线性代数 (B1)

童伟华　管理科研楼 1205 室 [1]

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

[1] 数学科学学院　中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期　MATH1009.08

§3.1 矩阵的定义

矩阵是线性代数的基本研究对象与工具。

定义 3.1

对任意正整数 m 和 n，由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

称为一个 $m\times n$ *矩阵*，记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$。表中的每个数称为矩阵 A 的*元素*；排在第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 称为 A 的*第 (i,j) 元素*；当 $i=j$ 时，a_{ii} 也称为 A 的*对角元*。

§3.1 矩阵的定义

常用大写字母如 A, B, C 表示矩阵。

两个矩阵 A 与 B 是**相等**的，如果它们的行数和列数都相等并且每个位置上的元素都相等，记作 $A = B$。

常见的矩阵名称及记号:

- 元素都是 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 O 或 0。
- $n \times n$ 矩阵称为 n 阶**方阵**。
- 对角元是 1 其它元素都是 0 的 n 阶方阵称为**单位阵**，记作 I、I_n 或 $I^{(n)}$。
- 对角元是 a 其它元素都是 0 的方阵称为**数量阵**，记作 aI。

§3.1 矩阵的定义

常见的矩阵名称及记号:

- 若方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素除对角元外都为零，则称 A 为**对角阵**，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}).$$

- 若矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 满足 $a_{ij}=0$ 对所有 $i>j$ 成立，则 A 称为**上三角阵**。
- 若矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 满足 $a_{ij}=0$ 对所有 $i<j$ 成立，则 A 称为**下三角阵**。
- 上三角阵和下三角阵统称为**三角阵**。

常见的矩阵名称及记号：

- 若方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}$ 对所有 i,j 成立，则 A 称为**对称阵**。
- 若方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ 对所有 i,j 成立，则 A 称为**反对称阵**。
- 若矩阵 A 的元素都是整数、有理数、实数、复数、多项式等，则 A 分别称为整数矩阵、有理数矩阵、实矩阵、复矩阵、多项式矩阵。一般地，若 A 的元素都取自某个数域 F，则 A 称为**数域 F 上的矩阵**。数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵的全体，记作 $F^{m\times n}$。

§3.1 矩阵的定义

矩阵的概念是向量的一个自然推广：行向量

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

可视为 1 行 n 列的矩阵；列向量

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

可视为 n 行 1 列的矩阵。在向量的意义下，行向量 $\mathbf{a}$ 与列向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 表示同一个向量，但是在矩阵的意义下，它们表示不同的矩阵。

§3.1 矩阵的定义

反之，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 也可以视为向量，譬如 A 既可以被看作是 m 个行向量按列排在一起

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ i=1,2,\ldots,m,$$

又可以被看作 n 个列向量按行排在一起

$$\left(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right),\ \mathbf{b}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ j=1,2,\ldots,n,$$

§3.1 矩阵的定义

还可以被看作是将一个 mn 维的数组向量排在一起

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

或

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}, \cdots, a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn})^{\mathrm{T}}.$$

矩阵自身没有特殊的含义，如何灵活的解释矩阵是学习线性代数的关键之一!

§3.2 矩阵的运算

矩阵的基本运算：加法 + 数乘，线性运算。

矩阵的乘法、求逆：学习线性代数的关键之一！

矩阵的初等变换、分块运算：初等变换 $\Leftrightarrow$ 矩阵乘法，利用矩阵的结构进行分块

矩阵的转置、共轭、迹等。

§3.2.1 加法与数乘

定义 3.2

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$\lambda\in F$。定义

$$A+B:=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A:=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

分别称为矩阵的*加法*运算和*数乘*运算。

§3.2.1 加法与数乘

记作：$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，　$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$。

类似地，可以定义矩阵的**减法**运算和**负矩阵**

$A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$，　$-A=(-a_{ij})_{m\times n}$。

矩阵的加法与减法只对规格相同的矩阵才有定义。

§3.2.1 加法与数乘

定理 3.1

矩阵的加法和数乘运算具有下列性质：

- 加法交换律 $A+B=B+A$
- 加法结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$
- 有零矩阵 $A+O=O+A=A$
- 有负矩阵 $A+(-A)=(-A)+A=O$
- 左分配律 $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- 右分配律 $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- 数乘结合律 $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
- 数乘单位元 $1A=A$

其中 A,B,C 是使运算有意义的矩阵，λ,μ 是数。

§3.2.1 加法与数乘

第 (i,j) 元素是 1，其它元素全是 0 的 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \uparrow & \\ 第\ j\ 列 & \end{array}$$

称为**基本矩阵**，记作 E_{ij}。

每个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 都可以通过矩阵的加法和数乘唯一地表示成为

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

§3.2.2 矩阵的乘法

线性映射

设 U, V 为数域 F 上的线性空间，映射 $\mathcal{A}: U \mapsto V$，若映射 $\mathcal{A}$ 满足:

(1) $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U,$

(2) $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U, \lambda \in F,$

则称 $\mathcal{A}$ 为线性空间 U 到线性空间 V 的**线性映射**。

线性映射（变换）是线性代数的主要研究对象之一!

