



线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

线性代数 (B1)

童伟华 管理科研楼 1205 室¹

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

¹ 数学科学学院 中国科学技术大学

2024-2025 学年第一学期 MATH1009.02



§5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

线性映射：线性空间到线性空间保持线性结构的映射！

定义 5.1

设 V, V' 为数域 F 上的两个线性空间，若映射 $\mathcal{A}: V \rightarrow V'$ 满足：对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda \in F$ ，都有

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}), \quad (1)$$

$$\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

则称 \mathcal{A} 为从线性空间 V 到线性空间 V' 的线性映射。特别地，如果 $V' = V$ ，则称 \mathcal{A} 为线性空间 V 上的一个线性变换。



§5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

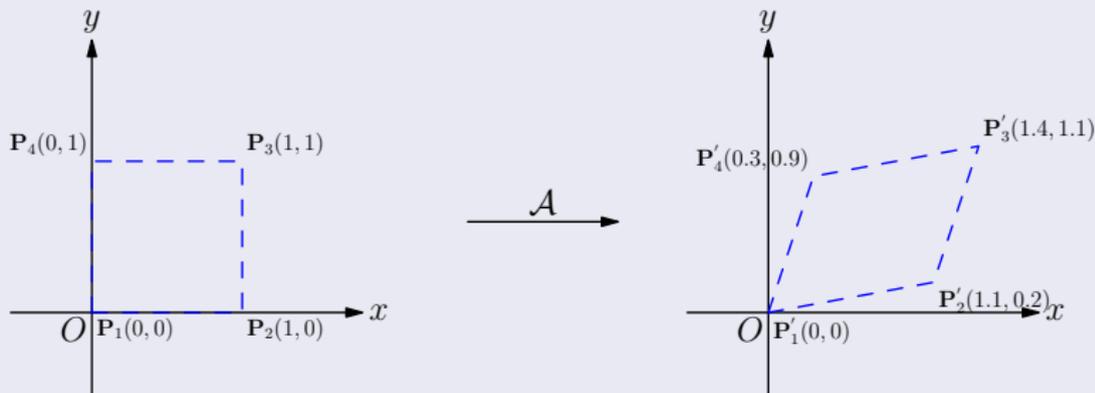
§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.1

取 $V(F) = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$, 定义线性变换 $\mathcal{A} : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.



思考：长度如何变化？面积如何变化？线性关系如何变化？（共性、比例等）



§5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.2

把每个向量映为自身的变换

$$\mathcal{E} : \mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in V,$$

是线性变换, 称为单位变换或恒等变换。

例 5.3

把空间的每个向量都映为零向量的变换

$$\mathcal{O} : \mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in V,$$

是一个线性变换, 称为零变换。



§5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.4

设映射 $\mathcal{A}: F^n \rightarrow F^m$ 由矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in F^{m \times n}$ 按如下方式定义:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in F^n,$$

则 \mathcal{A} 是线性映射。如果 $m = n$, 则 \mathcal{A} 是线性变换。特别地, 如果 $A = I$, 则 \mathcal{A} 为单位变换; 如果 $A = \mathbf{0}$, 则 \mathcal{A} 为零变换。



§5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.5

设 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 则

(1) 反射变换: $(x_1, x_2)^T \rightarrow (x_1, -x_2)^T$ 是线性变换, 可写成

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2;$$

(2) 旋转变换: $(x_1, x_2)^T \rightarrow (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^T$ 是线性变换, 可写成

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$



§5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.6

设 $\mathbb{P}_n[x]$ 是次数不超过 n 的多项式全体, \mathcal{A} 为微分算子

$$\mathcal{A}(p(x)) = \frac{d}{dx} p(x),$$

由微分的性质知 \mathcal{A} 为线性变换。



§5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向
量

§5.4 矩阵的相似对角
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.7

用 $C[a, b]$ 表示闭区间 $[a, b]$ 上所有实值连续函数构成的集合, 映射 $\mathcal{A} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 定义为

$$\mathcal{A}(f(x)) = \int_a^b K(x, t)f(t) dt,$$

其中 $K(x, t)$ 是区域 $[a, b] \times [a, b]$ 上的实值连续函数, 由积分的性质知 \mathcal{A} 为线性变换。



§5.1.2 线性变换的性质

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

命题 5.1

设 V 是数域 F 上的线性空间, \mathcal{A} 是 V 上的线性变换。 \mathcal{A} 具有以下性质

(1) $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

(2) $\mathcal{A}(-\alpha) = -\mathcal{A}(\alpha)$, $\alpha \in V$;

