线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

线性代数 (B1)

童伟华　管理科研楼 1205 室 [1]
E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

[1] 数学科学学院　中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期　MATH1009.08

§5.1.1 线性变换的定义

线性映射：线性空间到线性空间保持线性结构的映射！

定义 5.1

设 V, V' 为数域 F 上的两个线性空间，若映射 $\mathcal{A}: V \to V'$ 满足：对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\lambda \in F$，都有

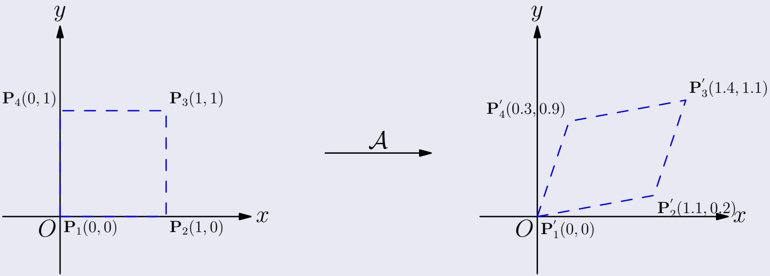
$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}), \tag{1}$$

$$\mathcal{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

则称 $\mathcal{A}$ 为从线性空间 V 到线性空间 V' 的**线性映射**。特别地，如果 $V' = V$，则称 $\mathcal{A}$ 为线性空间 V 上的一个**线性变换**。

例 5.1

取 $V(F)=\mathbb{R}^2$，$A=\begin{pmatrix}1.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.9\end{pmatrix}$，定义线性变换 $\mathcal{A}:\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$。



思考：长度如何变化？面积如何变化？线性关系如何变化？（共性、比例等）

§5.1.1 线性变换的定义

例 5.2

把每个向量映为自身的变换

$$\mathcal{E} : \mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in V,$$

是线性变换，称为*单位变换*或*恒等变换*。

例 5.3

把空间的每个向量都映为零向量的变换

$$\mathcal{O} : \mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} \in V,$$

是一个线性变换，称为*零变换*。

例 5.4

设映射 $\mathcal{A}: F^n \to F^m$ 由矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$ 按如下方式定义：

$$\boldsymbol{y}=\mathcal{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}\in F^n,$$

则 $\mathcal{A}$ 是线性映射。如果 $m=n$，则 $\mathcal{A}$ 是线性变换。特别地，如果 $A=I$，则 $\mathcal{A}$ 为单位变换；如果 $A=\mathbf{0}$，则 $\mathcal{A}$ 为零变换。

§5.1.1 线性变换的定义

例 5.5

设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，则

(1) 反射变换：$(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\to(x_1,-x_2)^{\mathrm{T}}$ 是线性变换，可写成

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2;$$

(2) 旋转变换：$(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\to(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta,x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)^{\mathrm{T}}$ 是线性变换，可写成

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2。$$

例 5.6

设 $\mathbb{P}_n[x]$ 是次数不超过 n 的多项式全体，$\mathcal{A}$ 为微分算子

$$\mathcal{A}(p(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x),$$

由微分的性质知 $\mathcal{A}$ 为线性变换。

§5.1.1 线性变换的定义

例 5.7

用 $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上所有实值连续函数构成的集合，映射 $\mathcal{A}: C[a,b] \to C[a,b]$ 定义为

$$\mathcal{A}(f(x)) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $K(x,t)$ 是区域 $[a,b]\times[a,b]$ 上的实值连续函数，由积分的性质知 $\mathcal{A}$ 为线性变换。

§5.1.2 线性变换的性质

命题 5.1

设 V 是数域 F 上的线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换。$\mathcal{A}$ 具有以下性质

(1) $\mathcal{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$；

(2) $\mathcal{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha}\in V$；

(3) $\mathcal{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n)=\lambda_1\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\lambda_n\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$；