§3.2.2 矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，按如下方式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

定义映射 $\mathcal{A}: F^{n\times 1}\mapsto F^{m\times 1}$，其中

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in F^{n\times 1},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\in F^{m\times 1},$$

不难验证 $\mathcal{A}$ 为线性映射，简记为：$\mathbf{y}=A\mathbf{x}$。

反之，当线性空间 U, V 取定一组基后，可以证明：任意 U 到 V 的线性映射$\mathcal{A}$ 都可以表示成 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 形式。

若有矩阵 $B = (b_{jk})_{n\times l}$，按如下方式

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1l}z_l, \\ x_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2l}z_l, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nl}z_l, \end{cases}$$

定义线性映射 $\mathcal{B} : F^{l\times 1} \mapsto F^{n\times 1}$, $\mathbf{x} = B\mathbf{z}$。

§3.2.2 矩阵的乘法

将线性映射 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 进行复合，即 $\mathbf{y} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\mathbf{z})$, 则可定义新的线性映射 $\mathcal{C} : F^{l\times 1} \mapsto F^{m\times 1}$，问题：映射 $\mathcal{C}$ 写成 $\mathbf{y} = C\mathbf{z}$ 的形式是怎样的?

按定义 $\mathbf{y} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{z}) = C\mathbf{z}$，如何写成:

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1l}z_l, \\ y_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2l}z_l, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \cdots + c_{ml}z_l. \end{cases}$$

的形式?

§3.2.2 矩阵的乘法

$$
\begin{aligned}
y_i &= a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \\
&= a_{i1}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{1k}z_k\right) + \cdots + a_{in}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{nk}z_k\right) \\
&= (a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{in}b_{n1})z_1 + \cdots + (a_{i1}b_{1n} + \cdots + a_{in}b_{nn})z_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}
\end{aligned}
$$

§3.2.2 矩阵的乘法

定义 3.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times l}\in F^{n\times l}$，定义 A 与 B 的**乘积**为 $m\times l$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1l}+a_{12}b_{2p}+\cdots+a_{1n}b_{nl} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1l}+a_{m2}b_{2l}+\cdots+a_{mn}b_{nl} \end{pmatrix}$$

记作 $C:=(c_{ij})_{m\times l}=AB$，其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和。

§3.2.2 矩阵的乘法

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \rightarrow \\ \mathbf{a}_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l \end{pmatrix}_{1\times l} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_l \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_l \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j,\ \mathbf{a}_i \in F^{1\times n},\ \mathbf{b}_j \in F^{n\times 1}$$

线性代数 (B1)
童伟华
第三章矩阵与行列式
§3.1 矩阵的定义
§3.2 矩阵的运算
§3.3 行列式
§3.4 逆矩阵
§3.5 秩与相抵

行向量的线性组合 $\Leftrightarrow$ 行变换

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \boldsymbol{\beta}_1 \\ \leftarrow \boldsymbol{\beta}_2 \\ \quad\vdots \\ \leftarrow \boldsymbol{\beta}_n \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n \\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix}$$

§3.2.2 矩阵的乘法

列向量的线性组合 $\Leftrightarrow$ 列变换

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \quad & \uparrow \quad & & \uparrow \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}_{1\times n} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}_{n\times l}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_k b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_k b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_k b_{kl} \end{pmatrix}$$

§3.2.2 矩阵的乘法

另外，我们还可视矩阵乘法为：

$$AB = A\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_l\end{pmatrix}$$

其中 $A \in F^{m\times n}$, $\mathbf{b}_i \in F^{n\times 1} \Rightarrow A\mathbf{b}_i \in F^{m\times 1}$, $i = 1, 2, \ldots, l$

思考：如何证明上述公式的正确性?

