 = ？（无意义！）

§1.2.2 直角坐标系

空间直角坐标系：要求三个坐标向量为两两垂直的单位向量，用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示，相应的坐标轴为 x 轴，y 轴，z 轴。

向量长度：

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{OR^2 + RQ^2 + QP^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

（思考：若为一般的仿射坐标系，如何计算?）

§1.2.2 直角坐标系

空间中任意两点 $A(x_1, x_2, x_3), B(y_1, y_2, y_3)$ 之间的距离:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

方向余弦: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

§1.2.3 向量的坐标运算

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

加法:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\
&= (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

数乘:

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} = \lambda(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = (\lambda a_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda a_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda a_3)\mathbf{e}_3$$

§1.3.1 数量积的定义与性质

定义 1.4

两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的*数量积*为一个实数，它等于两个向量的模长与两向量夹角的余弦的乘积，记为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。如果向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

数量积也常称为*内积*。

向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的内积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\Leftrightarrow$ 两个向量是正交的（垂直）

常用于证明垂直

§1.3.1 数量积的定义与性质

命题 1.4

对向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 及实数 λ，我们有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})),$$

$$(\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0, \text{等号成立当且仅当} \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

$$(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}\pm\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\pm\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 \pm 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \mathbf{b}^2$$

思考：几何含义?

取空间直角坐标系 $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

（思考：若为一般的仿射坐标系，如何计算?）

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

§1.4.1 向量积的定义与性质

定义 1.5

两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的*向量积* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 为一个向量，它的方向与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都垂直，且使 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系；它的模等于以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积，即 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$，其中 θ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 间的夹角。向量积也常称为*外积*。

例如：力矩，电磁场的旋量等。

方向的选取：*左手系*或*右手系*

常用于证明平行

向量积运算性质

命题 1.5

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个向量，λ 为实数，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}), \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \end{aligned}$$

§1.4.2 角坐标系下向量积的计算

取空间直角坐标系 $[O;\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$，其中 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 为两两垂直的单位向量且满足右手法则

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k} \\
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) \\
&= \cdots \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

是否有更简洁的记号? — 行列式

§1.4.2 直角坐标系下向量积的计算

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

利用行列式的语言

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

（思考：若为一般的仿射坐标系，如何计算？）

§1.5.1 混合积的定义

定义 1.6

给定三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$，称 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的*混合积*，它是一个数量。

几何含义：以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的*有向体积*

正、负的含义：*左手系*或*右手系*

轮换对称性：$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

常用于证明共面

利用行列式的语言

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

（思考：若为一般的仿射坐标系，如何计算?）

命题 1.6

三个向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3),\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3),\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 共面当且仅当 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$.

§1.5.3 二重向量积

定义 1.7

给定三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$，称 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 为这三个向量的二重外积。

命题 1.7

对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$，有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

定义 1.8

一个n **维数组向量** $\mathbf{a}$ 是一个有序的 n 元数组

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

其中 $a_i \in F, i = 1, 2, \ldots, n$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的第 i 个**分量**。这里 F 表示实数集、复数集或其他数域。

行向量：n 维数组写成行的形式，如 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

列向量：n 维数组写成列的形式，如 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

§1.6 高维数组向量

向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, $\lambda\in F$

向量**相等** $\Leftrightarrow$ 当它们对应的分量分别相等，即
$a_i=b_i,\ i=1,2,\cdots n$

加法运算：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$
数乘运算：$\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n)$