(3) $\mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n) = \lambda_1\mathcal{A}(\alpha_1) + \cdots + \lambda_n\mathcal{A}(\alpha_n)$;

(4) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基, 则

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \Rightarrow \mathcal{A}(\alpha) = \lambda_1\mathcal{A}(\alpha_1) + \cdots + \lambda_n\mathcal{A}(\alpha_n);$$

(5) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为 V 中线性相关的向量, 则 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \dots, \mathcal{A}(\alpha_m)$ 也线性相关。



§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定义 5.2

设 $\mathcal{A}: V(F) \rightarrow V(F)$ 为 n 维线性空间 $V(F)$ 上的线性变换, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 $V(F)$ 的一组基。如果数域 F 上的 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足

$$(\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A,$$

则称方阵 A 为线性变换 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的表示矩阵, 简称矩阵。

容易看出: A 的第 i 列为向量 $\mathcal{A}(\alpha_i)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标, $i = 1, 2, \dots, n$ 。



§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定理 5.2

设线性变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A 。

设 $x, y \in V$ 且 $y = \mathcal{A}(x)$, 若 x, y 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标分别为 $X, Y \in F^n$, 则 $Y = AX$ 。

⇒ 线性变换 \mathcal{A} 的像可以通过矩阵与向量的乘法来计算!



§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

$L(V)$: 数域 F 上 n 维线性空间 V 上的全体线性变换所构成的集合
 $M_n(F)$: 数域 F 上的 n 阶方阵构成的集合

定理 5.3

设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一组基, 则存在一一映射 $\Phi: L(V) \rightarrow M_n(F)$, 使得 $\forall A \in L(V)$, $\Phi(A)$ 为 A 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵。

$$\Rightarrow L(V) \xrightarrow{1-1} M_n(F)$$



§5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

$L(V)$ 与 $M_n(F)$ 是否同构?

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$, $\lambda \in F$, 定义 $L(V)$ 中的加法与数乘运算:

$$(1) (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{x}) := \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V;$$

$$(2) \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) := \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V, \lambda \in F,$$

及复合运算: $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in V.$

定理 5.4

设 $\Phi: L(V) \rightarrow M_n(F)$ 为定理5.3中定义的映射, 则

$$(1) \Phi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A}) + \Phi(\mathcal{B});$$

$$(2) \Phi(\lambda \mathcal{A}) = \lambda \Phi(\mathcal{A});$$

$$(3) \Phi(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = \Phi(\mathcal{B}) \cdot \Phi(\mathcal{A}),$$

对 $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$, $\lambda \in F$ 成立。(1) 与 (2) $\Rightarrow \Phi$ 为线性同构映射。



§5.2.2 线性变换在不同基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

线性空间的维数是最唯一的，而基是不唯一的！ \Rightarrow 同一线性变换在不同基下的表示之间有什么关系？

设线性空间 V 有两组基： $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 与 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ，线性变换 \mathcal{A} 在这两组基下的表示分别为矩阵 A 与 B

$$\Rightarrow (\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A$$

$$(\mathcal{A}(\beta_1), \dots, \mathcal{A}(\beta_n)) = (\beta_1, \dots, \beta_n)B$$