AB 的每一列都是 A 的列向量组的线性组合，组合系数为 B 对于列的元素；AB 的每一行都是 B 的行向量组的线性组合，组合系数为 A 对于行的元素。

§3.2.2 矩阵的乘法

矩阵乘法注意事项:

- 仅当 A 的列数等于 B 的行数时，A 与 B 才可以相乘;
- 矩阵乘法不满足交换律，甚至不一定有定义;
- $AB = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A = \mathbf{0}$ 或 $B = \mathbf{0}$;
- $AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C$;
- $IA = AI = A$, $\mathbf{0}A = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\lambda A = (\lambda I)A$。

§3.2.2 矩阵的乘法

定理 3.2

矩阵的乘法运算具有以下性质：

(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

(2) 乘法单位元 $IA = AI = A$

(3) 左分配律 $(A+B)C = AC + BC$

(4) 右分配律 $A(B+C) = AB + AC$

(5) 数乘结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

其中 A, B, C 是使运算有意义的矩阵，λ 是数。

乘法结合律 $\Leftrightarrow$ 映射的复合满足结合律

§3.2.2 矩阵的乘法

方阵的幂

通过矩阵的乘法，可以定义任意方阵 A 的**正整数次幂**

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

对任意方阵 A（包括零方阵），规定 $A^0 = I$。

矩阵多项式

设多项式 $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$，定义**矩阵多项式**

$$f(A) = c_0 I + c_1 A + \cdots + c_k A^k.$$

矩阵的乘法是矩阵**最重要**的运算！

利用矩阵的乘法，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可写成简洁的形式：$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

定义 3.4

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换，得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的**转置矩阵**，记作 $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$。

§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

定义 3.5

将复矩阵 A 的每个元素换成它的共轭复数，得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

称为 A 的**共轭矩阵**，记作 $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{m\times n}$。

共轭转置：$A^H = (\overline{A})^{\mathrm{T}} = \overline{(A^{\mathrm{T}})}$

§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

定义 3.6

n 阶方阵 A 的对角元之和

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

称为 A 的**迹**，记作 $\operatorname{tr}(A)$。

定理 3.3

矩阵的转置运算具有以下性质：

(1) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

(2) $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$;

(3) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$;

其中 A, B 是使运算有意义的矩阵，λ 是数。

$$\Rightarrow (A_1 A_2 \cdots A_n)^{\mathrm{T}} = A_n^{\mathrm{T}} \cdots A_2^{\mathrm{T}} A_1^{\mathrm{T}}$$

§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

定理 3.4

矩阵的迹具有以下性质：

(1) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$；

(2) $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{tr}(A)$；

(3) $\mathrm{tr}(A^T)=\mathrm{tr}(A)$，$\mathrm{tr}(\overline{A})=\overline{\mathrm{tr}(A)}$；

(4) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，

其中 A,B 是使运算有意义的矩阵，λ 是数。

§3.2.4 矩阵的分块运算

将矩阵视为行向量组或列向量组:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \mathbf{a}_1 \\ \leftarrow \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{a}_m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{array} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ 是否有更一般形式的划分?

§3.2.4 矩阵的分块运算

分块矩阵

给定矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，可将 A 用水平线与竖直线分成若干块，

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

称为**分块矩阵**，记作 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，每个 $A_{ij}\in F^{m_i\times n_j}$ 称为 A 的**子块**。

水平线之间的间距：$m_1,m_2,\ldots,m_r$，满足 $m_1+m_2+\cdots+m_r=m$；
竖直线之间的间距：$n_1,n_2,\ldots,n_s$，满足 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$。

§3.2.4 矩阵的分块运算

普通矩阵可视为分块矩阵的特殊情况，即 A_{ij} 仅含一个元素 a_{ij}。

分块可以是任意的，但一般情形下，都是带有目的地：发掘矩阵的特殊结构，譬如零矩阵块，单位阵块，数量阵块，对称块等。

若 $A_{ij}=O$ 对所有 $i\neq j$ 成立，则称 A 为**准对角阵**，记作

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{rr} \end{pmatrix} \quad 或 \quad A=\mathrm{diag}(A_{11},A_{22},\cdots,A_{rr}).$$

若 $A_{ij}=O$ 对所有 $i>j$ 成立，则 A 称为**准上三角阵**。
若 $A_{ij}=O$ 对所有 $i<j$ 成立，则称 A 为**准下三角阵**。
准上三角阵和准下三角阵统称为**准三角阵**。

§3.2.4 矩阵的分块运算

子矩阵

由 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列上的元素依次排列组成的 $r \times s$ 矩阵称为 A 的**子矩阵**，记作

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_r \\ j_1 j_2 \cdots j_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}.$$

§3.2.4 矩阵的分块运算

定理 3.5

矩阵的分块运算具有以下性质：

(1) 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，$B=(B_{ij})_{r\times s}$，则 $A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{r\times s}$；

