



线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

# 线性代数 (B1)

童伟华 管理科研楼 1205 室<sup>1</sup>

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

<sup>1</sup> 数学科学学院 中国科学技术大学

2025-2026 学年第二学期 MATH1009.11



# §5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

线性映射：线性空间到线性空间保持线性结构的映射！

## 定义 5.1

设  $V, V'$  为数域  $F$  上的两个线性空间，若映射  $\mathcal{A}: V \rightarrow V'$  满足：对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda \in F$ ，都有

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}), \quad (1)$$

$$\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

则称  $\mathcal{A}$  为从线性空间  $V$  到线性空间  $V'$  的线性映射。特别地，如果  $V' = V$ ，则称  $\mathcal{A}$  为线性空间  $V$  上的一个线性变换。



# §5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

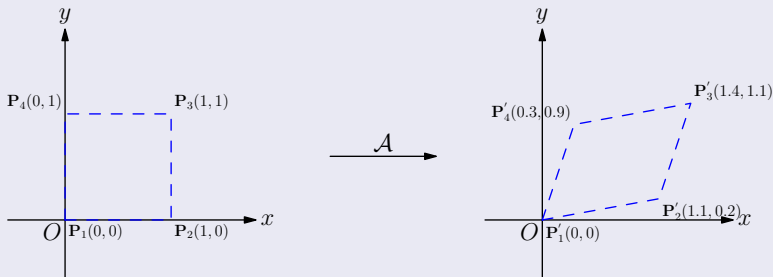
§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 例 5.1

取  $V(F) = \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$ , 定义线性变换  $\mathcal{A} : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ .



思考：长度如何变化？面积如何变化？线性关系如何变化？（共性、比例等）



# §5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 例 5.2

把每个向量映为自身的变换

$$\mathcal{E} : \mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in V,$$

是线性变换, 称为单位变换或恒等变换。

## 例 5.3

把空间的每个向量都映为零向量的变换

$$\mathcal{O} : \mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in V,$$

是一个线性变换, 称为零变换。



# §5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 例 5.4

设映射  $\mathcal{A}: F^n \rightarrow F^m$  由矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n} \in F^{m \times n}$  按如下方式定义:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in F^n,$$

则  $\mathcal{A}$  是线性映射。如果  $m = n$ , 则  $\mathcal{A}$  是线性变换。特别地, 如果  $A = I$ , 则  $\mathcal{A}$  为单位变换; 如果  $A = \mathbf{0}$ , 则  $\mathcal{A}$  为零变换。



# §5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 例 5.5

设  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 则

(1) 反射变换:  $(x_1, x_2)^T \rightarrow (x_1, -x_2)^T$  是线性变换, 可写成

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2;$$

(2) 旋转变换:  $(x_1, x_2)^T \rightarrow (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^T$  是线性变换, 可写成

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$



# §5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 例 5.6

设  $\mathbb{P}_n[x]$  是次数不超过  $n$  的多项式全体,  $\mathcal{A}$  为微分算子

$$\mathcal{A}(p(x)) = \frac{d}{dx} p(x),$$

由微分的性质知  $\mathcal{A}$  为线性变换。



# §5.1.1 线性变换的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 例 5.7

用  $C[a, b]$  表示闭区间  $[a, b]$  上所有实值连续函数构成的集合, 映射  $\mathcal{A} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  定义为

$$\mathcal{A}(f(x)) = \int_a^b K(x, t)f(t) dt,$$

其中  $K(x, t)$  是区域  $[a, b] \times [a, b]$  上的实值连续函数, 由积分的性质知  $\mathcal{A}$  为线性变换。



# §5.1.2 线性变换的性质

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 命题 5.1

设  $V$  是数域  $F$  上的线性空间,  $\mathcal{A}$  是  $V$  上的线性变换。 $\mathcal{A}$  具有以下性质

(1)  $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ;

(2)  $\mathcal{A}(-\alpha) = -\mathcal{A}(\alpha)$ ,  $\alpha \in V$ ;

(3)  $\mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n) = \lambda_1\mathcal{A}(\alpha_1) + \cdots + \lambda_n\mathcal{A}(\alpha_n)$ ;