而 $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)T$ ，从而有

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\mathcal{A}(\beta_1), \dots, \mathcal{A}(\beta_n)) &= \mathcal{A}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \mathcal{A}[(\alpha_1, \dots, \alpha_n)T] \\ &= [\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)]T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)AT \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \dots, \beta_n)B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)AT$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)TB = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)AT$$

$$\Rightarrow TB = AT \Rightarrow B = T^{-1}AT$$



§5.2.2 线性变换在不同基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向
量

§5.4 矩阵的相似对
角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定理 5.5

设线性变换 $A: V \rightarrow V$ 在 V 的两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的矩阵分别为 A 和 B 。设基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 T , 即 $(\beta, \dots, \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)T$, 则 $B = T^{-1}AT$ 。



§5.2.3 矩阵的相似

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定义 5.3

设 A, B 为数域 F 上的两个 n 阶方阵, 如果存在数域 F 上的 n 阶可逆方阵 T , 使得 $B = T^{-1}AT$, 则称 A 与 B (在数域 F 上) 相似, 记为 $A \sim B$ 。

命题 5.6

矩阵的相似关系为等价关系, 即满足以下三个条件

- (1) (反身性) $A \sim A$;
- (2) (对称性) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
- (3) (传递性) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ 。

⇒ 按相似关系对 n 阶方阵的全体 $F^{n \times n}$ 进行分类

⇒ 核心问题: (1) 不变量; (2) 全系不变量; (3) 代表元。



§5.2.3 矩阵的相似

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

代数上：一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的 \Rightarrow 属于该相似类的所有方阵，是否都是该线性变换在不同基下对应的矩阵呢？（回答是肯定的！）

几何上：一个线性空间上的线性变换的性质与该空间的基的选取没有关系 \Rightarrow 相似的矩阵都具有的性质，即**相似不变量**



§5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的，选取适当的基可使线性变换的矩阵变得简单 \Rightarrow 给到一个方阵，如何找到一个尽量简单的方阵与之相似呢？（Jordan 标准形，理论分析与证明比较困难）

问题：矩阵相似于对角矩阵的条件？

设 $A \sim \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow$ 存在 n 阶可逆方阵 X ，使得 $A = T\Lambda T^{-1}$ 。记 $T = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$ ，则

$$\begin{aligned} AT &= T\Lambda \Rightarrow A(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)\Lambda = (\lambda_1\mathbf{t}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{t}_n) \\ &\Rightarrow A\mathbf{t}_i = \lambda_i\mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

关键：找到 n 个满足 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 和向量 $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$ 。



§5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定义 5.4

设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵, 如果存在 $\lambda \in F$ 及非零列向量 $\mathbf{x} \in F^n$, 使得

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

则称 λ 为方阵 A 的一个**特征值**, 而称 \mathbf{x} 为属于特征值 λ 的一个**特征向量**。

几何解释: 向量 \mathbf{x} 在线性变换 \mathcal{A} 下保持方向不变 (相同或相反), 长度伸缩 λ 倍。



§5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

在一般的 n 维线性空间 V 上, 可以定义

定义 5.5

设 V 是数域 F 上 n 维线性空间, A 为 V 上的线性变换。如果存在 $\lambda \in F$ 及非零向量 $\alpha \in V$ 满足 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则称 λ 为线性变换 A 的一个特征值, α 称为属于特征值 λ 的一个特征向量。

命题 5.7

特征向量有如下性质:

- (1) 若 α 是线性变换 A 属于特征值 λ 的特征向量 $\Rightarrow \mu\alpha$ 亦是线性变换 A 属于特征值 λ 的特征向量, $\forall \mu \neq 0 \in F$;
- (2) 若 α 与 β 是线性变换 A 属于特征值 λ 的特征向量 $\Rightarrow \alpha + \beta$ 亦是线性变换 A 属于特征值 λ 的特征向量;
- (3) 线性变换 A 属于不同特征值的特征向量线性无关。



§5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

特征子空间

设 λ 是方阵 A 的特征值, 引入

$$V_A(\lambda) = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}.$$

易知 $V_A(\lambda)$ 是 F^n 的子空间, 称为矩阵 A 的属于特征值 λ 的**特征子空间**。

特征子空间: 特征向量 + 零向量

取定 n 维线性空间 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

线性变换 \mathcal{A} 的特征值与特征向量 \Leftrightarrow 矩阵 A 的特征值与特征向量

\Rightarrow 可以通过代数的方法求解特征值与特征向量, 即矩阵 A 的特征值与特征向量!



