



线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

线性代数 (B1)

童伟华 管理科研楼 1205 室¹

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

¹ 数学科学学院 中国科学技术大学

2025-2026 学年第二学期 MATH1009.11



§2 线性方程组

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

线性方程组

称由变量都为一次的方程所组成的方程组为**线性方程组**。

例如：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$



§2 线性方程组

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

定义 2.1

一般地, 具有 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 由 m 个方程组成的线性方程组具有如下形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

其中, a_{ij} 是第 i 个方程中第 j 个变量 x_j 的系数, b_i 是第 i 个方程的常数项。假设系数 a_{ij} 、常数项 b_i 及方程组的解 x_j 均属于某个数域 F 。如果常数项都为零, 则称相应的线性方程组为齐次线性方程组。否则, 称为非齐次线性方程组。



§2 线性方程组

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

定义 2.2

若将 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ 代入上述方程等式都成立, 则称 (c_1, c_2, \dots, c_n) 为该方程组的一组解。线性方程组解的全体称为该方程组的解集。如果解集非空, 则称线性方程组是相容的; 否则, 称线性方程组不相容。



§2 线性方程组

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

基本问题

- 线性方程组是否存在解？如果有解，有多少个解？
- 如何求线性方程组的解？
- 解的公式表示；
- 解集的几何结构；
- 线性方程组的解是否符合实际的需要（可行解问题）？



§2.1 Gauss 消元法

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

基本想法



哪些形式的线性方程组是易于求解的？

何谓“互为同解方程组”？

初等变换有哪些？



§2.1 Gauss 消元法

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

初等变换

- 交换两个方程 $(i) \leftrightarrow (j)$
- 某个方程乘一个非零常数 $\lambda(i), \lambda \neq 0$
- 某方程乘一个常数加到另一个方程 $\lambda(i) \rightarrow (j)$

初等变换是学好线性代数的关键之一!



§2.1 Gauss 消元法

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

如果两个线性方程组有相同的解，则称它们为同解方程组。

命题 2.1

三种初等变换将线性方程组变为同解线性方程组，因此不会产生增根也不会丢根。



§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

现象：变元不参与运算，只是变元的系数与常数项参与运行（变元可替换） \Rightarrow 是否可以省去变元？

矩阵

由若干行及若干列的数构成的阵列称为**矩阵**

矩阵是线性代数中最常用的术语与记号！



§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

采用矩阵的表示, 线性方程组可写成:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程组的增广矩阵

线性方程组的初等变换 \Rightarrow 矩阵的初等行变换

记号: $r_i \leftrightarrow r_j$ (互换第 i 与第 j 两行), λr_i (第 i 行乘非零常数 λ), $\lambda r_i \rightarrow r_j$ (第 i 行乘 λ 加到第 j 行)



§2.3.1 算法描述

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

Algorithm 1 高斯消元法

Input:

$n, (a_{ij}), (b_i)$

```
1: for  $k = 1$  to  $n - 1$  do
2:   for  $i = k + 1$  to  $n$  do
3:      $z \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$ ;
4:      $a_{ik} \leftarrow 0$ ;
5:     for  $j = k + 1$  to  $n$  do
6:        $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - za_{kj}$ ;
7:     end for
8:      $b_i \leftarrow b_i - zb_k$ ;
9:   end for
10: end for
11: for  $i = n$  to 1 step -1 do
12:    $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)/a_{ii}$ ;
13: end for
```

Output:

(x_i)



§2.3.1 算法描述

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

Gauss 消元法的可行性：消元过程中主对角元非零，即 $a_{kk} \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$ (否则，进行行交换)

最简形式或标准形式

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{rj_r} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{11}, c_{2j_2}, \dots, c_{rj_r}$ 均非零。

思考：若允许列交换，形式如何？



§2.3.2 线性方程组解的属性

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

利用最简形式，判断线性方程组解的存在、唯一及有多个解的条件。

定理 2.2

线性方程组 (1) 的解的属性如下：

- 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时，线性方程组 (1) 无解；
- 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$ 时，线性方程组 (1) 有唯一解；
- 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$ 时，线性方程组 (1) 有多解。



§2.3.2 线性方程组解的属性

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

通解

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}t_1 + \dots + \alpha_{1,n-r}t_{n-r} + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}t_1 + \dots + \alpha_{2,n-r}t_{n-r} + \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1}t_1 + \dots + \alpha_{n,n-r}t_{n-r} + \beta_n \end{cases}$$

其中 t_1, \dots, t_{n-r} 为参数,

$\alpha_{ij}, \beta_i \in F, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n - r$ 。

将参变量 t_1, \dots, t_{n-r} 取定一组值代入, 得到的解称为一个特解。



§2.3.2 线性方程组解的属性

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

向量形式:

$$\mathbf{x} = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_{n-r}\alpha_{n-r} + \beta,$$

其中,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n-r, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$



§2.3.2 线性方程组解的属性

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

对于齐次线性方程组, 由于总有 $d_{r+1} = 0$, 故线性方程组总有解。特别地, $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ 就是齐次线性方程组的一组解, 我们称之为零解或平凡解。齐次线性方程组的非零解称为非平凡解。

推论 2.1

齐次线性方程组有非零解的充要条件为 $r < n$ 。

推论 2.2

若 $m < n$, 则齐次线性方程组一定有非零解。



§2.3.2 线性方程组解的属性

线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

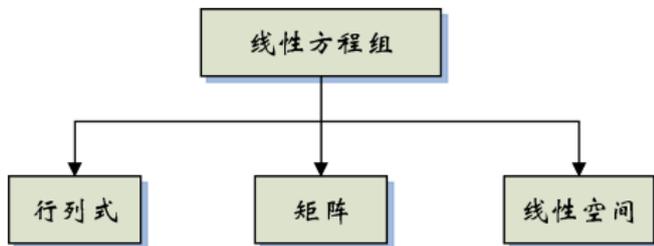
§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

尚未解决的问题：

- 如何从原方程组直接判别解的存在性、唯一性及多解性？
- 如何从原方程组直接确定 r ？
- r 是否唯一？
- 解集的大小与 r 有何关系？
- 直接从原方程获得公式解。





线性代数 (B1)

童伟华

第二章线性方程组

§2.1 Gauss 消元法

§2.2 Gauss 消元法的矩阵表示

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

Thanks for your attention!