(4) 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  为线性空间  $V$  的一组基, 则

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \Rightarrow \mathcal{A}(\alpha) = \lambda_1\mathcal{A}(\alpha_1) + \cdots + \lambda_n\mathcal{A}(\alpha_n);$$

(5) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为  $V$  中线性相关的向量, 则

$\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \dots, \mathcal{A}(\alpha_m)$  也线性相关。





## §5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 定义 5.2

设  $\mathcal{A}: V(F) \rightarrow V(F)$  为  $n$  维线性空间  $V(F)$  上的线性变换,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为  $V(F)$  的一组基。如果数域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  满足

$$(\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A,$$

则称方阵  $A$  为线性变换  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的表示矩阵, 简称矩阵。

容易看出:  $A$  的第  $i$  列为向量  $\mathcal{A}(\alpha_i)$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的坐标,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。



## §5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 定理 5.2

设线性变换  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的矩阵为  $A$ 。  
设  $x, y \in V$  且  $y = \mathcal{A}(x)$ , 若  $x, y$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的坐标分别为  $X, Y \in F^n$ , 则  $Y = AX$ 。

⇒ 线性变换  $\mathcal{A}$  的像可以通过矩阵与向量的乘法来计算!



## §5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

$L(V)$ : 数域  $F$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的全体线性变换所构成的集合  
 $M_n(F)$ : 数域  $F$  上的  $n$  阶方阵构成的集合

### 定理 5.3

设  $V$  为数域  $F$  上的  $n$  维线性空间,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为  $V$  的一组基, 则存在一一映射  $\Phi: L(V) \rightarrow M_n(F)$ , 使得  $\forall A \in L(V)$ ,  $\Phi(A)$  为  $A$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的矩阵。

$$\Rightarrow L(V) \xrightarrow{1-1} M_n(F)$$



## §5.2.1 线性变换在一组基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

$L(V)$  与  $M_n(F)$  是否同构?

设  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$ ,  $\lambda \in F$ , 定义  $L(V)$  中的加法与数乘运算:

$$(1) (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{x}) := \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V;$$

$$(2) \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) := \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V, \lambda \in F,$$

及复合运算:  $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V$ .

### 定理 5.4

设  $\Phi: L(V) \rightarrow M_n(F)$  为定理5.3中定义的映射, 则

$$(1) \Phi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A}) + \Phi(\mathcal{B});$$

$$(2) \Phi(\lambda \mathcal{A}) = \lambda \Phi(\mathcal{A});$$

$$(3) \Phi(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = \Phi(\mathcal{B}) \cdot \Phi(\mathcal{A}),$$

对  $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$ ,  $\lambda \in F$  成立。(1) 与 (2)  $\Rightarrow \Phi$  为线性同构映射。



## §5.2.2 线性变换在不同基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

线性空间的维数是最唯一的，而基是不唯一的！ $\Rightarrow$  同一线性变换在不同基下的表示之间有什么关系？

设线性空间  $V$  有两组基： $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  与  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ，线性变换  $\mathcal{A}$  在这两组基下的表示分别为矩阵  $A$  与  $B$

$$\Rightarrow (\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A$$

$$(\mathcal{A}(\beta_1), \dots, \mathcal{A}(\beta_n)) = (\beta_1, \dots, \beta_n)B$$

而  $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)T$ ，从而有

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\mathcal{A}(\beta_1), \dots, \mathcal{A}(\beta_n)) &= \mathcal{A}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \mathcal{A}[(\alpha_1, \dots, \alpha_n)T] \\ &= [\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)]T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)AT \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \dots, \beta_n)B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)AT$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)TB = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)AT$$

$$\Rightarrow TB = AT \Rightarrow B = T^{-1}AT$$



## §5.2.2 线性变换在不同基下的矩阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对  
角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 定理 5.5

设线性变换  $A: V \rightarrow V$  在  $V$  的两组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  下的矩阵分别为  $A$  和  $B$ 。设基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  到基  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵为  $T$ , 即  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)T$ , 则  $B = T^{-1}AT$ 。