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为线性空间 V 的一组基，则
$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n\Rightarrow\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_1\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\lambda_n\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$；

(5) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 V 中线性相关的向量，则
$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_m)$ 也线性相关。

设 V 为 n 维线性空间，$\mathcal{A}: V \to V$ 为线性变换，在 V 中取定一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) \in V,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_2) = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n) = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

定义 5.2

设 $\mathcal{A}: V(F) \to V(F)$ 为 n 维线性空间 $V(F)$ 上的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $V(F)$ 的一组基。如果数域 F 上的 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)A,$$

则称方阵 A 为线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的*表示矩阵*，简称*矩阵*。

容易看出：A 的第 i 列为向量 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标，$i = 1, 2, \ldots, n$ 。

§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

定理 5.2

设线性变换 $\mathcal{A}: V \to V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A。设 $x, y \in V$ 且 $y = \mathcal{A}(x)$，若 x, y 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标分别为 $X, Y \in F^n$，则 $Y = AX$。

$\Rightarrow$ 线性变换 $\mathcal{A}$ 的像可以通过矩阵与向量的乘法来计算！

§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

$L(V)$：数域 F 上 n 维线性空间 V 上的全体线性变换所构成的集合

$M_n(F)$：数域 F 上的 n 阶方阵构成的集合

定理 5.3

设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为 V 的一组基，则存在一一映射 $\Phi: L(V) \to M_n(F)$，使得 $\forall \mathcal{A} \in L(V)$，$\Phi(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵。

$$\Rightarrow L(V) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} M_n(F)$$

§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

$L(V)$ 与 $M_n(F)$ 是否同构?

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$, $\lambda \in F$，定义 $L(V)$ 中的加法与数乘运算:

(1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) := \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in V;$

(2) $\lambda\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) := \lambda\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in V, \lambda \in F,$

及复合运算: $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})), \quad \forall \boldsymbol{x} \in V.$

定理 5.4

设 $\Phi : L(V) \to M_n(F)$ 为定理5.3中定义的映射，则

(1) $\Phi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A}) + \Phi(\mathcal{B})$；

(2) $\Phi(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\Phi(\mathcal{A})$；

(3) $\Phi(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = \Phi(\mathcal{B}) \cdot \Phi(\mathcal{A})$,

对 $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$，$\lambda \in F$ 成立。(1) 与 (2) $\Rightarrow$ Φ 为线性同构映射。

线性空间的维数是唯一的，而基是不唯一的！$\Rightarrow$ 同一线性变换在不同基下的表示之间有什么关系?

设线性空间 V 有两组基：$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，线性变换 $\mathcal{A}$ 在这两组基下的表示分别为矩阵 A 与 B

$$\Rightarrow (\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\ldots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)A$$

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_1),\ldots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_n)) = (\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)B$$

而 $(\boldsymbol{\beta},\ldots,\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)T$，从而有

$$\Rightarrow (\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_1),\ldots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_n)) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n) = \mathcal{A}[(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)T]$$

$$= [\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\ldots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)]T = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)AT$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)B = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)AT$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)TB = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)AT$$

$$\Rightarrow TB = AT \Rightarrow B = T^{-1}AT$$

§5.2.2 线性变换在不同基下的矩阵

定理 5.5

设线性变换 $\mathcal{A}: V \to V$ 在 V 的两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 下的矩阵分别为 A 和 B。设基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 T，即 $(\beta, \ldots, \beta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)T$，则 $B = T^{-1}AT$。

§5.2.3 矩阵的相似

定义 5.3

设 A, B 为数域 F 上的两个 n 阶方阵，如果存在数域 F 上的 n 阶可逆方阵 T，使得 $B = T^{-1}AT$，则称 A 与 B（在数域 F 上）*相似*，记为 $A \sim B$。