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

λ 为方阵 A 的特征值

\Leftrightarrow 齐次线性方程组 $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$

定义 5.6

设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵, $\lambda \in F$, 称 $\det(\lambda I - A)$ 为矩阵 A 的特征多项式, 记为 $p_A(\lambda)$ 。

为确保特征值的存在性, 除非特别说明, 我们总假设 $F = \mathbb{C}$ (当 F 取 \mathbb{R} 或 \mathbb{Q} 时, 特征值与特征向量问题更困难!)



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

求解特征值与特征向量的算法：

(1) 计算特征多项式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$;

(2) 计算 $p_A(\lambda)$ 的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 及重数 n_1, n_2, \dots, n_s , 即

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s};$$

(3) 对每个特征值 λ_i ($i = 1, 2, \dots, s$), 求齐次线性方程组

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的基础解系: $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im_i}$, 即 $V_{\lambda_i} = \langle \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im_i} \rangle$ 。

⇒ 主要困难: 求解 n 次多项式 $p_A(\lambda)$ 的根! (事实上, 可以证明, 当 $n \geq 5$ 时, 一般的多项式方程是根式不可解的, 即根不能通过有限次加减乘除及开根号表示出来。)



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向
量

§5.4 矩阵的相似对角
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.8

求矩阵 A 的全部特征值和特征向量, 这里

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.9

设 \mathbf{x} 是方阵 A 的属于 λ 的特征向量, 则 \mathbf{x} 也是 kA , A^2 , $aA + bI$, A^m , $f(A)$, A^{-1} , A^* 分别属于于特征值 $k\lambda$, λ^2 , $a\lambda + b$, λ^m , $f(\lambda)$, λ^{-1} , $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量, 其中 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

若 $A \sim B \Rightarrow$ 存在可逆方阵 T , 使得 $B = T^{-1}AT$

$$\begin{aligned} \text{设 } p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &\Rightarrow p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - T^{-1}AT) \\ &= \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \det(\lambda I - A) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

命题 5.8

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值。

\Rightarrow 特征多项式和特征值是相似不变量, 但不为全系不变量。

例 5.10

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 的特征值相同, 但 A 与 B 不相似。

思考: 特征向量是相似不变量吗? (否定的!)





§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

$$\begin{aligned} \text{记 } p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n \end{aligned}$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow c_1 = -\sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad c_n = (-1)^n \det(A).$$

更为一般地, 有

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \lambda^n - \sum_{i=1}^n a_{ii} \lambda^{n-1} + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \left| A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \right| \right) \\ &+ \cdots + (-1)^k \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \left| A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \right| \right) + \cdots + (-1)^n \det(A). \end{aligned}$$



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

命题 5.9

设 $A = (a_{ij})$ 为数域 \mathbb{C} 上的一个 n 阶方阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, 则

$$(1) \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i;$$

$$(2) \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

推论 5.1

n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的 n 个特征值均不为零。

Cayley-Hamilton 定理

设 $A \in F^{n \times n}$ 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_n$, 则 $p_A(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_n I = \mathbf{0}$.



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

命题 5.10

设 $A, B \in F^{n \times n}$, 且 $A \sim B$, 则

(1) $A^T \sim B^T$, $A^{-1} \sim B^{-1}$ (若 A, B 均可逆), $A^* \sim B^*$;

(2) $A^k \sim B^k$;

(3) $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$;

(4) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$;

(5) $\det(A) = \det(B)$;

(6) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ 。

⇒ 矩阵的秩、行列式、迹均为相似不变量!