(2) 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，则 $\lambda A=(\lambda A_{ij})_{r\times s}$；

(3) 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，$B=(B_{ij})_{s\times t}$，则 $AB=(C_{ij})_{r\times t}$，其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj},$$

其中矩阵 A,B 的分块方式使运算有意义，λ 是数。

矩阵的分块乘法：要求 A 的列的分块方式与 B 的行的分块方式相同，即 A_{ik} 的列数与 B_{kj} 的行数相同。

§3.2.4 矩阵的分块运算

定理 3.6

矩阵的分块运算具有以下性质：

(1) 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，则 $A^T=(A_{ji}^T)_{s\times r}$；

(2) 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ 是复方阵，则 $\overline{A}=(\overline{A_{ij}})_{r\times s}$；

(3) 设 $A=(A_{ij})_{r\times r}$ 且每个 A_{ii} 都是方阵，则 $\mathrm{tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{r}\mathrm{tr}(A_{ii})$，

其中矩阵 A,B 的分块方式使运算有意义，λ 是数。

在对矩阵施行分块运算时，可把每个矩阵块看作是一个元素进行运算，然后再对每个矩阵块施行同样的运算。

§3.2.5 初等变换与初等矩阵

三种初等行（列）变换

(1) 交换矩阵的两行（列）;

(2) 将某行（列）乘以一个非零常数;

(3) 将某行（列）的常数倍加到另一行（列），

以上变换称为矩阵的*初等行（列）变换*，初等行变换与初等列变换统称为矩阵的*初等变换*。

矩阵乘法的背景是线性映射，问题：初等行（列）变换是否可以用矩阵乘法表示?

§3.2.5 初等变换与初等矩阵

初等方阵

对单位方阵施行初等变换，得到的方阵称为*初等方阵*。

交换单位阵的第 i,j 行（或交换第 i,j 列）：

$$S_{ij} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

§3.2.5 初等变换与初等矩阵

将单位阵的第 i 行（或第 i 列）乘以非零数 λ:

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \tag{2}$$

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

将单位阵的第 j 行的 λ 倍加到第 i 行（或将第 i 列的 λ 倍加到第 j 列）:

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && \lambda && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \tag{3}$$

§3.2.5 初等变换与初等矩阵

定理 3.7

对矩阵作初等行变换，相当于在矩阵的左边乘上一个相应的初等方阵；对矩阵作初等列变换，相当于在矩阵的右边乘上一个相应的初等方阵。

解释：初等行变换 $A \quad \Leftrightarrow \quad A$

$AI = A$

初等列变换类似。

如果对矩阵施行一系列初等行变换与初等列变换，目标是使得矩阵具有尽可能简单的形式，那么最终的形式是怎样的?

定理 3.8

对任意矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，存在一系列 m 阶初等方阵 $P_1,\dots,P_s$ 和 n 阶初等方阵 $Q_1,\dots,Q_t$，使得

$$P_s\cdots P_1\ A\ Q_1\cdots Q_t=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 r 为非负整数。

二阶行列式：平行四边形的有向面积

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

三阶行列式：平行六面体的有向体积

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

问题：n 维数组空间

$F^n := \{\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in F,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ 中的向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 张成的平行多面体的有向体积是多少?

§3.3.1 行列式的定义

行列式有很多等价定义：递归定义，展开式定义，几何定义……

几何定义方式：把有向面积、有向体积所具有的本征性质推广到一般的 n 维数组空间。

有向面积、有向体积的本征性质：多重线性性、反对称性、规范性。

D1：多重线性性

若记 $\Delta_2 = \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$，则

$$\det(\lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_2) + \mu \det(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2),$$

$$\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta}) = \lambda \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}) + \mu \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}),$$

对任意的 $\lambda, \mu \in F$ 都成立。

推广：$\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{\eta}_i + \mu\boldsymbol{\xi}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) =$
$\lambda \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) + \mu \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\lambda, \mu \in F$ 对 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都成立。

§3.3.1 行列式的定义

D2：反对称性

$$\det(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) = -\det(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \ \forall \boldsymbol{\alpha}$$

推广：

$\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_j, \dots, \boldsymbol{\alpha}_i, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = -\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_i, \dots, \boldsymbol{\alpha}_j, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$,
对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$ 都成立。

$$\Longleftrightarrow \quad \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}, \dots, \boldsymbol{\alpha}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = 0, \ \forall \boldsymbol{\alpha}$$

§3.3.1 行列式的定义

D3：规范性

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$$

推广：$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$, 其中

$$\mathbf{e}_i = (0, \cdots, \overset{\substack{i\\ \downarrow}}{1}, \cdots, 0),\ i = 1, 2, \ldots, n。$$