命题 5.6

矩阵的相似关系为等价关系，即满足以下三个条件

(1) (*反身性*) $A \sim A$；

(2) (*对称性*) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$；

(3) (*传递性*) $A \sim B$，$B \sim C \Rightarrow A \sim C$。

$\Rightarrow$ 按相似关系对 n 阶方阵的全体 $F^{n\times n}$ 进行分类

$\Rightarrow$ 核心问题：(1) 不变量；(2) 全系不变量；(3) 代表元。

§5.2.3 矩阵的相似

代数上：一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的 $\Rightarrow$ 属于该相似类的所有方阵，是否都是该线性变换在不同基下对应的矩阵呢？（回答是肯定的！）

几何上：一个线性空间上的线性变换的性质与该空间的基的选取没有关系 $\Rightarrow$ 相似的矩阵都具有的性质，即**相似不变量**

§5.3.1 特征值与特征向量的定义

一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的，选取适当的基可使线性变换的矩阵变得简单 $\Rightarrow$ 给到一个方阵，如何找到一个尽量简单的方阵与之相似呢？（Jordan 标准形，理论分析与证明比较困难）

问题：矩阵相似于对角矩阵的条件？

设 $A \sim \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Rightarrow$ 存在 n 阶可逆方阵 X，使得 $A = T\Lambda T^{-1}$。记 $T = (\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)$，则

$$AT = T\Lambda \Rightarrow A(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)\Lambda = (\lambda_1\boldsymbol{t}_1, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{t}_n)$$

$$\Rightarrow A\boldsymbol{t}_i = \lambda_i\boldsymbol{t}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

关键：找到 n 个满足 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 和向量 $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$。

§5.3.1 特征值与特征向量的定义

定义 5.4

设 $\mathcal{A}$ 为数域 F 上的 n 阶方阵，如果存在 $\lambda \in F$ 及非零列向量 $\mathbf{x} \in F^n$，使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x},$$

则称 λ 为方阵 $\mathcal{A}$ 的一个**特征值**，而称 $\boldsymbol{x}$ 为属于特征值 λ 的一个**特征向量**。

几何解释：向量 $\boldsymbol{x}$ 在线性变换 $\mathcal{A}$ 下保持方向不变（相同或相反），长度伸缩 λ 倍。

§5.3.1 特征值与特征向量的定义

在一般的 n 维线性空间 V 上，可以定义

定义 5.5

设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 为 V 上的线性变换。如果存在 $\lambda \in F$ 及非零向量 $\alpha \in V$ 满足 $\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha$，则称 λ 为线性变换 $\mathcal{A}$ 的一个**特征值**，α 称为属于特征值 λ 的一个**特征向量**。

命题 5.7

特征向量有如下性质：

(1) 若 α 是线性变换 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量 $\Rightarrow \mu\alpha$ 亦是线性变换 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，$\forall \mu \neq 0 \in F$；

(2) 若 α 与 β 是线性变换 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量 $\Rightarrow \alpha + \beta$ 亦是线性变换 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量；

(3) 线性变换 $\mathcal{A}$ 属于不同特征值的特征向量线性无关。

§5.3.1 特征值与特征向量的定义

特征子空间

设 λ 是方阵 A 的特征值，引入

$$V_A(\lambda) = \{\, \boldsymbol{x} \in F^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \,\}.$$

易知 $V_A(\lambda)$ 是 F^n 的子空间，称为矩阵 A 的属于特征值 λ 的**特征子空间**。

特征子空间：特征向量 + 零向量

取定 n 维线性空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$：
线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量 $\Leftrightarrow$ 矩阵 A 的特征值与特征向量
$\Rightarrow$ 可以通过代数的方法求解特征值与特征向量，即矩阵 A 的特征值与特征向量！

§5.3.2 特征值与特征向量的计算

λ 为方阵 A 的特征值

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$

定义 5.6

设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵，$\lambda \in F$，称 $\det(\lambda I - A)$ 为矩阵 A 的**特征多项式**，记为 $p_A(\lambda)$。

