



线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

线性代数 (B1)

童伟华 管理科研楼 1205 室¹

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

¹ 数学科学学院 中国科学技术大学

2025-2026 学年第二学期 MATH1009.11



§3.1 矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

矩阵是线性代数的基本研究对象与工具。

定义 3.1

对任意正整数 m 和 n , 由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵, 记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 。表中的每个数称为矩阵 A 的元素; 排在第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 称为 A 的第 (i, j) 元素; 当 $i = j$ 时, a_{ii} 也称为 A 的对角元。



§3.1 矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

常用大写字母如 A, B, C 表示矩阵。

两个矩阵 A 与 B 是**相等**的，如果它们的行数和列数都相等并且每个位置上的元素都相等，记作 $A = B$ 。

常见的矩阵名称及记号：

- 元素都是 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 O 或 0 。
- $n \times n$ 矩阵称为 n 阶**方阵**。
- 对角元是 1 其它元素都是 0 的 n 阶方阵称为**单位阵**，记作 I 、 I_n 或 $I^{(n)}$ 。
- 对角元是 a 其它元素都是 0 的方阵称为**数量阵**，记作 aI 。



§3.1 矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章 矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

常见的矩阵名称及记号:

- 若方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的元素除对角元外都为零, 则称 A 为**对角阵**, 记作

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

- 若矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 满足 $a_{ij} = 0$ 对所有 $i > j$ 成立, 则 A 称为**上三角阵**。
- 若矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 满足 $a_{ij} = 0$ 对所有 $i < j$ 成立, 则 A 称为**下三角阵**。
- 上三角阵和下三角阵统称为**三角阵**。



§3.1 矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

常见的矩阵名称及记号:

- 若方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $a_{ij} = a_{ji}$ 对所有 i, j 成立, 则 A 称为对称阵。
- 若方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $a_{ij} = -a_{ji}$ 对所有 i, j 成立, 则 A 称为反对称阵。
- 若矩阵 A 的元素都是整数、有理数、实数、复数、多项式等, 则 A 分别称为整数矩阵、有理数矩阵、实矩阵、复矩阵、多项式矩阵。一般地, 若 A 的元素都取自某个数域 F , 则 A 称为数域 F 上的矩阵。数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵的全体, 记作 $F^{m \times n}$ 。



§3.1 矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

矩阵的概念是向量的一个自然推广：行向量

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

可视为 1 行 n 列的矩阵；列向量

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

可视为 n 行 1 列的矩阵。在向量的意义下，行向量 \mathbf{a} 与列向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 表示同一个向量，但是在矩阵的意义下，它们表示不同的矩阵。



§3.1 矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

反之, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 也可以视为向量, 譬如 A 既可以被看作是 m 个行向量按列排在一起

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = 1, 2, \dots, m,$$

又可以被看作 n 个列向量按行排在一起

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n), \mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n,$$



§3.1 矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

还可以被看作是将一个 mn 维的数组向量排在一起

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

或

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}, \cdots, a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn})^T.$$

矩阵自身没有特殊的含义，如何灵活的解释矩阵是学习线性代数的关键之一！



§3.2 矩阵的运算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章 矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

矩阵的基本运算：加法 + 数乘，线性运算。

矩阵的乘法、求逆：学习线性代数的关键之一！

矩阵的初等变换、分块运算：初等变换 \Leftrightarrow 矩阵乘法，利用矩阵的结构进行分块

矩阵的转置、共轭、迹等。



§3.2.1 加法与数乘

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.2

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in F^{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n} \in F^{m \times n}$, $\lambda \in F$ 。定义

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

分别称为矩阵的**加法运算**和**数乘运算**。



§3.2.1 加法与数乘

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

记作: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$ 。

类似地, 可以定义矩阵的减法运算和负矩阵

$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$, $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ 。

矩阵的加法与减法只对规格相同的矩阵才有定义。



§3.2.1 加法与数乘

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.1

矩阵的加法和数乘运算具有下列性质：

- 加法交换律 $A + B = B + A$
- 加法结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 有零矩阵 $A + O = O + A = A$
- 有负矩阵 $A + (-A) = (-A) + A = O$
- 左分配律 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 右分配律 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 数乘结合律 $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- 数乘单位元 $1A = A$