§3.3.1 行列式的定义

定义 3.7

设 F^n 为 n 维数组空间，$\det : \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{n} \mapsto F$ 且满足 D_1, D_2, D_3 性质，则称 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 n 阶行列式。

$\Longleftrightarrow$ 行列式：F^n 上的规范反对称 n 重线性函数（可证明这样的函数存在且唯一！）

§3.3.1 行列式的定义

定理 3.9

行列式具有以下性质：

(1) D4：若某一向量 $\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$，则 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = 0$；

(2) D5：若 $\boldsymbol{\alpha}_j = k\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i \neq j)$，则 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = 0$；

(3) D6：对 $\forall i \neq j$ 有，$\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_i + \lambda\boldsymbol{\alpha}_j, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_j, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$
$= \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_j, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$。

代数上：若有向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \in F^{n\times 1}$ 的坐标表示，那么 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 的解析表达式是什么？

§3.3.2 排列的奇偶性

定义 3.8

将 n 个两两不同的正整数 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 按顺序排成的一个有序数组称为一个**排列**，记做 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$。满足 $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ 的排列称为**顺序排列**。满足 $i < j$ 且 $s_i > s_j$ 的一对数 (s_i, s_j) 称为 s 的一个**逆序**。s 的逆序的个数称为 s 的**逆序数**，记作 $\tau(s)$。逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。

$\tau(s_1, s_2, \ldots, s_n) = s_1$后面比$s_1$小的数的个数 $+$
s_2后面比s_2小的数的个数 $+ \cdots + s_{n-1}$后面比s_{n-1}小的数的个数

§3.3.2 排列的奇偶性

互换 s 中 i,j 位置的两个数 s_i 与 s_j 称为一次*对换*。

下面研究自然数 $1,2,\ldots,n$ 的排列，称 $(1,2,\ldots,n)$ 为*标准排列*。

命题 3.10

对换具有以下性质：

(1) 任一排列经过一次对换，必改变其奇偶性；

(2) 任意 n 元排列 $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ 都可经过有限次对换变成标准排列 $(1,2,\ldots,n)$；同一排列 $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ 变成标准排列所经历的对换次数 s 不唯一，但是 s 的奇偶性是确定的且与排列的奇偶性相同。

§3.3.2 排列的奇偶性

对每个排列 $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 引入奇偶性符合:

$$
\operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (-1)^{\tau(j_1 j_2, \cdots, j_n)}
= \begin{cases} 1, & \text{当}(j_1, j_2, \ldots, j_n)\text{为偶排列;} \\ -1, & \text{当}(j_1, j_2, \ldots, j_n)\text{为奇排列.} \end{cases}
$$

利用排列的奇偶性记号，行列式的解析表达式或展开式是什么?

§3.3.3 方阵的行列式

设 $\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i \ (j = 1, 2, \ldots, n)$（视为列向量），则

$$\det(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = \det\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\Big)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n})$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}),$$

再利用 $\det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) = (-1)^{\tau(i_1, i_2, \ldots, i_n)}$，可得

$$\det(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}.$$

思考：若 $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j \ (i = 1, 2, \ldots, n)$（视为行向量），则 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 表达式是什么？是否与上式相等?

§3.3.3 方阵的行列式

定义 3.9

设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称 A 的行向量组（列向量组）张成 n 平行多面体的有向体积为矩阵 A 的**行列式**，记作

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n) = \det(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n) \\
&= |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \\
&= \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2}\cdots a_{n j_n}
\end{aligned}
$$

展开式的项数：$n!$

§3.3.3 方阵的行列式

定理 3.11

方阵的行列式具有以下性质：

(1) $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$；

(2) 当方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为上角阵时，则

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(3) 当准上角阵 $A = (A_{ij})_{k\times k}$ 的每个对角块 A_{ii} 都是方阵时，则

$$\det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{kk} \end{vmatrix} = \det(A_{11})\det(A_{22})\cdots\det(A_{kk})。$$

§3.3.3 方阵的行列式

定理 3.12

对于任意两个 n 阶方阵 A 和 B，有 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$。

更为一般地，我们有

（Binet-Cauchy 公式）

设 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times m}$，则 $\det(AB) =$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n} \det\left(A\begin{pmatrix} 12\cdots m \\ j_1j_2\cdots j_m \end{pmatrix}\right)\det\left(B\begin{pmatrix} j_1j_2\cdots j_m \\ 12\cdots m \end{pmatrix}\right), & \text{当} m < n; \\ \det(A)\det(B), & \text{当} m = n; \\ 0, & \text{当} m > n. \end{cases}$$