为确保特征值的存在性，除非特别说明，我们总假设 $F = \mathbb{C}$（当 F 取 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}$ 时，特征值与特征向量问题更困难！）

§5.3.2 特征值与特征向量的计算

求解特征值与特征向量的算法：

(1) 计算特征多项式 $p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$;

(2) 计算 $p_A(\lambda)$ 的根 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 及重数 $n_1,n_2,\ldots,n_s$，即

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s};$$

(3) 对每个特征值 λ_i $(i=1,2,\ldots,s)$，求齐次线性方程组

$$(\lambda_i I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系：$\boldsymbol{x}_{i1},\boldsymbol{x}_{i2},\ldots,\boldsymbol{x}_{im_i}$，即 $V_{\lambda_i}=\langle\boldsymbol{x}_{i1},\boldsymbol{x}_{i2},\ldots,\boldsymbol{x}_{im_i}\rangle$。

$\Rightarrow$ 主要困难：求解 n 次多项式 $p_A(\lambda)$ 的根！（事实上，可以证明，当 $n\geqslant 5$ 时，一般的多项式方程是根式不可解的，即根不能通过有限次加减乘除及开根号表示出来。）

例 5.8

求矩阵 A 的全部特征值和特征向量，这里

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.9

设 $\boldsymbol{x}$ 是方阵 A 的属于 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{x}$ 也是 kA，A^2，$aA+bI$，A^m，$f(A)$，A^{-1}，A^* 分别属于于特征值 $k\lambda$，λ^2，$a\lambda+b$，λ^m，$f(\lambda)$，λ^{-1}，$\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量，其中 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$。

§5.3.2 特征值与特征向量的计算

若 $A \sim B \Rightarrow$ 存在可逆方阵 T，使得 $B = T^{-1}AT$

$$
\begin{aligned}
\text{设 } p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \Rightarrow p_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - T^{-1}AT) \\
&= \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \det(\lambda I - A) \\
&= p_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

命题 5.8

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值。

$\Rightarrow$ 特征多项式和特征值是相似不变量，但不为全系不变量。

例 5.10

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B 的特征值相同，但 A 与 B 不相似。

思考：特征向量是相似不变量吗？（否定的！）

记 $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow c_1 = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii},\ c_n = (-1)^n \det(A).$$

更为一般地，有

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda^{n-1} + \Big(\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \left|A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \\ i_1 i_2 \end{pmatrix}\right|\Big)$$

$$+ \cdots + (-1)^k\Big(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \left|A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_k \\ i_1 i_2 \ldots i_k \end{pmatrix}\right|\Big) + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

命题 5.9

设 $A=(a_{ij})$ 为数域 $\mathbb{C}$ 上的一个 n 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值，则

(1) $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$；

(2) $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

推论 5.1

n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的 n 个特征值均不为零。

Cayley-Hamilton 定理

设 $A\in F^{n\times n}$ 的特征多项式为 $p_A(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n$，则 $p_A(A)=A^n+c_1A^{n-1}+\cdots+c_nI=\mathbf{0}$。

§5.3.2 特征值与特征向量的计算

命题 5.10

设 $A, B \in F^{n\times n}$，且 $A \sim B$，则

(1) $A^{\mathrm{T}} \sim B^{\mathrm{T}}$，$A^{-1} \sim B^{-1}$（若 A，B 均可逆），$A^* \sim B^*$；

(2) $A^k \sim B^k$；

(3) $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$；

(4) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$；

(5) $\det(A) = \det(B)$；

(6) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$。

$\Rightarrow$ 矩阵的秩、行列式、迹均为相似不变量！

例 5.11

已知矩阵 A 与 B 相似，求 x 和 y。这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 5.12

设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，求 $I + A$ 的特征值及 $\det(I + A)$。

例 5.13

设方阵 A 满足 $A^k = \mathbf{0}$，证明：$\det(I - A) = 1$。

例 5.14

设 A 为 n 阶实矩阵满足 $AA^{\mathrm{T}} = I$，且 $|A| < 0$，试求 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值。

相似等价类的代表元? $\Rightarrow$ 对角阵或准对角阵

例 5.15

证明 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 不能相似于对角阵。

$\Rightarrow$ 相似等价类的代表元是准对角阵，即 Jordan 标准形

问题：满足什么条件的矩阵能相似于对角阵?