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.11

已知矩阵 A 与 B 相似, 求 x 和 y 。这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 5.12

设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 求 $I + A$ 的特征值及 $\det(I + A)$ 。



§5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.13

设方阵 A 满足 $A^k = \mathbf{0}$, 证明: $\det(I - A) = 1$ 。

例 5.14

设 A 为 n 阶实矩阵满足 $AA^T = I$, 且 $|A| < 0$, 试求 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值。



§5.4 矩阵的相似对角化

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

相似等价类的代表元? \Rightarrow 对角阵或准对角阵

例 5.15

证明 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 不能相似于对角阵。

\Rightarrow 相似等价类的代表元是准对角阵, 即 Jordan 标准形

问题: 满足什么条件的矩阵能相似于对角阵?



§5.4.1 相似于对角阵的充要条件

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定义 5.7

如果一个方阵相似于对角阵, 则称该方阵可对角化, 也称相应的线性变换可对角化。

定理 5.11

数域 F 上的 n 阶方阵 A 相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量。

推论 5.2

如果矩阵 A 的 n 个互不相同的特征值, 则 A 相似于对角阵。



§5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

相似对角化条件是否有更细致的刻画?

代数重数

设 $A \in F^{n \times n}$ ($F = \mathbb{C}$), A 的特征多项式

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad (n_1 + \cdots + n_s = n),$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的所有不同特征值, 则称 n_i 为特征值 λ_i 的代数重数。

几何重数

特征值 λ_i 的特征子空间 $V_A(\lambda_i)$ 的维数, 即线性方程组 $(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数, 称为特征值 λ_i 的几何重数。



§5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

引理 5.1

设 $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) 是 A 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量组, 则 $\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{1m_1}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \dots, \mathbf{x}_{2m_2}, \dots, \mathbf{x}_{s1}, \mathbf{x}_{s2}, \dots, \mathbf{x}_{sm_s}$ 也是线性无关的向量组。

引理 5.2

设 λ_i 为 n 阶复方阵 A 的特征值, 则它的几何重数不超过它的代数重数, 即 $m_i \leq n_i$ 。

定理 5.12

复方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 的每个特征值的几何重数与代数重数相等, 即 $m_i = n_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$)。



§5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向
量

§5.4 矩阵的相似对角
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.16

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵, 求 x 和 y 应满足的条件。

例 5.17

设 n 阶方阵 A 满足 $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) = n$, 证明 $A^2 = I$ 。



§5.4.3 相似于上三角阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

对任意的方阵 $A \in C^{n \times n}$, 需要满足一定条件才能相似于对角阵 \Rightarrow 问题: 是否可以相似于上三角阵?

定理 5.13

任何一个 n 阶复方阵 A 都可以相似于一个上三角阵, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值。

注意: 复方阵 A 总可以相似于上三角阵, 但这些上三角阵可以是不唯一的! \Rightarrow 不能作为相似等价类的代表元。



§5.4.3 相似于上三角阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.18

求与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 相似的上三角阵。

例 5.19

设 x, y, z 都是 t 的函数, 求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy(t)}{dt} = 2x + 2y - z, \\ \frac{dz(t)}{dt} = x + 2y - z. \end{cases}$$



§5.4.3 相似于上三角阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

常用数学软件：MATLAB（数值计算）、Mathematica、Maple（符号计算）

For Mathematica:

```
A := {{2, -1, 1}, {2, 2, -1}, {1, 2, -1}}
```

```
SchurDecomposition[N[A]]//MatrixForm
```

```
JordanDecomposition[A]//MatrixForm
```

For MATLAB:

```
A = [2, -1, 1; 2, 2, -1; 1, 2, -1]
```

```
[U, T] = schur(A)
```

```
[V, T] = jordan(A)
```



§5.5.1 若尔当标准形的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

相似等价类的代表元? —— 若尔当标准形 (Jordan canonical form)

定义 5.8

设 λ 是任意复数, m 是任意正整数, 形如

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{m \times m}$$

的 m 阶方阵称为若尔当块, 记作 $J_m(\lambda)$, 其中 λ 是对角线元素, 也是特征值。因此 $J_m(\lambda)$ 也称为特征值为 λ 的 m 阶若尔当块。