其中 A, B, C 是使运算有意义的矩阵, λ, μ 是数。



§3.2.1 加法与数乘

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

第 (i, j) 元素是 1, 其它元素全是 0 的 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

↑
第 j 列

称为基本矩阵, 记作 E_{ij} 。

每个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 都可以通过矩阵的加法和数乘唯一地表示成为

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

线性映射

设 U, V 为数域 F 上的线性空间, 映射 $\mathcal{A}: U \mapsto V$, 若映射 \mathcal{A} 满足:

$$(1) \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U,$$

$$(2) \mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U, \lambda \in F,$$

则称 \mathcal{A} 为线性空间 U 到线性空间 V 的线性映射。

线性映射 (变换) 是线性代数的主要研究对象之一!



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in F^{m \times n}$, 按如下方式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

定义映射 $\mathcal{A} : F^{n \times 1} \mapsto F^{m \times 1}$, 其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^{n \times 1}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in F^{m \times 1},$$

不难验证 \mathcal{A} 为线性映射, 简记为: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 。



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

反之, 当线性空间 U, V 取定一组基后, 可以证明: 任意 U 到 V 的线性映射 A 都可以表示成 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 形式。

若有矩阵 $B = (b_{jk})_{n \times l}$, 按如下方式

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1l}z_l, \\ x_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2l}z_l, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nl}z_l, \end{cases}$$

定义线性映射 $B : F^{l \times 1} \mapsto F^{n \times 1}$, $\mathbf{x} = B\mathbf{z}$ 。



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

将线性映射 \mathcal{A}, \mathcal{B} 进行复合, 即 $\mathbf{y} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\mathbf{z})$, 则可定义新的线性映射 $C: F^{l \times 1} \mapsto F^{m \times 1}$, 问题: 映射 C 写成 $\mathbf{y} = C\mathbf{z}$ 的形式是怎样的?

按定义 $\mathbf{y} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{z}) = C\mathbf{z}$, 如何写成:

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1l}z_l, \\ y_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2l}z_l, \\ \dots\dots\dots \\ y_m = c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \cdots + c_{ml}z_l. \end{cases}$$

的形式?



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

$$\begin{aligned}y_i &= a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \\&= a_{i1}\left(\sum_{k=1}^l b_{1k}z_k\right) + \cdots + a_{in}\left(\sum_{k=1}^l b_{nk}z_k\right) \\&= (a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{in}b_{n1})z_1 + \cdots + (a_{i1}b_{1n} + \cdots + a_{in}b_{nn})z_l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\&= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\end{aligned}$$



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in F^{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{n \times l} \in F^{n \times l}$, 定义 A 与 B 的乘积为 $m \times l$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1l} + a_{12}b_{2l} + \cdots + a_{1n}b_{nl} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1l} + a_{m2}b_{2l} + \cdots + a_{mn}b_{nl} \end{pmatrix}$$

记作 $C := (c_{ij})_{m \times l} = AB$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和。



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{a}_1 \rightarrow \\
 \mathbf{a}_2 \rightarrow \\
 \vdots \\
 \mathbf{a}_m \rightarrow
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\
 b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl}
 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \cdots \qquad \uparrow$
 $\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_l$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}_{m \times 1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l \end{pmatrix}_{1 \times l} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_l \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_m \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \mathbf{b}_l \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_i \in F^{1 \times n}, \mathbf{b}_j \in F^{n \times 1}$$



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

行向量的线性组合 \Leftrightarrow 行变换

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \beta_1 \\ \leftarrow \beta_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \beta_n \end{matrix} \\
 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}\beta_1 + \cdots + a_{mn}\beta_n \end{pmatrix}$$



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

列向量的线性组合 \Leftrightarrow 列变换

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}_{1 \times n} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}_{n \times l}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k b_{k1} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k b_{k2} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k b_{kl} \right)$$



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

另外，我们还可视矩阵乘法为：

$$AB = A \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_l \end{pmatrix}$$

其中 $A \in F^{m \times n}$, $\mathbf{b}_i \in F^{n \times 1} \Rightarrow A\mathbf{b}_i \in F^{m \times 1}$, $i = 1, 2, \dots, l$

思考：如何证明上述公式的正确性？

AB 的每一列都是 A 的列向量组的线性组合，组合系数为 B 对于列的元素； AB 的每一行都是 B 的行向量组的线性组合，组合系数为 A 对于行的元素。



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

矩阵乘法注意事项:

- 仅当 A 的列数等于 B 的行数时, A 与 B 才可以相乘;
- 矩阵乘法**不满足交换律**, 甚至不一定有定义;
- $AB = 0 \not\Rightarrow A = \mathbf{0}$ 或 $B = \mathbf{0}$;
- $AB = AC \not\Rightarrow B = C$;
- $IA = AI = A, \mathbf{0}A = A\mathbf{0} = \mathbf{0}, \lambda A = (\lambda I)A$.