技巧 1

利用初等变换，将方阵化为上三角阵、下三角阵或对角阵。

例 3.1

计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

§3.3.4 行列式的计算

例 3.2

计算 Vandermonde 行列式

$$\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

§3.3.4 行列式的计算

技巧 2

利用行列式的Laplace 展开，将高阶行列式 $\Rightarrow$ 低阶行列式。

定义 3.10

任意矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的 k 阶子矩阵 $A\binom{i_1 i_2\cdots i_k}{j_1 j_2\cdots j_k}$ 的行列式，即 $\left|A\binom{i_1 i_2\cdots i_k}{j_1 j_2\cdots j_k}\right|$，称为 A 的k **阶子式**，简称**子式**。

定义 3.11

删去 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的第 i 行和第 j 列之后，剩下的 $n-1$ 阶子矩阵的行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**余子式**。
$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

§3.3.4 行列式的计算

定理 3.13

(Laplace 展开定理) 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\ \forall j=1,2,\ldots n$ (按某一列展开)；

$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\ \forall i=1,2,\ldots n$ (按某一行展开)。

更为一般地，我们有

定理 3.14

(Laplace 展开定理) 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，取定行指标 $1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n$ (列展开情形类似)，则

$$\det(A)=\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_p\\ j_1\cdots j_p\end{pmatrix}\right|\left[(-1)^{i_1+\cdots+i_p+j_1+\cdots+j_p}\left|A\begin{pmatrix}i_{p+1}\cdots i_n\\ j_{p+1}\cdots j_n\end{pmatrix}\right|\right].$$

§3.3.4 行列式的计算

定理 3.15

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则某一行（列）与另一行（列）相应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0,\ \forall i\neq j$（按某一行展开）；

$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0,\ \forall i\neq j$（按某一列展开）。

§3.3.4 行列式的计算

定义 3.12

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，引入

$$A^* := (A_{ji})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，称 A^* 为 A 的**伴随方阵**。

利用 Laplace 展开定理 $\Rightarrow\ AA^* = A^*A = \det(A)I$

§3.3.4 行列式的计算

例 3.3

设 $n \geq 2$，计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & x & a_{n-2} \\ & & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

§3.3.4 行列式的计算

例 3.4

设 $n \geq 2$，计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & & & \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta & \alpha+\beta & \alpha \\ & & & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

§3.3.4 行列式的计算

技巧 3

将方阵分解成若干矩阵的乘积，利用 Binet-Cauchy 公式或一些恒等式来计算行列式。

例 3.5

计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ & \cdots & \cdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

§3.3.4 行列式的计算

例 3.6

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，证明：

$$\det(I_n - BA) = \det(I_m - AB).$$

更为一般地，有 $\lambda^m\det(\lambda I_n - BA) = \lambda^n\det(\lambda I_m - AB)$.

延伸：计算下列 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ & \cdots & \cdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

§3.3.4 行列式的计算

技巧 4

视行列式 $\det(A)$ 为某些元素的多项式，确定 $\det(A)$ 的次数 m，求出 $\det(A)$ 的 m 个根 $r_1, r_2, \ldots, r_m$，再利用 $\det(A) = c(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_m)$，确定常数 c 即可。

例 3.7

计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

§3.4 逆矩阵

矩阵乘法的逆运算 — 除法： $A/B = A\,B^{-1}$

$$A_{m\times n}\,B_{n\times l} = C_{m\times l} \;\Rightarrow\; A_{m\times n} = C_{m\times l}\,B^{-1}_{l\times n}$$

$n = l$：方阵的逆，何时存在？是否唯一？

$n \neq l$：广义逆，一般不唯一！

§3.4.1 逆矩阵的定义

定义 3.13

设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 X 满足

$$XA = AX = I,$$

则称 A **可逆**，并称 X 为 A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1}。

可逆方阵也称为**非奇异**方阵，称不可逆方阵为**奇异**方阵。

§3.4.1 逆矩阵的定义

定理 3.16

方阵 A 可逆的充分必要条件是 $\det(A) \neq 0$。当 A 可逆时，A 有唯一的逆矩阵 $\frac{1}{\det(A)}A^*$。

思考：对于方阵，定义中的 $AX = XA = I$ 是否可用 $AX = I$（右逆）或 $XA = I$（左逆）来取代?