§5.4.1 相似于对角阵的充要条件

定义 5.7

如果一个方阵相似于对角阵，则称该方阵*可对角化*，也称相应的线性变换*可对角化*。

定理 5.11

数域 F 上的 n 阶方阵 A 相似于对角阵 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量。

推论 5.2

如果矩阵 A 的 n 个互不相同的特征值，则 A 相似于对角阵。

§5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

相似对角化条件是否有更细致的刻画?

代数重数

设 $A \in F^{n\times n}$ $(F=\mathbb{C})$，A 的特征多项式

$$p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}\ (n_1+\cdots+n_s=n),$$

其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ 为 A 的所有不同特征值，则称 n_i 为特征值 λ_i 的**代数重数**。

几何重数

特征值 λ_i 的特征子空间 $V_A(\lambda_i)$ 的维数，即线性方程组 $(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数，称为特征值 λ_i 的**几何重数**。

§5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

引理 5.1

设 $\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{im_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ 是 A 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量组，则 $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1m_1}, \boldsymbol{x}_{21}, \boldsymbol{x}_{22}, \ldots, \boldsymbol{x}_{2m_2}, \ldots,$ $\boldsymbol{x}_{s1}, \boldsymbol{x}_{s2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{sm_s}$ 也是线性无关的向量组。

引理 5.2

设 λ_i 为 n 阶复方阵 A 的特征值，则它的几何重数不超过它的代数重数，即 $m_i \leqslant n_i$。

定理 5.12

复方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 的每个特征值的几何重数与代数重数相等，即 $m_i = n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$。

例 5.16

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵，求 X 和 y 应满足的条件。

例 5.17

设 n 阶方阵 A 满足 $\operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)=n$，证明 $A^2=I$。

§5.4.3 相似于上三角阵

对任意的方阵 $A \in C^{n\times n}$，需要满足一定条件才能相似于对角阵 $\Rightarrow$
问题：是否可以相似于上三角阵?

定理 5.13

任何一个 n 阶复方阵 A 都可以相似于一个上三角阵，即

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值。

注意：复方阵 A 总可以相似于上三角阵，但这些上三角阵可以是不唯一的！ $\Rightarrow$ 不能作为相似等价类的代表元

例 5.18

求与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 相似的上三角阵。

例 5.19

设 x, y, z 都是 t 的函数，求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2x - y + z, \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 2x + 2y - z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x + 2y - z. \end{cases}$$

§5.4.3 相似于上三角阵

常用数学软件：MATLAB（数值计算）、Mathematica、Maple（符号计算）

For Mathematica:

```
A := {{2, -1, 1}, {2, 2, -1}, {1, 2, -1}}
SchurDecomposition[N[A]]//MatrixForm
JordanDecomposition[A]//MatrixForm
```

For MATLAB:

```
A = [2, -1, 1; 2, 2, -1; 1, 2, -1]
[U, T] = schur(A)
[V, T] = jordan(A)
```

§5.5.1 若尔当标准形的定义

相似等价类的代表元？—— 若尔当标准形（Jordan canonical form）

定义 5.8

设 λ 是任意复数，m 是任意正整数，形如

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{m\times m}$$

的 m 阶方阵称为*若尔当块*，记作 $J_m(\lambda)$，其中 λ 是对角线元素，也是特征值。因此 $J_m(\lambda)$ 也称为特征值为 λ 的 m 阶若尔当块。