§5.5.1 若尔当标准形的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定义 5.9

如果一个方阵是准对角阵，并且每个对角块都是若当块，则称之为若当形矩阵。

注意：一个若当形矩阵的某些若当块可能具有相同的特征值。例如矩阵

$$\text{diag}(J_4(2), J_3(2), J_1(2), J_3(5))$$

是一个若当形矩阵。



§5.5.1 若尔当标准形的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

定理 5.14

任何一个复方阵 A 都相似于一个若尔当形矩阵 J , 即

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中 $J_i = \text{diag}(J_{m_{i1}}(\lambda_i), \dots, J_{m_{ik_i}}(\lambda_i))$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 A 的 s 个不同特征值。如果不计若尔当块的排列顺序, 则 J 是唯一的。

(证明见参考书籍, 比较难, 代数: λ -矩阵方法, 几何: 根子空间、循环子空间)



§5.5.2 若尔当标准形的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

求复数域 \mathbb{C} 上的 n 阶方阵 A 的若尔当标准形的算法:

(1) 求出 A 的特征多项式和全部特征值:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad \sum_{i=1}^s n_i = n;$$

(2) 对每个特征值 λ_i , 计算序列 $A - \lambda_i I, (A - \lambda_i I)^2, (A - \lambda_i I)^3, \dots$,

记 $r_k = \text{rank}(A - \lambda_i I)^k, k \geq 0$, 约定 $r_0 = n$,

$$d_k = r_{k-1} - r_k, \quad k \geq 1,$$

$$\delta_k = d_k - d_{k+1}, \quad k \geq 1,$$

则 $d_k = J$ 中特征值为 λ_i 的阶大于等于 k 的若尔当块的个数,

$\delta_k = J$ 中特征值为 λ_i 的阶等于 k 的若尔当块的个数;

(3) 依据 $\delta_k, k \geq 1$, 写出 A 的若尔当标准形。



§5.5.2 若尔当标准形的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.20

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的若尔当标准形。

问题：如何求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = J$?

有两种方法：(1) 待定系数法；(2) 几何方法。



§5.5.3 若尔当标准形的应用

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.21

证明: n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$ 的充要条件是 A 相似于准对角阵 $\text{diag}(I_r, 0)$, 这里 $r = \text{rank}(A)$ 。

例 5.22

设 x, y, z 都是 t 的函数, 求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -4x + 9y - 4z, \\ \frac{dy(t)}{dt} = -9y + 18y - 8z, \\ \frac{dz(t)}{dt} = -15x + 29y - 13z. \end{cases}$$



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

常用搜索引擎：Google, Baidu 等。主要用途：输入一个关键词，搜索引擎在很短时间内找到与关键词相关的网页，并按照重要性将所有网页排序。

著名的 PageRank 算法：1998 年，斯坦福大学的两位博士生 Sergey Brin 与 Lawrence Page 在 WWW 国际会议论文集上发表了一篇学术论文¹，讨论网页搜索与排序问题，并据此创立了 Google 公司。

¹Sergey Brin and Lawrence Page. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine. Proceedings of the Seventh International Conference on World Wide Web, pp. 107–117. 1998.



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

Google 公司的创始人





§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

Google 公司创立的历史

- 1995 年秋天, Larry Page 进入斯坦福大学后, 师从 Terry Winograd 教授攻读博士学位; Sergey Brin 是斯坦福大学计算机系研二学生;
- 1996 年, Page 建立了一个实验用的搜索引擎, 称为 BackRub, 对 1000 万份网页进行分析 + 网络爬虫工具 (下载网页);
- 随后, Brin 加入 Page 的团队
- 随着 BackRub 用户的不断增加, Page 和 Brin 意识到 BackRub 的价值, 准备出售, 然而却无人问津;
- 决定: 自己干! —— Google



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向
量

§5.4 矩阵的相似对角
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

Google 公司创立的历史

- Google: 本是一数学名词, 代表 1 后面 100 个零, 体现了 Google 公司整合网上海量信息的远大目标;
- 1998 年 9 月, Google 公司在—个车库中诞生了;
- 创业风险: 当年 Brin 把创业计划告诉导师时, 他的导师非常支持, 表示如果创业不成功还可回来继续读书, 于是两个人都办理了休学手续专心创业!
- 优势: 数学 + 算法;



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

截至 2022 年 5 月 11 日, Google 最新市值 15090.78 亿美元!