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.2

矩阵的乘法运算具有以下性质:

- (1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$
- (2) 乘法单位元 $IA = AI = A$
- (3) 左分配律 $(A + B)C = AC + BC$
- (4) 右分配律 $A(B + C) = AB + AC$
- (5) 数乘结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

其中 A, B, C 是使运算有意义的矩阵, λ 是数。

乘法结合律 \Leftrightarrow 映射的复合满足结合律



§3.2.2 矩阵的乘法

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

方阵的幂

通过矩阵的乘法, 可以定义任意方阵 A 的正整数次幂

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

对任意方阵 A (包括零方阵), 规定 $A^0 = I$.

矩阵多项式

设多项式 $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$, 定义矩阵多项式

$$f(A) = c_0I + c_1A + \cdots + c_kA^k.$$



§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.4

将矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行列互换，得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的转置矩阵，记作 $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ 。



§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.5

将复矩阵 A 的每个元素换成它的共轭复数，得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

称为 A 的共轭矩阵，记作 $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})_{m \times n}$ 。

共轭转置： $A^H = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$



§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.6

n 阶方阵 A 的对角元之和

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

称为 A 的迹, 记作 $\text{tr}(A)$ 。



§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.3

矩阵的转置运算具有以下性质：

$$(1) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$(2) (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(3) (AB)^T = B^T A^T;$$

其中 A, B 是使运算有意义的矩阵, λ 是数。

$$\Rightarrow (A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$$



§3.2.3 矩阵的转置、共轭和迹

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.4

矩阵的迹具有以下性质：

$$(1) \operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B);$$

$$(2) \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A);$$

$$(3) \operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(\bar{A}) = \overline{\operatorname{tr}(A)};$$

$$(4) \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

其中 A, B 是使运算有意义的矩阵, λ 是数。



§3.2.4 矩阵的分块运算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

将矩阵视为行向量组或列向量组：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \mathbf{a}_1 \\ \leftarrow \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{a}_m \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{matrix}$$

⇒ 是否有更一般形式的划分？



§3.2.4 矩阵的分块运算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

分块矩阵

给定矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 可将 A 用水平线与竖直线分成若干块,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

称为分块矩阵, 记作 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, 每个 $A_{ij} \in F^{m_i \times n_j}$ 称为 A 的子块。

水平线之间的间距: m_1, m_2, \dots, m_r , 满足 $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m$;

竖直线之间的间距: n_1, n_2, \dots, n_s , 满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$ 。



§3.2.4 矩阵的分块运算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

普通矩阵可视为分块矩阵的特殊情况，即 A_{ij} 仅含一个元素 a_{ij} 。

分块可以是任意的，但一般情形下，都是带有目的地：**发掘矩阵的特殊结构**，譬如零矩阵块，单位阵块，数量阵块，对称块等。

若 $A_{ij} = O$ 对所有 $i \neq j$ 成立，则称 A 为准对角阵，记作

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & A_{rr} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad A = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{rr}).$$

若 $A_{ij} = O$ 对所有 $i > j$ 成立，则 A 称为准上三角阵。

若 $A_{ij} = O$ 对所有 $i < j$ 成立，则称 A 为准下三角阵。

准上三角阵和准下三角阵统称为准三角阵。





§3.2.4 矩阵的分块运算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

子矩阵

由 A 的第 i_1, i_2, \dots, i_r 行和第 j_1, j_2, \dots, j_s 列上的元素依次排列组成的 $r \times s$ 矩阵称为 A 的子矩阵, 记作

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}.$$



§3.2.4 矩阵的分块运算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.5

矩阵的分块运算具有以下性质:

(1) 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, $B = (B_{ij})_{r \times s}$, 则 $A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{r \times s}$;