## §5.2.3 矩阵的相似

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 定义 5.3

设  $A, B$  为数域  $F$  上的两个  $n$  阶方阵, 如果存在数域  $F$  上的  $n$  阶可逆方阵  $T$ , 使得  $B = T^{-1}AT$ , 则称  $A$  与  $B$  (在数域  $F$  上) 相似, 记为  $A \sim B$ 。

### 命题 5.6

矩阵的相似关系为等价关系, 即满足以下三个条件

- (1) (反身性)  $A \sim A$ ;
- (2) (对称性)  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ ;
- (3) (传递性)  $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ 。

⇒ 按相似关系对  $n$  阶方阵的全体  $F^{n \times n}$  进行分类

⇒ 核心问题: (1) 不变量; (2) 全系不变量; (3) 代表元。



## §5.2.3 矩阵的相似

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

代数上：一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的  $\Rightarrow$  属于该相似类的所有方阵，是否都是该线性变换在不同基下对应的矩阵呢？（回答是肯定的！）

几何上：一个线性空间上的线性变换的性质与该空间的基的选取没有关系  $\Rightarrow$  相似的矩阵都具有的性质，即**相似不变量**



## §5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的，选取适当的基可使线性变换的矩阵变得简单  $\Rightarrow$  给到一个方阵，如何找到一个尽量简单的方阵与之相似呢？（Jordan 标准形，理论分析与证明比较困难）

问题：矩阵相似于对角矩阵的条件？

设  $A \sim \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow$  存在  $n$  阶可逆方阵  $X$ ，使得  $A = T\Lambda T^{-1}$ 。记  $T = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$ ，则

$$\begin{aligned} AT &= T\Lambda \Rightarrow A(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)\Lambda = (\lambda_1\mathbf{t}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{t}_n) \\ &\Rightarrow A\mathbf{t}_i = \lambda_i\mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

关键：找到  $n$  个满足  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  的数  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  和向量  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$ 。



# §5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 定义 5.4

设  $A$  为数域  $F$  上的  $n$  阶方阵, 如果存在  $\lambda \in F$  及非零列向量  $\mathbf{x} \in F^n$ , 使得

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

则称  $\lambda$  为方阵  $A$  的一个**特征值**, 而称  $\mathbf{x}$  为属于特征值  $\lambda$  的一个**特征向量**。

几何解释: 向量  $\mathbf{x}$  在线性变换  $\mathcal{A}$  下保持方向不变 (相同或相反), 长度伸缩  $\lambda$  倍。



# §5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

在一般的  $n$  维线性空间  $V$  上, 可以定义

## 定义 5.5

设  $V$  是数域  $F$  上  $n$  维线性空间,  $A$  为  $V$  上的线性变换。如果存在  $\lambda \in F$  及非零向量  $\alpha \in V$  满足  $A\alpha = \lambda\alpha$ , 则称  $\lambda$  为线性变换  $A$  的一个特征值,  $\alpha$  称为属于特征值  $\lambda$  的一个特征向量。

## 命题 5.7

特征向量有如下性质:

- (1) 若  $\alpha$  是线性变换  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量  $\Rightarrow \mu\alpha$  亦是线性变换  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量,  $\forall \mu \neq 0 \in F$ ;
- (2) 若  $\alpha$  与  $\beta$  是线性变换  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量  $\Rightarrow \alpha + \beta$  亦是线性变换  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量;
- (3) 线性变换  $A$  属于不同特征值的特征向量线性无关。



# §5.3.1 特征值与特征向量的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对角  
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 特征子空间

设  $\lambda$  是方阵  $A$  的特征值, 引入

$$V_A(\lambda) = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}.$$

易知  $V_A(\lambda)$  是  $F^n$  的子空间, 称为矩阵  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的**特征子空间**。

特征子空间: 特征向量 + 零向量

取定  $n$  维线性空间  $V$  的一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :

线性变换  $\mathcal{A}$  的特征值与特征向量  $\Leftrightarrow$  矩阵  $A$  的特征值与特征向量

$\Rightarrow$  可以通过代数的方法求解特征值与特征向量, 即矩阵  $A$  的特征值与特征向量!