§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

数学模型：

- 研究：互联网复杂的数学结构；
- 模型：图 (Graph)；
- 建模：在互联网中，每台计算机就是一个结点，而两个页面之间的链接则是连接两个结点的连线；
- 问题：如何评价网页的重要性？



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

基本思路：

- Page 和 Brin 共同开发了一套网页评级系统 PageRank：当从网页 A 链接到网页 B 时，系统就认为“网页 A 投了网页 B 一票”。系统根据网页的得票数评定其重要性；
- 除了考虑网页得票数（即链接）的纯数量之外，系统还要分析投票的网页。“重要”的网页所投出的票就会有更高的权重，并且有助于提高其它网页的“重要性”。



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

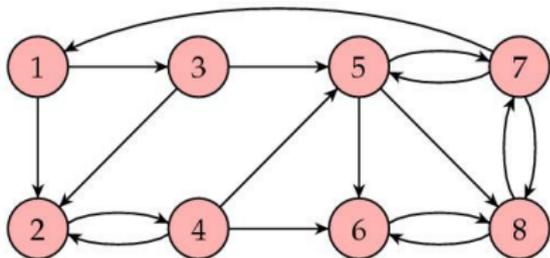
§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

PageRank 的数学模型



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{pmatrix}$$



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

设互联网上有 N 个网页，每个网页的重要性为 $I(P)$ ，则

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 B_i 表示所有指向 P_i 的网页集合， l_j 表示 P_j 指向网页的个数。

记 $H = (h_{ij})_{N \times N}$ ，其中

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, & \text{if } P_j \in B_i, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_N) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_N) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = H\mathbf{x}$$



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向
量

§5.4 矩阵的相似对角
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

矩阵 H 满足如下性质:

- 每个元素 h_{ij} 非负;
- 每一列的元素之和为 1, 即 $\sum_{j=1}^N h_{ij} = 1 (i = 1, 2, \dots, N)$,

称满足上述性质的矩阵 H 为列随机矩阵。

矩阵 H 的每个元素 h_{ij} 可解释为从网页 P_i 到网页 P_j 的访问概率, 此时称 H 为概率转移矩阵。

⇒ PageRank: 求矩阵 H 属于特征值 1 的特征向量!



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向
量

§5.4 矩阵的相似对角
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

随机过程理论 (概率解释): Markov 随机过程

特征向量 \mathbf{x} : 稳定分布向量

如何计算: (幂法, Power method)

$$\mathbf{x}^{k+1} = H\mathbf{x}^k, k = 0, 1, 2, \dots,$$

问题:

- 迭代是否收敛?
- 迭代是否与初值的选取有关?
- 稳定分布向量 \mathbf{x} 是否包含我们需要的信息?



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

幂法：用于求矩阵按模最大的特征值及相应的特征向量

收敛的一个充分条件：有 N 个线性无关的特征向量且特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_N|,$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \mathbf{v}_N,$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^1 = H\mathbf{x}^0 = c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \lambda_N \mathbf{v}_N,$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^2 = H\mathbf{x}^1 = c_1 \lambda_1^2 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \lambda_N^2 \mathbf{v}_N,$$

\vdots

$$\Rightarrow \mathbf{x}^k = H\mathbf{x}^{k-1} = c_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \lambda_N^k \mathbf{v}_N,$$

$$= \lambda_1^k \left[c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_N \right],$$

$$\approx \lambda_1^k c_1 \mathbf{v}_1.$$

容易看出：收敛速度取决于 $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

在幂法中, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $\mathbf{x}^k \rightarrow \begin{cases} 0, & |\lambda_1| < 1, \\ \infty, & |\lambda_1| > 1. \end{cases}$, 从而导致 \mathbf{x}^k 的分量过大 (上溢) 或过小 (下溢)。