(2) 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, 则 $\lambda A = (\lambda A_{ij})_{r \times s}$;

(3) 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, $B = (B_{ij})_{s \times t}$, 则 $AB = (C_{ij})_{r \times t}$, 其中

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj},$$

其中矩阵 A, B 的分块方式使运算有意义, λ 是数。

矩阵的分块乘法: 要求 A 的列的分块方式与 B 的行的分块方式相同, 即 A_{ik} 的列数与 B_{kj} 的行数相同。



§3.2.4 矩阵的分块运算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.6

矩阵的分块运算具有以下性质:

(1) 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$, 则 $A^T = (A_{ji}^T)_{s \times r}$;

(2) 设 $A = (A_{ij})_{r \times s}$ 是复方阵, 则 $\bar{A} = (\overline{A_{ij}})_{r \times s}$;

(3) 设 $A = (A_{ij})_{r \times r}$ 且每个 A_{ii} 都是方阵, 则 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^r \text{tr}(A_{ii})$,

其中矩阵 A, B 的分块方式使运算有意义, λ 是数。

在对矩阵施行分块运算时, 可把每个矩阵块看作是一个元素进行运算, 然后再对每个矩阵块施行同样的运算。



§3.2.5 初等变换与初等矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

三种初等行（列）变换

- (1) 交换矩阵的两行（列）；
- (2) 将某行（列）乘以一个非零常数；
- (3) 将某行（列）的常数倍加到另一行（列），

以上变换称为矩阵的**初等行（列）变换**，初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**。

矩阵乘法的背景是线性映射，问题：初等行（列）变换是否可以用矩阵乘法表示？



§3.2.5 初等变换与初等矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.7

对矩阵作初等行变换，相当于在矩阵的左边乘上一个相应的初等方阵；对矩阵作初等列变换，相当于在矩阵的右边乘上一个相应的初等方阵。

解释：初等行变换 $A \Leftrightarrow A$

$$AI = A$$

初等列变换类似。



§3.2.5 初等变换与初等矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

如果对矩阵施行一系列初等行变换与初等列变换，目标是使得矩阵具有尽可能简单的形式，那么最终的形式是怎样的？

定理 3.8

对任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，存在一系列 m 阶初等方阵 P_1, \dots, P_s 和 n 阶初等方阵 Q_1, \dots, Q_t ，使得

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 r 为非负整数。



§3.3 行列式

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

二阶行列式：平行四边形的有向面积

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

三阶行列式：平行六面体的有向体积

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

问题： n 维数组空间

$F^n := \{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in F, i = 1, 2, \dots, n\}$ 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 张成的平行多面体的有向体积是多少？



§3.3.1 行列式的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

行列式有很多等价定义：递归定义，展开式定义，几何定义……

几何定义方式：把有向面积、有向体积所具有的本征性质推广到一般的 n 维数组空间。

有向面积、有向体积的本征性质：**多重线性性、反对称性、规范性。**



§3.3.1 行列式的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

D1: 多重线性性

若记 $\Delta_2 = \det(\alpha_1, \alpha_2)$, 则

$$\det(\lambda\alpha + \mu\beta, \alpha_2) = \lambda \det(\alpha, \alpha_2) + \mu \det(\beta, \alpha_2),$$

$$\det(\alpha_1, \lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda \det(\alpha_1, \alpha) + \mu \det(\alpha_1, \beta),$$

对任意的 $\lambda, \mu \in F$ 都成立。

推广: $\det(\alpha_1, \dots, \lambda\eta_i + \mu\xi_i, \dots, \alpha_n) =$

$\lambda \det(\alpha_1, \dots, \eta_i, \dots, \alpha_n) + \mu \det(\alpha_1, \dots, \xi_i, \dots, \alpha_n)$, $\lambda, \mu \in F$ 对

$i = 1, 2, \dots, n$ 都成立。



§3.3.1 行列式的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

D2: 反对称性

$$\det(\alpha_2, \alpha_1) = -\det(\alpha_1, \alpha_2) \iff \det(\alpha, \alpha) = 0, \forall \alpha$$

推广:

$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$,
对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$ 都成立。

$$\iff \det(\alpha_1, \dots, \alpha, \dots, \alpha, \dots, \alpha_n) = 0, \forall \alpha$$



§3.3.1 行列式的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

D3: 规范性

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$$

推广: $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$, 其中

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, \underset{\downarrow}{1}, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



§3.3.1 行列式的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.7

设 F^n 为 n 维数组空间, $\det : \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_n \mapsto F$ 且满足 D_1, D_2, D_3 性质, 则称 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 为 n 阶行列式。

\iff 行列式: F^n 上的规范反对称 n 重线性函数 (可证明这样的函数存在且唯一!)