§3.4.1 逆矩阵的定义

定理 3.17

对任意 n 阶可逆方阵 A, B，都有

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$；

(2) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$, $\lambda \neq 0$；

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

(4) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$；

(5) 当 $A_1, \cdots, A_r$ 都可逆时，

$$(\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_r))^{-1} = \mathrm{diag}(A_1^{-1}, \ldots, A_r^{-1})。$$

$$\Rightarrow (A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

§3.4.1 逆矩阵的定义

定理 3.18

初等方阵具有下列性质：

(1) S_{ij} 为对称方阵，且 $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$；

(2) $D_i(\lambda)$ 为对角方阵，且 $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$；

(3) $T_{ij}(\lambda)$ 为三角方阵，且 $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$。

初等矩阵：可逆且其逆仍为初等矩阵 $\Rightarrow$ 若干初等矩阵的乘积为可逆矩阵；反之，是否正确？

定理 3.19

方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以分解为一系列初等方阵的乘积。

§3.4.2 逆矩阵的计算

技巧 1

利用恒等式$AA^* = A^*A = \det(A)I \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$。

计算量：行列式 $\det(A)$，A^* 中有 n^2 个 $(n-1)\times(n-1)$ 行列式。

理论解，仅适用于 A 的阶数较小或 A 的行列式及余子式较易计算的情形。

例 3.8

设 n 方阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}。

§3.4.2 逆矩阵的计算

技巧 2

利用初等变换:

$$\left(A \vdots I\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(I \vdots A^{-1}\right)$$

或求解 n 个线性方程组 $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$。

$$PA = I \;\Rightarrow\; A^{-1} = P \;\Rightarrow\; PI = A^{-1}$$

思考: 是否可以利用初等列变换? 如果可以, 怎么做?

§3.4.2 逆矩阵的计算

例 3.9

设 n 方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}。

§3.4.2 逆矩阵的计算

技巧 3

利用矩阵的分块运算。

例 3.10

设有分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix},$$

求 M 可逆的条件并算出 M^{-1}。

§3.4.2 逆矩阵的计算

Schur 公式

设 $A \in F^{r\times r}$, $B \in F^{r\times(n-r)}$, $C \in F^{(n-r)\times r}$, $D \in F^{(n-r)\times(n-r)}$，并且 A 可逆，则

(1) $\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$。

技巧 4

构造矩阵恒等式，通过矩阵运算直接求出 A^{-1}。

$A^m = 0$（幂零方阵） $\Rightarrow$ $I - A$ 可逆，并且

$(I-A)(I+A+\cdots+A^{m-1}) = I - A^m = I$

$\Rightarrow (I-A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{m-1}.$

$A^2 = A$（幂等方阵） $\Rightarrow$ $I + A$ 可逆，并且

$(A+I)(A-2I) = -2I$

$\Rightarrow (I+A)^{-1} = I - \frac{1}{2}A.$

思考：例 3.9 如何构造矩阵恒等式?

§3.4.3 Cramer 法则

利用行列式及逆运算，如何给出求解线性方程组的公式解?

定理 3.20 (Cramer 法则)

当系数矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式不等于零时，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

存在唯一解 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)^{\mathrm{T}}$，其中 $\Delta=\det(A)$，Δ_i 是将 A 的第 i 列换成 $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 后所得方阵的行列式，$i=1,2,\ldots,n$。

§3.4.3 Cramer 法则

Cramer 法则：理论解，运算量非常大，仅适用于阶数较小或相关行列式较易计算的情形。

例 3.11

设 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 为各不相同的常数，$y_1 = f(t_1), y_2 = f(t_2), \ldots,$ $y_n = f(t_n)$，试构造多项式 $l_1(t), l_2(t), \ldots, l_n(t)$ 使得

$$f(t) = y_1 l_1(t) + y_2 l_2(t) + \cdots + y_n l_n(t),$$

对任意次数不超过 $n-1$ 次的多项式 $f(t)$ 都成立。

$\Rightarrow$ Lagrange 插值多项式

§3.5.1 秩与相抵的定义

定义 3.14

设 A, B 是 $m \times n$ 矩阵，如果存在可逆方阵 P 和 Q 使得

$$B = PAQ,$$

则称 A 和 B **相抵**。

A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow$ 可以通过一系列初等变换将 A 化为 B。

§3.5.1 秩与相抵的定义

等价关系

在集合 M 上定义二元关系 $\sim$，即 $E \subset M \times M$，若其满足性质:

(1) （自反性）$x \sim x$;