## §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

$\lambda$  为方阵  $A$  的特征值

$\Leftrightarrow$  齐次线性方程组  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$  有非零解

$\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$

### 定义 5.6

设  $A$  是数域  $F$  上的  $n$  阶方阵,  $\lambda \in F$ , 称  $\det(\lambda I - A)$  为矩阵  $A$  的特征多项式, 记为  $p_A(\lambda)$ 。

为确保特征值的存在性, 除非特别说明, 我们总假设  $F = \mathbb{C}$  (当  $F$  取  $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{Q}$  时, 特征值与特征向量问题更困难!)



## §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

求解特征值与特征向量的算法:

(1) 计算特征多项式  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ;

(2) 计算  $p_A(\lambda)$  的根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  及重数  $n_1, n_2, \dots, n_s$ , 即

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s};$$

(3) 对每个特征值  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), 求齐次线性方程组

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的基础解系:  $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im_i}$ , 即  $V_{\lambda_i} = \langle \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im_i} \rangle$ 。

⇒ 主要困难: 求解  $n$  次多项式  $p_A(\lambda)$  的根! (事实上, 可以证明, 当  $n \geq 5$  时, 一般的多项式方程是根式不可解的, 即根不能通过有限次加减乘除及开根号表示出来。)



## §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对角  
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 例 5.8

求矩阵  $A$  的全部特征值和特征向量，这里

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 例 5.9

设  $\mathbf{x}$  是方阵  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量，则  $\mathbf{x}$  也是  $kA$ ,  $A^2$ ,  $aA + bI$ ,  $A^m$ ,  $f(A)$ ,  $A^{-1}$ ,  $A^*$  分别属于于特征值  $k\lambda$ ,  $\lambda^2$ ,  $a\lambda + b$ ,  $\lambda^m$ ,  $f(\lambda)$ ,  $\lambda^{-1}$ ,  $\frac{|A|}{\lambda}$  的特征向量，其中  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 。



## §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

若  $A \sim B \Rightarrow$  存在可逆方阵  $T$ , 使得  $B = T^{-1}AT$

$$\begin{aligned} \text{设 } p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &\Rightarrow p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - T^{-1}AT) \\ &= \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \det(\lambda I - A) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

### 命题 5.8

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值。

$\Rightarrow$  特征多项式和特征值是相似不变量, 但不为全系不变量。

### 例 5.10

设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  与  $B$  的特征值相同, 但  $A$  与  $B$  不相似。

思考: 特征向量是相似不变量吗? (否定的!)





# §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

$$\begin{aligned} \text{记 } p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n \end{aligned}$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow c_1 = -\sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad c_n = (-1)^n \det(A).$$

更为一般地, 有

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \lambda^n - \sum_{i=1}^n a_{ii} \lambda^{n-1} + \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \left| A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \right| \right) \\ &+ \cdots + (-1)^k \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \left| A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \right| \right) + \cdots + (-1)^n \det(A). \end{aligned}$$



# §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 命题 5.9

设  $A = (a_{ij})$  为数域  $\mathbb{C}$  上的一个  $n$  阶方阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的  $n$  个特征值, 则

$$(1) \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i;$$

$$(2) \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

## 推论 5.1

$n$  阶方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  的  $n$  个特征值均不为零。

## Cayley-Hamilton 定理

设  $A \in F^{n \times n}$  的特征多项式为  $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_n$ , 则  $p_A(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_n I = \mathbf{0}$ .



## §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 命题 5.10

设  $A, B \in F^{n \times n}$ , 且  $A \sim B$ , 则

(1)  $A^T \sim B^T$ ,  $A^{-1} \sim B^{-1}$  (若  $A, B$  均可逆),  $A^* \sim B^*$ ;

(2)  $A^k \sim B^k$ ;

(3)  $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ ;

(4)  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ;

(5)  $\det(A) = \det(B)$ ;

(6)  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ 。

⇒ 矩阵的秩、行列式、迹均为相似不变量!