§3.3.1 行列式的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.9

行列式具有以下性质：

- (1) D4: 若某一向量 $\alpha_j = 0$, 则 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$;
- (2) D5: 若 $\alpha_j = k\alpha_i$ ($i \neq j$), 则 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$;
- (3) D6: 对 $\forall i \neq j$ 有, $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \lambda\alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$
 $= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$.

代数上：若有向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F^{n \times 1}$ 的坐标表示，那么 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的解析表达式是什么？



§3.3.2 排列的奇偶性

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.8

将 n 个两两不同的正整数 s_1, s_2, \dots, s_n 按顺序排成的一个有序数组称为一个排列, 记做 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ 。满足 $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ 的排列称为顺序排列。满足 $i < j$ 且 $s_i > s_j$ 的一对数 (s_i, s_j) 称为 s 的一个逆序。 s 的逆序的个数称为 s 的逆序数, 记作 $\tau(s)$ 。逆序数为奇数的排列称为奇排列; 逆序数为偶数的排列称为偶排列。

$$\tau(s_1, s_2, \dots, s_n) = s_1 \text{后面比} s_1 \text{小的数的个数} +$$
$$s_2 \text{后面比} s_2 \text{小的数的个数} + \dots + s_{n-1} \text{后面比} s_{n-1} \text{小的数的个数}$$



§3.3.2 排列的奇偶性

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

互换 s 中 i, j 位置的两个数 s_i 与 s_j 称为一次对换。

下面研究自然数 $1, 2, \dots, n$ 的排列, 称 $(1, 2, \dots, n)$ 为标准排列。

命题 3.10

对换具有以下性质:

- (1) 任一排列经过一次对换, 必改变其奇偶性;
- (2) 任意 n 元排列 (s_1, s_2, \dots, s_n) 都可经过有限次对换变成标准排列 $(1, 2, \dots, n)$; 同一排列 (s_1, s_2, \dots, s_n) 变成标准排列所经历的对换次数 s 不唯一, 但是 s 的奇偶性是确定的且与排列的奇偶性相同。



§3.3.2 排列的奇偶性

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

对每个排列 (j_1, j_2, \dots, j_n) 引入奇偶性符合:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) &= (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{当}(j_1, j_2, \dots, j_n)\text{为偶排列;} \\ -1, & \text{当}(j_1, j_2, \dots, j_n)\text{为奇排列.} \end{cases} \end{aligned}$$

利用排列的奇偶性记号，行列式的解析表达式或展开式是什么？



§3.3.3 方阵的行列式

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

设 $\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i$ ($j = 1, 2, \dots, n$) (视为列向量), 则

$$\det(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \mathbf{e}_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n})$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}),$$

再利用 $\det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)}$, 可得

$$\det(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

思考: 若 $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (视为行向量), 则

$\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 表达式是什么? 是否与上式相等?



§3.3.3 方阵的行列式

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.9

设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 称 A 的行向量组 (列向量组) 张成 n 平行多面体的有向体积为矩阵 A 的行列式, 记作

$$\det(A) = \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \det(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

$$\begin{aligned} &= |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \\ &= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \end{aligned}$$

展开式的项数: $n!$



§3.3.3 方阵的行列式

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.11

方阵的行列式具有以下性质:

(1) $\det(A^T) = \det(A)$;

(2) 当方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为上角阵时, 则

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn};$$

(3) 当准上角阵 $A = (A_{ij})_{k \times k}$ 的每个对角块 A_{ii} 都是方阵时, 则

$$\det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{kk} \end{vmatrix} = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \cdots \det(A_{kk}).$$