定义 5.9

如果一个方阵是准对角阵，并且每个对角块都是若当块，则称之为*若当形矩阵*。

注意：一个若当形矩阵的某些若当块可能具有相同的特征值。例如矩阵

$$\operatorname{diag}\left(J_4(2), J_3(2), J_1(2), J_3(5)\right)$$

是一个若当形矩阵。

§5.5.1 若尔当标准形的定义

定理 5.14

任何一个复方阵 A 都相似于一个若当形矩阵 J，即

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中 $J_i = \mathrm{diag}(J_{m_{i1}}(\lambda_i), \ldots, J_{m_{ik_i}}(\lambda_i))$，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是 A 的 s 个不同特征值。如果不计若当块的排列顺序，则 J 是唯一的。

（证明见参考书籍，比较难，代数：λ-矩阵方法，几何：根子空间、循环子空间）

§5.5.2 若尔当标准形的计算

求复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵 A 的若尔当标准形的算法:

(1) 求出 A 的特征多项式和全部特征值:
$p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$, $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$;

(2) 对每个特征值 λ_i, 计算序列 $A-\lambda_i I, (A-\lambda_i I)^2, (A-\lambda_i I)^3, \ldots$,
记 $r_k = \operatorname{rank}(A-\lambda_i I)^k$, $k \geqslant 0$, 约定 $r_0 = n$,

$$d_k = r_{k-1} - r_k, \quad k \geqslant 1,$$

$$\delta_k = d_k - d_{k+1}, \quad k \geqslant 1,$$

则 $d_k = J$ 中特征值为 λ_i 的阶大于等于 k 的若尔当块的个数,
$\delta_k = J$ 中特征值为 λ_i 的阶等于 k 的若尔当块的个数;

(3) 依据 δ_k, $k \geqslant 1$, 写出 A 的若尔当标准形。

§5.5.2 若尔当标准形的计算

例 5.20

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的若当标准形。

问题：如何求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = J$?

有两种方法：（1）待定系数法；（2）几何方法。

§5.5.3 若尔当标准形的应用

例 5.21

证明：n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$ 的充要条件是 A 相似于准对角阵 $\mathrm{diag}(I_r, 0)$，这里 $r = \mathrm{rank}(A)$。

例 5.22

设 x, y, z 都是 t 的函数，求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -4x + 9y - 4z, \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -9y + 18y - 8z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -15x + 29y - 13z. \end{cases}$$

§5.6 Google 搜索排序

常用搜索引擎：Google，Baidu 等。主要用途：输入一个关键词，搜索引擎在很短时间内找到与关键词相关的网页，并按照重要性将所有网页排序。

著名的 PageRank 算法：1998 年，斯坦福大学的两位博士生 Sergey Brin 与 Lawrence Page 在 WWW 国际会议论文集上发表了一篇学术论文[1]，讨论网页搜索与排序问题，并据此创立了 Google 公司。

[1] Sergey Brin and Lawrence Page. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine. Proceedings of the Seventh International Conference on World Wide Web, pp. 107–117. 1998.

Google 公司的创始人

§5.6 Google 搜索排序

Google 公司创立的历史

- 1995 年秋天，Larry Page 进入斯坦福大学后，师从 Terry Winograd 教授攻读博士学位；Sergey Brin 是斯坦福大学计算机系研二学生；
- 1996 年，Page 建立了一个实验用的搜索引擎，称为 BackRub，对 1000 万份网页进行分析 + 网络爬虫工具（下载网页）；
- 随后，Brin 加入 Page 的团队
- 随着 BackRub 用户的不断增加，Page 和 Brin 意识到 BackRub 的价值，准备出售，然而却无人问津；
- 决定：自己干！—— Google