## §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 例 5.11

已知矩阵  $A$  与  $B$  相似, 求  $x$  和  $y$ 。这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 例 5.12

设  $n$  阶方阵  $A$  的  $n$  个特征值分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 求  $I + A$  的特征值及  $\det(I + A)$ 。



## §5.3.2 特征值与特征向量的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 例 5.13

设方阵  $A$  满足  $A^k = \mathbf{0}$ , 证明:  $\det(I - A) = 1$ 。

### 例 5.14

设  $A$  为  $n$  阶实矩阵满足  $AA^T = I$ , 且  $|A| < 0$ , 试求  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  的一个特征值。



# §5.4 矩阵的相似对角化

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

相似等价类的代表元?  $\Rightarrow$  对角阵或准对角阵

例 5.15

证明  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  不能相似于对角阵。

$\Rightarrow$  相似等价类的代表元是准对角阵, 即 Jordan 标准形

问题: 满足什么条件的矩阵能相似于对角阵?



# §5.4.1 相似于对角阵的充要条件

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 定义 5.7

如果一个方阵相似于对角阵, 则称该方阵可对角化, 也称相应的线性变换可对角化。

## 定理 5.11

数域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A$  相似于对角阵  $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

## 推论 5.2

如果矩阵  $A$  的  $n$  个互不相同的特征值, 则  $A$  相似于对角阵。



## §5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

相似对角化条件是否有更细致的刻画?

### 代数重数

设  $A \in F^{n \times n}$  ( $F = \mathbb{C}$ ),  $A$  的特征多项式

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad (n_1 + \cdots + n_s = n),$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  为  $A$  的所有不同特征值, 则称  $n_i$  为特征值  $\lambda_i$  的代数重数。

### 几何重数

特征值  $\lambda_i$  的特征子空间  $V_A(\lambda_i)$  的维数, 即线性方程组  $(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解空间的维数, 称为特征值  $\lambda_i$  的几何重数。



## §5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 引理 5.1

设  $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) 是  $A$  的属于特征值  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量组, 则  $\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{1m_1}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \dots, \mathbf{x}_{2m_2}, \dots, \mathbf{x}_{s1}, \mathbf{x}_{s2}, \dots, \mathbf{x}_{sm_s}$  也是线性无关的向量组。

### 引理 5.2

设  $\lambda_i$  为  $n$  阶复方阵  $A$  的特征值, 则它的几何重数不超过它的代数重数, 即  $m_i \leq n_i$ 。

### 定理 5.12

复方阵  $A$  可对角化  $\Leftrightarrow A$  的每个特征值的几何重数与代数重数相等, 即  $m_i = n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ )。



## §5.4.2 特征值的代数重数与几何重数

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对角  
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.16

设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似于对角阵, 求  $x$  和  $y$  应满足的条件。

例 5.17

设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) = n$ , 证明  $A^2 = I$ 。



## §5.4.3 相似于上三角阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

对任意的方阵  $A \in C^{n \times n}$ , 需要满足一定条件才能相似于对角阵  $\Rightarrow$  问题: 是否可以相似于上三角阵?

### 定理 5.13

任何一个  $n$  阶复方阵  $A$  都可以相似于一个上三角阵, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的所有特征值。

注意: 复方阵  $A$  总可以相似于上三角阵, 但这些上三角阵可以是不唯一的!  $\Rightarrow$  不能作为相似等价类的代表元。



## §5.4.3 相似于上三角阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.18

求与矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  相似的上三角阵。

例 5.19

设  $x, y, z$  都是  $t$  的函数, 求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy(t)}{dt} = 2x + 2y - z, \\ \frac{dz(t)}{dt} = x + 2y - z. \end{cases}$$



## §5.4.3 相似于上三角阵

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

常用数学软件：MATLAB（数值计算）、Mathematica、Maple（符号计算）

For Mathematica:

```
A := {{2, -1, 1}, {2, 2, -1}, {1, 2, -1}}
```

```
SchurDecomposition[N[A]]//MatrixForm
```

```
JordanDecomposition[A]//MatrixForm
```

For MATLAB:

```
A = [2, -1, 1; 2, 2, -1; 1, 2, -1]
```

```
[U, T] = schur(A)
```

```
[V, T] = jordan(A)
```



# §5.5.1 若尔当标准形的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

相似等价类的代表元? —— 若尔当标准形 (Jordan canonical form)