§3.3.3 方阵的行列式

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.12

对于任意两个 n 阶方阵 A 和 B , 有 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ 。

更为一般地, 我们有

(Binet-Cauchy 公式)

$$\text{设 } A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times m}, \text{ 则 } \det(AB) = \begin{cases} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \det \left(A \begin{pmatrix} 12 \cdots m \\ j_1 j_2 \cdots j_m \end{pmatrix} \right) \det \left(B \begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_m \\ 12 \cdots m \end{pmatrix} \right), & \text{当 } m < n; \\ \det(A) \det(B), & \text{当 } m = n; \\ 0, & \text{当 } m > n. \end{cases}$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 1

利用**初等变换**，将方阵化为上三角阵、下三角阵或对角阵。

例 3.1

计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}.$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.2

计算 Vandermonde 行列式

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 2

利用行列式的 **Laplace 展开**，将高阶行列式 \Rightarrow 低阶行列式。

定义 3.10

任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的 k 阶子矩阵 $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的行列式，即 $|A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}|$ ，称为 A 的 k 阶子式，简称子式。

定义 3.11

删去 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的第 i 行和第 j 列之后，剩下的 $n - 1$ 阶子矩阵的行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式。

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式。



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.13

(Laplace 展开定理) 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{按某一列展开});$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{按某一行展开}).$$

更为一般地, 我们有

定理 3.14

(Laplace 展开定理) 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 取定行指标

$1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ (列展开情形类似), 则

$$\det(A) =$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \left| A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} \right| \left[(-1)^{i_1 + \dots + i_p + j_1 + \dots + j_p} \left| A \begin{pmatrix} i_{p+1} & \dots & i_n \\ j_{p+1} & \dots & j_n \end{pmatrix} \right| \right].$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.15

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则某一行 (列) 与另一行 (列) 相应元素的代数余子式乘积之和等于 0, 即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0, \forall i \neq j \text{ (按某一行展开);}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = 0, \forall i \neq j \text{ (按某一列展开).}$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.12

设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 引入

$$A^* := (A_{ji})_{n \times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 称 A^* 为 A 的伴随方阵。

利用 Laplace 展开定理 $\Rightarrow AA^* = A^*A = \det(A)I$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章 矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.3

设 $n \geq 2$, 计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & x & a_{n-2} \\ & & & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 3

将方阵分解成若干矩阵的乘积，利用 Binet-Cauchy 公式或一些恒等式来计算行列式。

例 3.5

计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ & \cdots & \cdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章 矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.6

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明:

$$\det(I_n - BA) = \det(I_m - AB).$$

更为一般地, 有 $\lambda^m \det(\lambda I_n - BA) = \lambda^n \det(\lambda I_m - AB)$.

延伸: 计算下列 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ & \cdots & \cdots & \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}.$$



§3.3.4 行列式的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 4

视行列式 $\det(A)$ 为某些元素的多项式, 确定 $\det(A)$ 的次数 m , 求出 $\det(A)$ 的 m 个根 r_1, r_2, \dots, r_m , 再利用 $\det(A) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_m)$, 确定常数 c 即可。

例 3.7

计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}.$$



§3.4 逆矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

矩阵乘法的逆运算 — 除法: $A/B = AB^{-1}$

$$A_{m \times n} B_{n \times l} = C_{m \times l} \Rightarrow A_{m \times n} = C_{m \times l} B_{l \times n}^{-1}$$

$n = l$: 方阵的逆, 何时存在? 是否唯一?

$n \neq l$: 广义逆, 一般不唯一!



§3.4.1 逆矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.13

设 A 是一个 n 阶方阵, 如果存在 n 阶方阵 X 满足

$$XA = AX = I,$$

则称 A 可逆, 并称 X 为 A 的逆矩阵, 记作 A^{-1} 。

可逆方阵也称为非奇异方阵, 称不可逆方阵为奇异方阵。



§3.4.1 逆矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.16

方阵 A 可逆的充分必要条件是 $\det(A) \neq 0$ 。当 A 可逆时, A 有唯一的逆矩阵 $\frac{1}{\det(A)}A^*$ 。

思考: 对于方阵, 定义中的 $AX = XA = I$ 是否可用 $AX = I$ (右逆) 或 $XA = I$ (左逆) 来取代?