(2) （对称性）$x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

(3) （传递性）$x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$,

则称 $\sim$ 为集合 M 上的*等价关系*。

不难验证：相抵是矩阵集合 $F^{m\times n}$ 上的一种等价关系。

§3.5.1 秩与相抵的定义

等价类

利用等价关系 $\sim$，可以对集合 M 进行分类，

$$\bar{x} = \{y \in M \mid y \sim x\} \subset M,$$

称集合 $\bar{x}$ 为包含元素 x 的等价类。任意元素 $y \in \bar{x}$ 都称为等价类 $\bar{x}$ 的代表元。

命题 3.21

由关系 $\sim$ 确定的等价类的集合 $X = \{\bar{x} \mid x \in M\}$ 是集合 M 的一个划分，即

$$M = \bigcup_{\bar{x} \in X} \bar{x} \text{ 且 } \bar{x} \bigcap \bar{y} = \emptyset, \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in X,$$

也就是说 M 是这些子集的不交并。

§3.5.1 秩与相抵的定义

等价类的基本问题:

(1) 等价类的代表元是什么?(譬如最简形式的代表元)

(2) 等价类的不变量有哪些?(不变量指该等价类中所有元素都相等的量,是判别等价的必要条件,主要用于判别不等价)

(3) 等价类的全系不变量有哪些?(全系不变量指该等价类中所有元素都相等的量,且不同等价类的全系不变量必不相等,是判别等价的充要条件)

本课程将研究矩阵集合上的三类重要等价关系:相抵、相似、相合!

§3.5.1 秩与相抵的定义

与矩阵 A 相抵的等价类的最简形式代表元是什么?

定理 3.22

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 A 相抵于 $m\times n$ 矩阵 $\mathrm{diag}(I_r,\mathbf{0})$，即存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中非负整数 r 由 A 唯一决定。

$\Rightarrow$ 相抵标准形

§3.5.1 秩与相抵的定义

定义 3.15

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，式（4）中的矩阵 $\mathrm{diag}(I_r, \mathbf{0})$ 称为 A 的**相抵标准形**。整数 r 称为矩阵 A 的**秩**，记为 $\mathrm{rank}(A)$ 或 $r(A)$。若 $r = m$，则 A 称为是**行满秩**的；若 $r = n$，则 A 称为是**列满秩**的。

显然有：$0 \leqslant \mathrm{rank}(A) \leqslant \min\{m, n\}$

§3.5.1 秩与相抵的定义

定理 3.23

设 $A, B \in F^{m\times n}$，则 A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$。

$\Rightarrow$ 矩阵的秩是相抵等价关系下的不变量，且是全系不变量。

定理 3.24

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，P, Q 分别是 m, n 阶可逆方阵，则 $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank}(A)$。

$\Rightarrow$ 初等变换不改变矩阵的秩！

引理 3.1

设 A 是 $m \times n$ 方阵，P, Q 分别是 m, n 阶初等方阵。若 A 的所有 k 阶子式都为零，则 PA 与 AQ 的所有 k 阶子式也为零。

定理 3.25

矩阵 A 有 k 阶非零子式的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(A) \geqslant k$。

$\Rightarrow$ 矩阵 A 的秩等于矩阵 A 的非零子式的最大阶数，即矩阵 A 至少有一个 r 阶非零子式，且 A 的所有 $r+1$ 阶子式都为 0，则称 A 的秩为 r。

思考：矩阵秩的几何含义是什么？

§3.5.1 秩与相抵的定义

定理 3.26

矩阵的秩具有以下性质：

(1) $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}(A)$；

(2) $\operatorname{rank}(A \vdots B) \geqslant \max\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$；

(3) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$；

(4) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \geqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$；

(5) $\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}(A \vdots B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$。

§3.5.2 秩的计算

技巧 1

利用定义，找矩阵的最高阶非零子式。

例 3.12

计算 n 阶方阵 A 的秩，这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

§3.5.2 秩的计算

技巧 2

利用初等变换，将矩阵化为上三角阵、下三角阵或对角阵，求出矩阵的秩。

例 3.13

计算 n 阶方阵 A 的秩，这里

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

§3.5.3 相抵标准形的应用

例 3.14

每个秩为 r 的矩阵都可以写成 r 个秩是 1 的矩阵之和。

例 3.15

若 $m \times n$ 矩阵 A 是列满秩的，则 A 是某个 m 阶可逆方阵的前 n 列。

§3.5.3 相抵标准形的应用

例 3.16

（Frobenius 秩不等式）设矩阵 $A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{n\times l}$，$C \in F^{l\times p}$，则 $\operatorname{rank}(ABC) \geqslant \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$.

例 3.17

设矩阵 $A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{n\times l}$，证明:

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \leqslant \operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

§3.5.3 相抵标准形的应用

例 3.18

设矩阵 A 满足 $A^2 = A$，证明：$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{tr}(A)$。

Thanks for your attention!