## 定义 5.8

设  $\lambda$  是任意复数,  $m$  是任意正整数, 形如

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{m \times m}$$

的  $m$  阶方阵称为若尔当块, 记作  $J_m(\lambda)$ , 其中  $\lambda$  是对角线元素, 也是特征值。因此  $J_m(\lambda)$  也称为特征值为  $\lambda$  的  $m$  阶若尔当块。



# §5.5.1 若尔当标准形的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 定义 5.9

如果一个方阵是准对角阵，并且每个对角块都是若当块，则称之为若当形矩阵。

注意：一个若当形矩阵的某些若当块可能具有相同的特征值。例如矩阵

$$\text{diag}(J_4(2), J_3(2), J_1(2), J_3(5))$$

是一个若当形矩阵。



# §5.5.1 若尔当标准形的定义

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## 定理 5.14

任何一个复方阵  $A$  都相似于一个若尔当形矩阵  $J$ , 即

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中  $J_i = \text{diag}(J_{m_{i1}}(\lambda_i), \dots, J_{m_{ik_i}}(\lambda_i))$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  是  $A$  的  $s$  个不同特征值。如果不计若尔当块的排列顺序, 则  $J$  是唯一的。

(证明见参考书籍, 比较难, 代数:  $\lambda$ -矩阵方法, 几何: 根子空间、循环子空间)



## §5.5.2 若尔当标准形的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

求复数域  $\mathbb{C}$  上的  $n$  阶方阵  $A$  的若尔当标准形的算法:

(1) 求出  $A$  的特征多项式和全部特征值:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad \sum_{i=1}^s n_i = n;$$

(2) 对每个特征值  $\lambda_i$ , 计算序列  $A - \lambda_i I, (A - \lambda_i I)^2, (A - \lambda_i I)^3, \dots$ ,

记  $r_k = \text{rank}(A - \lambda_i I)^k, k \geq 0$ , 约定  $r_0 = n$ ,

$$d_k = r_{k-1} - r_k, \quad k \geq 1,$$

$$\delta_k = d_k - d_{k+1}, \quad k \geq 1,$$

则  $d_k = J$  中特征值为  $\lambda_i$  的阶大于等于  $k$  的若尔当块的个数,

$\delta_k = J$  中特征值为  $\lambda_i$  的阶等于  $k$  的若尔当块的个数;

(3) 依据  $\delta_k, k \geq 1$ , 写出  $A$  的若尔当标准形。



# §5.5.2 若尔当标准形的计算

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

例 5.20

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的若尔当标准形。

问题：如何求可逆矩阵  $T$  使得  $T^{-1}AT = J$  ?

有两种方法：(1) 待定系数法；(2) 几何方法。



## §5.5.3 若尔当标准形的应用

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

### 例 5.21

证明:  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = A$  的充要条件是  $A$  相似于准对角阵  $\text{diag}(I_r, 0)$ , 这里  $r = \text{rank}(A)$ 。

### 例 5.22

设  $x, y, z$  都是  $t$  的函数, 求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -4x + 9y - 4z, \\ \frac{dy(t)}{dt} = -9y + 18y - 8z, \\ \frac{dz(t)}{dt} = -15x + 29y - 13z. \end{cases}$$



## §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

常用搜索引擎：Google, Baidu 等。主要用途：输入一个关键词，搜索引擎在很短时间内找到与关键词相关的网页，并按照重要性将所有网页排序。

著名的 PageRank 算法：1998 年，斯坦福大学的两位博士生 Sergey Brin 与 Lawrence Page 在 WWW 国际会议论文集上发表了一篇学术论文<sup>1</sup>，讨论网页搜索与排序问题，并据此创立了 Google 公司。

---

<sup>1</sup>Sergey Brin and Lawrence Page. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine. Proceedings of the Seventh International Conference on World Wide Web, pp. 107–117. 1998.