§3.4.1 逆矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.17

对任意 n 阶可逆方阵 A, B , 都有

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$(2) (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}, \lambda \neq 0;$$

$$(3) (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1};$$

$$(4) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1};$$

(5) 当 A_1, \dots, A_r 都可逆时,

$$(\text{diag}(A_1, \dots, A_r))^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}).$$

$$\Rightarrow (A_1 A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$$



§3.4.1 逆矩阵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.18

初等方阵具有下列性质：

- (1) S_{ij} 为对称方阵，且 $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$ ；
- (2) $D_i(\lambda)$ 为对角方阵，且 $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$ ；
- (3) $T_{ij}(\lambda)$ 为三角方阵，且 $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$ 。

初等矩阵：可逆且其逆仍为初等矩阵 \Rightarrow 若干初等矩阵的乘积为可逆矩阵；反之，是否正确？

定理 3.19

方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以分解为一系列初等方阵的乘积。



§3.4.2 逆矩阵的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 1

利用恒等式 $AA^* = A^*A = \det(A)I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$ 。

计算量：行列式 $\det(A)$ ， A^* 中有 n^2 个 $(n-1) \times (n-1)$ 行列式。

理论解，仅适用于 A 的阶数较小或 A 的行列式及余子式较易计算的情形。



§3.4.2 逆矩阵的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.8

设 n 方阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1} 。



§3.4.2 逆矩阵的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 2

利用初等变换：

$$(A : I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I : A^{-1})$$

或求解 n 个线性方程组 $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$)。

$$PA = I \Rightarrow A^{-1} = P \Rightarrow PI = A^{-1}$$

思考：是否可以利用初等列变换？如果可以，怎么做？



§3.4.2 逆矩阵的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.9

设 n 方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1} 。



§3.4.2 逆矩阵的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 3

利用矩阵的**分块运算**。

例 3.10

设有分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix},$$

求 M 可逆的条件并算出 M^{-1} 。



§3.4.2 逆矩阵的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

Schur 公式

设 $A \in F^{r \times r}$, $B \in F^{r \times (n-r)}$, $C \in F^{(n-r) \times r}$, $D \in F^{(n-r) \times (n-r)}$, 并且 A 可逆, 则

$$(1) \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$



§3.4.2 逆矩阵的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 4

构造矩阵恒等式，通过矩阵运算直接求出 A^{-1} 。

$$\begin{aligned} A^m = 0 \text{ (幂零方阵)} &\Rightarrow I - A \text{ 可逆, 并且} \\ (I - A)(I + A + \cdots + A^{m-1}) &= I - A^m = I \\ \Rightarrow (I - A)^{-1} &= I + A + \cdots + A^{m-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 = A \text{ (幂等方阵)} &\Rightarrow I + A \text{ 可逆, 并且} \\ (A + I)(A - 2I) &= -2I \\ \Rightarrow (I + A)^{-1} &= I - \frac{1}{2}A. \end{aligned}$$

思考：例 3.9 如何构造矩阵恒等式？



§3.4.3 Cramer 法则

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

Cramer 法则：理论解，运算量非常大，仅适用于阶数较小或相关行列式较易计算的情形。

例 3.11

设 t_1, t_2, \dots, t_n 为各不相同的常数, $y_1 = f(t_1), y_2 = f(t_2), \dots, y_n = f(t_n)$, 试构造多项式 $l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)$ 使得

$$f(t) = y_1 l_1(t) + y_2 l_2(t) + \cdots + y_n l_n(t),$$

对任意次数不超过 $n - 1$ 次的多项式 $f(t)$ 都成立。

⇒ Lagrange 插值多项式



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.14

设 A, B 是 $m \times n$ 矩阵, 如果存在可逆方阵 P 和 Q 使得

$$B = PAQ,$$

则称 A 和 B 相抵。

A 与 B 相抵 \Leftrightarrow 可以通过一系列初等变换将 A 化为 B 。



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

等价关系

在集合 M 上定义二元关系 \sim , 即 $E \subset M \times M$, 若其满足性质:

- (1) (自反性) $x \sim x$;
- (2) (对称性) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
- (3) (传递性) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$,

则称 \sim 为集合 M 上的等价关系。

不难验证: 相抵是矩阵集合 $F^{m \times n}$ 上的一种等价关系。



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

等价类

利用等价关系 \sim ，可以对集合 M 进行分类，

$$\bar{x} = \{y \in M \mid y \sim x\} \subset M,$$

称集合 \bar{x} 为包含元素 x 的等价类。任意元素 $y \in \bar{x}$ 都称为等价类 \bar{x} 的代表元。



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

命题 3.21

由关系 \sim 确定的等价类的集合 $X = \{\bar{x} \mid x \in M\}$ 是集合 M 的一个划分, 即

$$M = \bigcup_{\bar{x} \in X} \bar{x} \text{ 且 } \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset, \forall \bar{x}, \bar{y} \in X,$$

