线性代数 (B1)

童伟华　管理科研楼 1205 室 [1]
E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

[1] 数学科学学院　中国科学技术大学

2024-2025 学年第一学期　MATH1009.02

§2 线性方程组

线性方程组

称由变量都为一次的方程所组成的方程组为**线性方程组**。

例如:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

§2 线性方程组

定义 2.1

一般地，具有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，由 m 个方程组成的线性方程组具有如下形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

其中，a_{ij} 是第 i 个方程中第 j 个变量 x_j 的*系数*，b_i 是第 i 个方程的*常数项*。假设系数 a_{ij}、常数项 b_i 及方程组的解 x_j 均属于某个数域 F。如果常数项都为零，则称相应的线性方程组为*齐次线性方程组*。否则，称为*非齐次线性方程组*。

§2 线性方程组

定义 2.2

若将 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 代入上述方程等式都成立，则称 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 为该方程组的**一组解**。线性方程组解的全体称为该方程组的**解集**。如果解集非空，则称线性方程组是**相容**的; 否则，称线性方程组**不相容**.

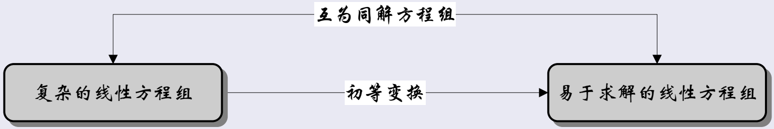
§2 线性方程组

基本问题

- 线性方程组是否存在解？如果有解，有多少个解？
- 如何求线性方程组的解？
- 解的公式表示；
- 解集的几何结构；
- 线性方程组的解是否符合实际的需要（可行解问题）？

§2.1 Gauss 消元法

基本想法



哪些形式的线性方程组是易于求解的?

何谓“互为同解方程组”?

初等变换有哪些?

§2.1 Gauss 消元法

初等变换

- 交换两个方程 $(i) \leftrightarrow (j)$
- 某个方程乘一个非零常数 $\lambda(i),\ \lambda \neq 0$
- 某方程乘一个常数加到另一个方程 $\lambda(i) \rightarrow (j)$

*初等变换*是学好线性代数的关键之一！

§2.1 Gauss 消元法

如果两个线性方程组有相同的解，则称它们为*同解方程组*。

命题 2.1

三种初等变换将线性方程组变为同解线性方程组，因此不会产生增根也不会丢根。

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

现象：变元不参与运算，只是变元的系数与常数项参与运行（变元可替换）$\Rightarrow$ 是否可以省去变元?

矩阵

由若干行及若干列的数构成的阵列称为*矩阵*

*矩阵*是线性代数中最常用的术语与记号!

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

采用矩阵的表示，线性方程组可写成：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程组的**增广矩阵**

线性方程组的初等变换 $\Rightarrow$ 矩阵的初等行变换

记号：$r_i \leftrightarrow r_j$（互换第 i 与第 j 两行），λr_i（第 i 行乘非零常数 λ），$\lambda r_i \to r_j$（第 i 行乘 λ 加到第 j 行）

§2.3.1 算法描述

Algorithm 1 高斯消元法

Input:

n, (a_{ij}), (b_i)

for $k = 1$ to $n-1$ **do**
    for $i = k+1$ to n **do**
        $z \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$;
        $a_{ik} \leftarrow 0$;
        for $j = k+1$ to n **do**
            $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - z a_{kj}$;
        end for
        $b_i \leftarrow b_i - z b_k$;
    end for
end for
for $i = n$ to 1 step -1 **do**
    $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j)/a_{ii}$;
end for

Output:

(x_i)

§2.3.1 算法描述

Gauss 消元法的可行性：消元过程中主对角元非零，即 $a_{kk} \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$（否则，进行行交换）

最简形式或标准形式

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \ldots & 0 & c_{2j_2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & c_{rj_r} & \ldots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{11}, c_{2j_2}, \ldots, c_{rj_r}$ 均非零。

思考：若允许列交换，形式如何?

§2.3.2 线性方程组解的属性

利用最简形式，判断线性方程组解的存在、唯一及有多个解的条件。

定理 2.2

线性方程组 (1) 的解的属性如下：

- 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时，线性方程组 (1) 无解；
- 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$ 时，线性方程组 (1) 有唯一解；
- 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$ 时，线性方程组 (1) 有多解。

当 $d_{r+1}=0$ 且 $r<n$ 时，对应的线性方程组为：

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\dots \quad \cdots\cdots \quad +c_{1n}x_n=d_1 \\ c_{2j_2}x_{j_2}+ \quad \cdots\cdots \quad +c_{2n}x_n=d_2 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ c_{rj_r}x_{j_r}+\dots \quad +c_{rn}x_n=d_r \end{cases}$$

除变量 $x_{j_1},\dots,x_{j_r}$ $(j_1=1)$ 外，其余变量（共有 $n-r$ 个）是独立的，可以在数域 F 中任意取值。

§2.3.2 线性方程组解的属性

通解

$$\begin{cases} x_1 = & \alpha_{11}t_1 + \ldots + \alpha_{1,n-r}t_{n-r} + \beta_1 \\ x_2 = & \alpha_{21}t_1 + \ldots + \alpha_{2,n-r}t_{n-r} + \beta_2 \\ \vdots & \\ x_n = & \alpha_{n1}t_1 + \ldots + \alpha_{n,n-r}t_{n-r} + \beta_n \end{cases}$$

其中 $t_1, \ldots, t_{n-r}$ 为参数，
$\alpha_{ij}, \beta_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-r$。

将参变量 $t_1, \cdots, t_{n-r}$ 取定一组值代入，得到的解称为一个**特解**。

§2.3.2 线性方程组解的属性

向量形式:

$$\mathbf{x} = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_{n-r}\alpha_{n-r} + \beta,$$

其中,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n-r, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

§2.3.2 线性方程组解的属性

对于齐次线性方程组，由于总有 $d_{r+1}=0$，故线性方程组总有解。特别地，$x_1=0,\cdots,x_n=0$ 就是齐次线性方程组的一组解，我们称之为*零解*或*平凡解*。齐次线性方程组的非零解称为*非平凡解*。

推论 2.1

齐次线性方程组有非零解的充要条件为 $r<n$。

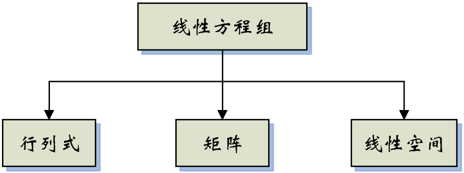
推论 2.2

若 $m<n$，则齐次线性方程组一定有非零解。

§2.3.2 线性方程组解的属性

尚未解决的问题:

- 如何从原方程组直接判别解的存在性、唯一性及多解性?
- 如何从原方程组直接确定 r?
- r 是否唯一?
- 解集的大小与 r 有何关系?
- 直接从原方程获得公式解。



Thanks for your attention!