§5.6 Google 搜索排序

Google 公司创立的历史

- Google：本是一数学名词，代表 1 后面 100 个零，体现了 Google 公司整合网上海量信息的远大目标；
- 1998 年 9 月，Google 公司在一个车库中诞生了；
- 创业风险：当年 Brin 把创业计划告诉导师时，他的导师非常支持，表示如果创业不成功还可回来继续读书，于是两个人都办理了休学手续专心创业！
- 优势：数学 + 算法；

§5.6 Google 搜索排序

截至 2022 年 5 月 11 日，Google 最新市值 15090.78 亿美元！

§5.6 Google 搜索排序

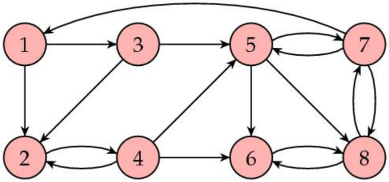
数学模型：

- 研究：互联网复杂的数学结构；
- 模型：图（Graph）；
- 建模：在互联网中，每台计算机就是一个结点，而两个页面之间的链接则是连接两个结点的连线；
- 问题：如何评价网页的重要性?

基本思路:

- Page 和 Brin 共同开发了一套网页评级系统 PageRank: 当从网页 A 链接到网页 B 时，系统就认为 “网页 A 投了网页 B 一票”。系统根据网页的得票数评定其重要性;
- 除了考虑网页得票数（即链接）的纯数量之外，系统还要分析投票的网页。“重要”的网页所投出的票就会有更高的权重，并且有助于提高其它网页的 “重要性”。

PageRank 的数学模型



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{pmatrix}$$

§5.6 Google 搜索排序

设互联网上有 N 个网页，每个网页的重要性为 $I(P)$，则

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}, \ i = 1, 2, \ldots, N,$$

其中 B_i 表示所有指向 P_i 的网页集合，l_j 表示 P_j 指向网页的个数。

记 $H = (h_{ij})_{N\times N}$，其中

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, & \text{if } P_j \in B_i, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_N) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_N) \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = H\boldsymbol{x}$$

矩阵 H 满足如下性质:

- 每个元素 h_{ij} 非负;
- 每一列的元素之和为 1，即 $\sum_{j=1}^{N} h_{ij} = 1\ (i = 1, 2, \ldots, N)$,

称满足上述性质的矩阵 H 为**列随机矩阵**。

矩阵 H 的每个元素 h_{ij} 可解释为从网页 P_i 到网页 P_j 的访问概率，此时称 H 为**概率转移矩阵**。

$\Rightarrow$ PageRank：求矩阵 H 属于特征值 1 的特征向量!

随机过程理论（概率解释）：Markov 随机过程

特征向量 $\boldsymbol{x}$：稳定分布向量

如何计算：（幂法，Power method）

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = H\boldsymbol{x}^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

问题：

- 迭代是否收敛?
- 迭代是否与初值的选取有关?
- 稳定分布向量 $\boldsymbol{x}$ 是否包含我们需要的信息?

幂法：用于求矩阵按摸最大的特征值及相应的特征向量

收敛的一个充分条件：有 N 个线性无关的特征向量且特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \cdots \geqslant |\lambda_N|,$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \boldsymbol{x}^0 &= c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_N\boldsymbol{v}_N,\\
\Rightarrow \boldsymbol{x}^1 &= H\boldsymbol{x}^0 = c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_N\lambda_N\boldsymbol{v}_N,\\
\Rightarrow \boldsymbol{x}^2 &= H\boldsymbol{x}^1 = c_1\lambda_1^2\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_N\lambda_N^2\boldsymbol{v}_N,\\
&\vdots\\
\Rightarrow \boldsymbol{x}^k &= H\boldsymbol{x}^{k-1} = c_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_N\lambda_N^k\boldsymbol{v}_N,\\
&= \lambda_1^k\left[c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_N\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{v}_N\right],\\
&\approx \lambda_1^k c_1\boldsymbol{v}_1.
\end{aligned}$$