在实际运算中, 采用如下带规范运算的幂法

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = A\mathbf{y}^k, \\ \mathbf{y}^{k+1} = \frac{\mathbf{x}^{k+1}}{\|\mathbf{x}^{k+1}\|_\infty}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

异常的例子 1:



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

原因: 含有悬空的节点 (不包含任何链接的节点)

修正: 将悬空节点所在列的每个 h_{ij} 值改为 $\frac{1}{N}$, 即网民浏览到悬空节点后, 他(她)可以随机任意打开一个新的页面 P_j 。

$$S = H + A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A \text{ 为修正矩阵} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

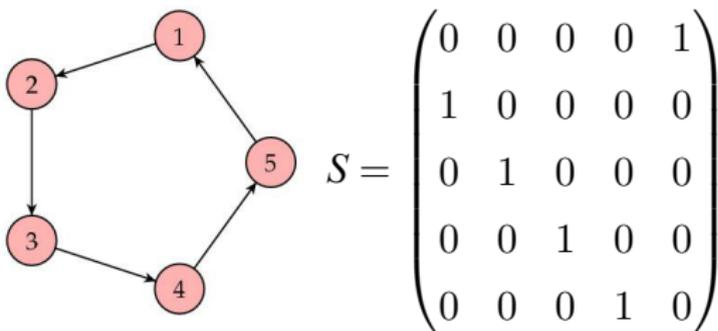
§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

异常的例子 2:



问题: $|\lambda_2| = 1$, 导致幂法不收敛

满足 $1 > |\lambda_2|$ 的一个充分条件: 矩阵 S 是素的 (Primitive), 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 S^k 的所有元素都是正的。



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

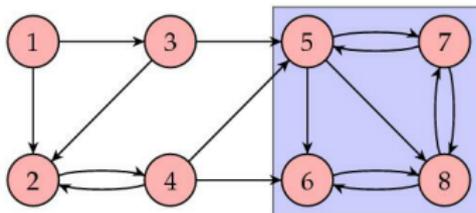
§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

异常的例子 3:



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1200 & 0.2400 & 0.2400 & 0.4000 \end{pmatrix}^T$$

问题: 大的网络包含了一个小的网络, 小网络内的节点没有出去的链接, 导致节点 P_1, P_2, P_3, P_4 的重要性为 0。

满足重要性都是正数的一个充分条件: 矩阵 S 是不可分拆

(Irreducible), 即不存在置换方阵 P 使得 $P^{-1}SP$ 是准上角矩阵。



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

PageRank 模型:

$$G = \omega S + (1 - \omega) \frac{1}{N} \mathbf{1} = \omega H + \omega A + (1 - \omega) \frac{1}{N} \mathbf{1},$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示元素全为 1 的 n 阶方阵, $\omega \in [0, 1]$ 为权重, Google 搜索引擎取 $\omega = 0.85$ 。

模型的概率解释: 假设互联网有 N 个网页 P_1, P_2, \dots, P_N , 网民在每个时刻只能打开一个网页。他(她)有可能随机点击当前网页中的某个链接, 跳转到新的网页; 也有可能关闭当前页面, 再随机打开一个网页。假设他点击链接的概率是 ω , 则关闭当前页面的概率是 $1 - \omega$ 。在无限长时间后的某个时刻, 网页 P_j 被访问的概率 $p_j = I(P_j)$ 就被定义为它的 PageRank。



§5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

数学工具：随机过程理论

容易验证： G 是列随机矩阵且 G 的所有元素都是正的
 $\Rightarrow G$ 是不可分拆的素矩阵！

注意：对于互联网来说， N 非常大！
 \Rightarrow 计算特征向量仍然是非常耗时的！

The size of the World Wide Web (The Internet): ²

The Indexed Web contains at least 2.46 billion pages (Tuesday, 10 May, 2022).

²<http://www.worldwidewebsite.com/>



线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

Thanks for your attention!