也就是说 M 是这些子集的不交并。



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

等价类的基本问题：

- (1) 等价类的**代表元**是什么？（譬如最简形式的代表元）
- (2) 等价类的**不变量**有哪些？（不变量指该等价类中所有元素都相等的量，是判别等价的必要条件，主要用于判别不等价）
- (3) 等价类的**全系不变量**有哪些？（全系不变量指该等价类中所有元素都相等的量，且不同等价类的全系不变量必不相等，是判别等价的充要条件）

本课程将研究矩阵集合上的三类重要等价关系：**相抵**、**相似**、**相合**！



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

与矩阵 A 相抵的等价类的最简形式代表元是什么？

定理 3.22

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 A 相抵于 $m \times n$ 矩阵 $\text{diag}(I_r, \mathbf{0})$, 即存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中非负整数 r 由 A 唯一决定。

⇒ 相抵标准形



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定义 3.15

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 式 (4) 中的矩阵 $\text{diag}(I_r, \mathbf{0})$ 称为 A 的相抵标准形。整数 r 称为矩阵 A 的秩, 记为 $\text{rank}(A)$ 或 $r(A)$ 。若 $r = m$, 则 A 称为是行满秩的; 若 $r = n$, 则 A 称为是列满秩的。

显然有: $0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.23

设 $A, B \in F^{m \times n}$, 则 A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 。

\Rightarrow 矩阵的秩是相抵等价关系下的不变量, 且是全系不变量。

定理 3.24

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, P, Q 分别是 m, n 阶可逆方阵, 则 $\text{rank}(PAQ) = \text{rank}(A)$ 。

\Rightarrow 初等变换不改变矩阵的秩!



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

引理 3.1

设 A 是 $m \times n$ 方阵, P, Q 分别是 m, n 阶初等方阵。若 A 的所有 k 阶子式都为零, 则 PA 与 AQ 的所有 k 阶子式也为零。

定理 3.25

矩阵 A 有 k 阶非零子式的充分必要条件是 $\text{rank}(A) \geq k$ 。

\Rightarrow 矩阵 A 的秩等于矩阵 A 的**非零子式的最大阶数**, 即矩阵 A 至少有一个 r 阶非零子式, 且 A 的所有 $r+1$ 阶子式都为 0, 则称 A 的秩为 r 。

思考: 矩阵秩的几何含义是什么?



§3.5.1 秩与相抵的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

定理 3.26

矩阵的秩具有以下性质:

$$(1) \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A);$$

$$(2) \operatorname{rank}(A \dot{:} B) \geq \max\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\};$$

$$(3) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B);$$

$$(4) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix};$$

$$(5) \operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A \dot{:} B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$



§3.5.2 秩的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 1

利用定义，找矩阵的**最高阶非零子式**。

例 3.12

计算 n 阶方阵 A 的秩，这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$



§3.5.2 秩的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

技巧 2

利用**初等变换**，将矩阵化为上三角阵、下三角阵或对角阵，求出矩阵的秩。

例 3.13

计算 n 阶方阵 A 的秩，这里

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$



§3.5.3 相抵标准形的应用

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.14

每个秩为 r 的矩阵都可以写成 r 个秩是 1 的矩阵之和。

例 3.15

若 $m \times n$ 矩阵 A 是列满秩的, 则 A 是某个 m 阶可逆方阵的前 n 列。



§3.5.3 相抵标准形的应用

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.16

(Frobenius 秩不等式) 设矩阵 $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times l}$, $C \in F^{l \times p}$, 则 $\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B)$.

例 3.17

设矩阵 $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times l}$, 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$



§3.5.3 相抵标准形中的应用

线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

例 3.18

设矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$ 。



线性代数 (B1)

童伟华

第三章矩阵与
行列式

§3.1 矩阵的定义

§3.2 矩阵的运算

§3.3 行列式

§3.4 逆矩阵

§3.5 秩与相抵

Thanks for your attention!