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## Google 公司的创始人





# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## Google 公司创立的历史

- 1995 年秋天, Larry Page 进入斯坦福大学后, 师从 Terry Winograd 教授攻读博士学位; Sergey Brin 是斯坦福大学计算机系研二学生;
- 1996 年, Page 建立了一个实验用的搜索引擎, 称为 BackRub, 对 1000 万份网页进行分析 + 网络爬虫工具 (下载网页);
- 随后, Brin 加入 Page 的团队
- 随着 BackRub 用户的不断增加, Page 和 Brin 意识到 BackRub 的价值, 准备出售, 然而却无人问津;
- 决定: 自己干! —— Google



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对角  
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## Google 公司创立的历史

- Google: 本是一数学名词, 代表 1 后面 100 个零, 体现了 Google 公司整合网上海量信息的远大目标;
- 1998 年 9 月, Google 公司在—个车库中诞生了;
- 创业风险: 当年 Brin 把创业计划告诉导师时, 他的导师非常支持, 表示如果创业不成功还可回来继续读书, 于是两个人都办理了休学手续专心创业!
- 优势: 数学 + 算法;



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

截至 2022 年 5 月 11 日, Google 最新市值 15090.78 亿美元!





# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

数学模型：

- 研究：互联网复杂的数学结构；
- 模型：图 (Graph)；
- 建模：在互联网中，每台计算机就是一个结点，而两个页面之间的链接则是连接两个结点的连线；
- 问题：如何评价网页的重要性？



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

基本思路：

- Page 和 Brin 共同开发了一套网页评级系统 PageRank：当从网页 A 链接到网页 B 时，系统就认为“网页 A 投了网页 B 一票”。系统根据网页的得票数评定其重要性；
- 除了考虑网页得票数（即链接）的纯数量之外，系统还要分析投票的网页。“重要”的网页所投出的票就会有更高的权重，并且有助于提高其它网页的“重要性”。



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

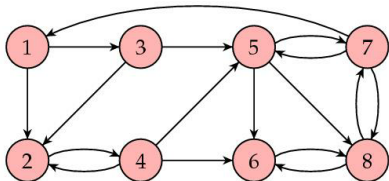
§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

## PageRank 的数学模型



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{pmatrix}$$



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对角  
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

设互联网上有  $N$  个网页，每个网页的重要性为  $I(P)$ ，则

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中  $B_i$  表示所有指向  $P_i$  的网页集合， $l_j$  表示  $P_j$  指向网页的个数。

记  $H = (h_{ij})_{N \times N}$ ，其中

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, & \text{if } P_j \in B_i, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_N) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_N) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = H\mathbf{x}$$



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对角  
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

矩阵  $H$  满足如下性质:

- 每个元素  $h_{ij}$  非负;
- 每一列的元素之和为 1, 即  $\sum_{j=1}^N h_{ij} = 1 (i = 1, 2, \dots, N)$ ,

称满足上述性质的矩阵  $H$  为列随机矩阵。

矩阵  $H$  的每个元素  $h_{ij}$  可解释为从网页  $P_i$  到网页  $P_j$  的访问概率, 此时称  $H$  为概率转移矩阵。

⇒ PageRank: 求矩阵  $H$  属于特征值 1 的特征向量!



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义  
与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向  
量

§5.4 矩阵的相似对角  
化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

随机过程理论 (概率解释): Markov 随机过程

特征向量  $\mathbf{x}$ : 稳定分布向量

如何计算: (幂法, Power method)

$$\mathbf{x}^{k+1} = H\mathbf{x}^k, k = 0, 1, 2, \dots,$$

问题:

- 迭代是否收敛?
- 迭代是否与初值的选取有关?
- 稳定分布向量  $\mathbf{x}$  是否包含我们需要的信息?



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

幂法：用于求矩阵按模最大的特征值及相应的特征向量

收敛的一个充分条件：有  $N$  个线性无关的特征向量且特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_N|,$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \mathbf{v}_N,$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^1 = H\mathbf{x}^0 = c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \lambda_N \mathbf{v}_N,$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^2 = H\mathbf{x}^1 = c_1 \lambda_1^2 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \lambda_N^2 \mathbf{v}_N,$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^k = H\mathbf{x}^{k-1} = c_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \lambda_N^k \mathbf{v}_N,$$

$$= \lambda_1^k \left[ c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_N \right],$$

$$\approx \lambda_1^k c_1 \mathbf{v}_1.$$

容易看出：收敛速度取决于  $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$



## §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

在幂法中, 当  $k \rightarrow +\infty$  时,  $\mathbf{x}^k \rightarrow \begin{cases} 0, & |\lambda_1| < 1, \\ \infty, & |\lambda_1| > 1. \end{cases}$ , 从而导致  $\mathbf{x}^k$  的分量过大 (上溢) 或过小 (下溢)。