容易看出：收敛速度取决于 $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$

§5.6 Google 搜索排序

在幂法中，当 $k \to +\infty$ 时，$\boldsymbol{x}^k \to \begin{cases} 0, & |\lambda_1| < 1, \\ \infty, & |\lambda_1| > 1. \end{cases}$，从而导致 $\boldsymbol{x}^k$ 的分量过大（上溢）或过小（下溢）。

在实际运算中，采用如下带规范运算的幂法

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{k+1} = A\boldsymbol{y}^k, \\ \boldsymbol{y}^{k+1} = \dfrac{\boldsymbol{x}^{k+1}}{\| \boldsymbol{x}^{k+1} \|_\infty}, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

异常的例子 1:

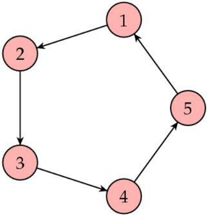
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

原因：含有悬空的节点（不包含任何链接的节点）

修正：将悬空节点所在列的每个 h_{ij} 值改为 $\frac{1}{N}$，即网民浏览到悬空节点后，他（她）可以随机任意打开一个新的页面 P_j。

$$S = H + A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}，\text{其中 } A \text{ 为修正矩阵} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

异常的例子 2:



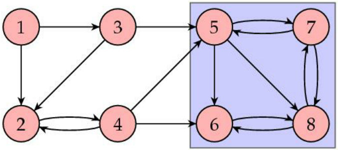
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

问题: $|\lambda_2| = 1$，导致幂法不收敛

满足 $1 > |\lambda_2|$ 的一个充分条件: 矩阵 S 是*素的*（Primitive），即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 S^m 的所有元素都是正的。

§5.6 Google 搜索排序

异常的例子 3:



$$S=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac12&0&\frac12&\frac13&0&0&0&0\\ \frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\frac12&\frac13&0&0&\frac12&0\\ 0&0&0&\frac13&\frac13&0&0&\frac12\\ 0&0&0&0&\frac13&0&0&\frac12\\ 0&0&0&0&\frac13&1&\frac12&0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0.1200&0.2400&0.2400&0.4000\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

问题：大的网络包含了一个小的网络，小网络内的节点没有出去的链接，导致节点 P_1, P_2, P_3, P_4 的重要性为 0。

满足重要性都是正数的一个充分条件：矩阵 S 是**不可分析**（Irreducible），即不存在置换方阵 P 使得 $P^{-1}SP$ 是准上角矩阵。

§5.6 Google 搜索排序

PageRank 模型:

$$G = \omega S + (1-\omega)\frac{1}{N}\mathbf{1} = \omega H + \omega A + (1-\omega)\frac{1}{N}\mathbf{1},$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示元素全为 1 的 n 阶方阵，$\omega \in [0,1]$ 为权重，Google 搜索引擎取 $\omega = 0.85$。

模型的概率解释：假设互联网有 N 个网页 $P_1, P_2, \ldots, P_N$，网民在每个时刻只能打开一个网页。他（她）有可能随机点击当前网页中的某个链接，跳转到新的网页；也有可能关闭当前页面，再随机打开一个网页。假设他点击链接的概率是 ω，则关闭当前页面的概率是 $1-\omega$。在无限长时间后的某个时刻，网页 P_j 被访问的概率 $p_j = I(P_j)$ 就被定义为它的 PageRank。

§5.6 Google 搜索排序

数学工具：随机过程理论

容易验证：G 是列随机矩阵且 G 的所有元素都是正的
$\Rightarrow$ G 是不可分拆的素矩阵!

注意：对于互联网来说，N 非常大!
$\Rightarrow$ 计算特征向量仍然是非常耗时的!

The size of the World Wide Web (The Internet): [2]

The Indexed Web contains at least 2.46 billion pages (Tuesday, 10 May, 2022).

[2] http://www.worldwidewebsize.com/

Thanks for your attention!