零向量，**负向量**，八条运算规律

n 维数组向量构成数域 F 上的线性空间！

§1.6 高维数组向量

基本概念：线性组合、线性相关、线性无关、维数

基本向量：第 i 个分量为 1，其余分量为 0，即

$$\mathbf{e}_i = (0, \cdots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, \cdots, 0),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

n 个基本向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 构成 n 维数组空间的一组基

任何一个 n 维数组向量都可以唯一的表示为基本向量的线性组合，即

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

§1.7 复数

复数起源于求解三次方程的根

虚数单位 $i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$

欧拉（$e^{ix} = \cos x + i \sin x$）　高斯（复数的几何解释）

代数基本定理

任何一个一元复系数方程式都至少有一个复数根，即复数域是代数封闭的。

推论：任何一个非零的一元 n 次复系数多项式有且仅有 n 个复数根（计根的重数）。

§1.7.1 复数的四则运算

复数 $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$

x, y 分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，记作 Rez 和 Imz

$z_1 = x_1 + i\,y_1,\ z_2 = x_2 + i\,y_2,\ \lambda \in \mathbb{R}$

加法运算：$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

数乘运算：$\lambda z_1 = \lambda x_1 + i\,\lambda y_1$

乘法运算：$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

除法运算：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0$

§1.7.2 复数的几何表示

定义 1.9

在平面中取一个直角坐标系 Oxy，我们用坐标为 (x, y) 的点 P 表示复数 $z = x + iy$。这样，复数就与平面中的点一一对应。x 轴与实数对应，也称为*实轴*；y 轴与纯虚数对应，也称为*虚轴*。与复数建立了这种对应关系的平面称为*复平面*。

复数的模：$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

三角不等式：$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

定义 1.10

复数 z 所对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的**幅角**，记作 $\arg z$

复数 z 的幅角不并唯一，它们彼此相差 2π 的整数倍。在实际中，我们一般规定 $0 \le \arg z < 2\pi$，称之为幅角的**主值**。

复数 $x - iy$ 称为复数 $z = x + iy$ 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

利用共轭复数有：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

§1.7.2 复数的几何表示

复数的三角表示：

$$z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

利用欧拉公式

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

恒等式：$e^{i\,2\pi} = 1$

§1.8 数域

常用的数集：$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

（思考：是否有更大的数域?）

运算：二元函数或一元函数

封闭：设 F 为一个数集，在 F 中任取两数作某种运算，如果其结果仍在 F 中，则称数集 F 对这种运算是**封闭的**。

§1.8 数域

定义 1.11

设数集 F 至少包含两个不同的元素，称 F 为**数域**，如果 F 对数的加减乘除运算是封闭的，即当 $a, b \in F$ 时，$a \pm b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}\,(b \neq 0) \in F$。

一个数域必含有 $0, 1$ 两个元素。

容易验证：$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ 是数域，$\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 不是数域。

§1.9 求和符号

求和符号

设 $a_1, a_2 \cdots, a_n$ 为 n 个数，通常我们用 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 表示和式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。其中 $\sum$ 为**求和符号**，i 为**求和指标**，$\sum$ 的上下标表示求和指标 i 的取值范围。

（在数学、物理、化学、生物等学科中，书写符号也是非常重要的，可以简化描述，帮助我们思考！）

注意：求和指标是可以替换的，不影响求和符号的值，与积分变量类似。

求和符号性质:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i. \qquad \text{(其中 } \lambda \text{ 为常数)}$$

若视求和符号为作用于 n 数组向量空间上的映射，则求和符号是线性映射。

§1.9 求和符号

多重求和：从内向外对每个求和符号逐次求和，例如：

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj})$$
$$= \sum_{j=1}^{m} a_{1j} + \sum_{j=1}^{m} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} a_{nj}.$$

容易看出：$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$

性质：在多重求和时，可以交换求和符号的次序。

思考：与积分符号有什么相似与不同之处?

§1.9 求和符号

条件求和：不是对所有的项求和，而只是对满足一定条件的项求和，例如：

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} = a_{11} + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23} + a_{33}) + \cdots + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$$

注意：带变量范围的求和不可轻易交换求和指标！

§1.9 求和符号

一般求和：设 Λ 为一个有限集，Λ 中每个元素 λ 对应了一个数 a_λ，我们将所有 $a_\lambda\,(\lambda\in\Lambda)$ 的和记为 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$。

乘积符号：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一列数，我们用 $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ 表示乘积 $a_1, a_2, \cdots a_n$。

乘积符号的上下标的含义等与求和符号完全一样。

Thanks for your attention!