在实际运算中, 采用如下带规范运算的幂法

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = A\mathbf{y}^k, \\ \mathbf{y}^{k+1} = \frac{\mathbf{x}^{k+1}}{\|\mathbf{x}^{k+1}\|_\infty}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

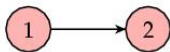
§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

异常的例子 1:



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

原因：含有悬空的节点（不包含任何链接的节点）

修正：将悬空节点所在列的每个  $h_{ij}$  值改为  $\frac{1}{N}$ ，即网民浏览到悬空节点后，他（她）可以随机任意打开一个新的页面  $P_j$ 。

$$S = H + A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A \text{ 为修正矩阵} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

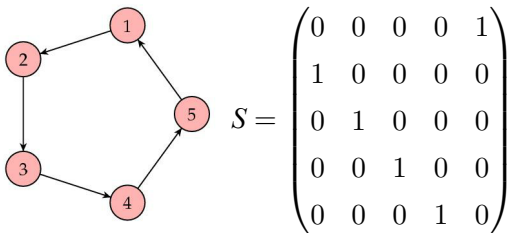
§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

异常的例子 2:



问题:  $|\lambda_2| = 1$ , 导致幂法不收敛

满足  $1 > |\lambda_2|$  的一个充分条件: 矩阵  $S$  是素的 (Primitive), 即存在  $m \in \mathbb{N}$  使得  $S^m$  的所有元素都是正的。



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

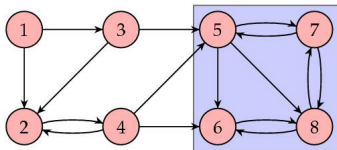
§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

异常的例子 3:



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1200 & 0.2400 & 0.2400 & 0.4000 \end{pmatrix}^T$$

问题: 大的网络包含了一个小的网络, 小网络内的节点没有出去的链接, 导致节点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的重要性为 0。

满足重要性都是正数的一个充分条件: 矩阵  $S$  是不可分拆

(Irreducible), 即不存在置换方阵  $P$  使得  $P^{-1}SP$  是准上角矩阵。



## §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

PageRank 模型:

$$G = \omega S + (1 - \omega) \frac{1}{N} \mathbf{1} = \omega H + \omega A + (1 - \omega) \frac{1}{N} \mathbf{1},$$

其中  $\mathbf{1}$  表示元素全为 1 的  $n$  阶方阵,  $\omega \in [0, 1]$  为权重, Google 搜索引擎取  $\omega = 0.85$ 。

模型的概率解释: 假设互联网有  $N$  个网页  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , 网民在每个时刻只能打开一个网页。他(她)有可能随机点击当前网页中的某个链接, 跳转到新的网页; 也有可能关闭当前页面, 再随机打开一个网页。假设他点击链接的概率是  $\omega$ , 则关闭当前页面的概率是  $1 - \omega$ 。在无限长时间后的某个时刻, 网页  $P_j$  被访问的概率  $p_j = I(P_j)$  就被定义为它的 PageRank。



# §5.6 Google 搜索排序

线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

数学工具：随机过程理论

容易验证： $G$  是列随机矩阵且  $G$  的所有元素都是正的  
 $\Rightarrow G$  是不可分拆的素矩阵！

注意：对于互联网来说， $N$  非常大！  
 $\Rightarrow$  计算特征向量仍然是非常耗时的！

The size of the World Wide Web (The Internet): <sup>2</sup>

The Indexed Web contains at least 2.46 billion pages (Tuesday, 10 May, 2022).

---

<sup>2</sup><http://www.worldwidewebsite.com/>



线性代数 (B1)

童伟华

第五章 线性变换

§5.1 线性变换的定义与性质

§5.2 线性变换的矩阵

§5.3 特征值与特征向量

§5.4 矩阵的相似对角化

§5.5 若尔当标准形

§5.6 Google 搜索排序

# Thanks for your attention!