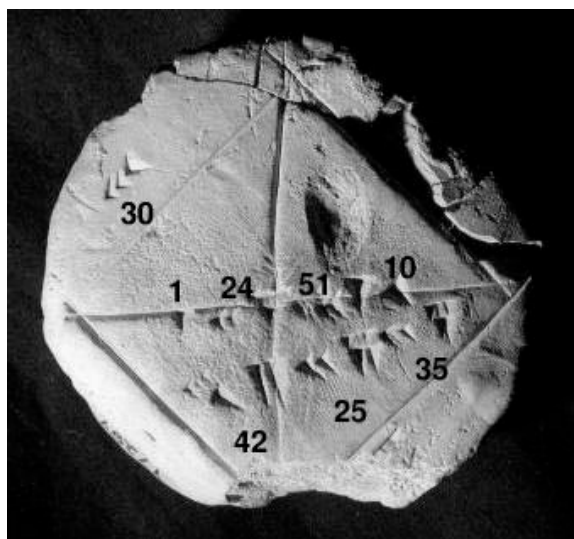


计算方法 (A)

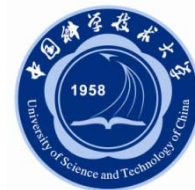


童伟华 管理科研楼1205室

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

中国科学技术大学 数学科学学院

<http://math.ustc.edu.cn/>





第四章 非线性方程求根

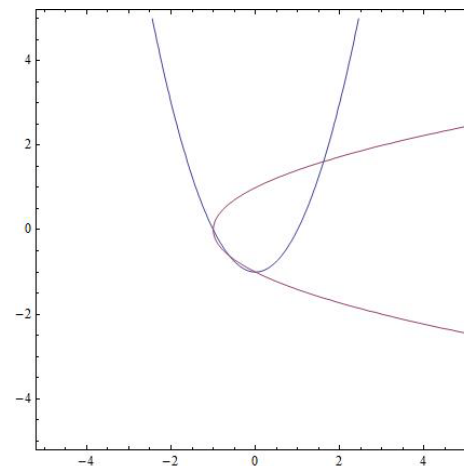
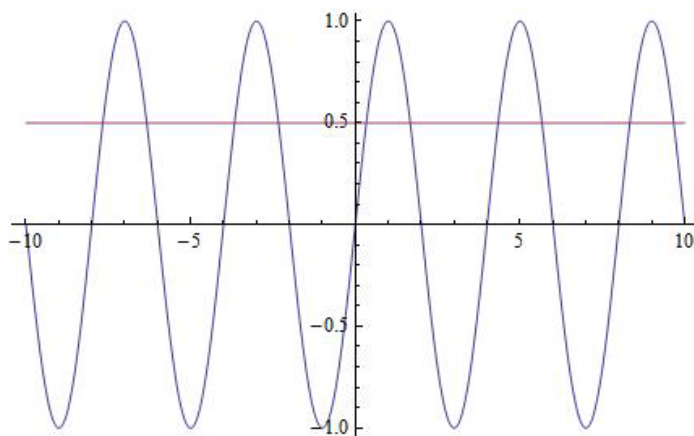
非线性方程求根

- 非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向
- 非线性方程的求根非常复杂
- 例如：

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

无穷组解

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$



非线性方程求根

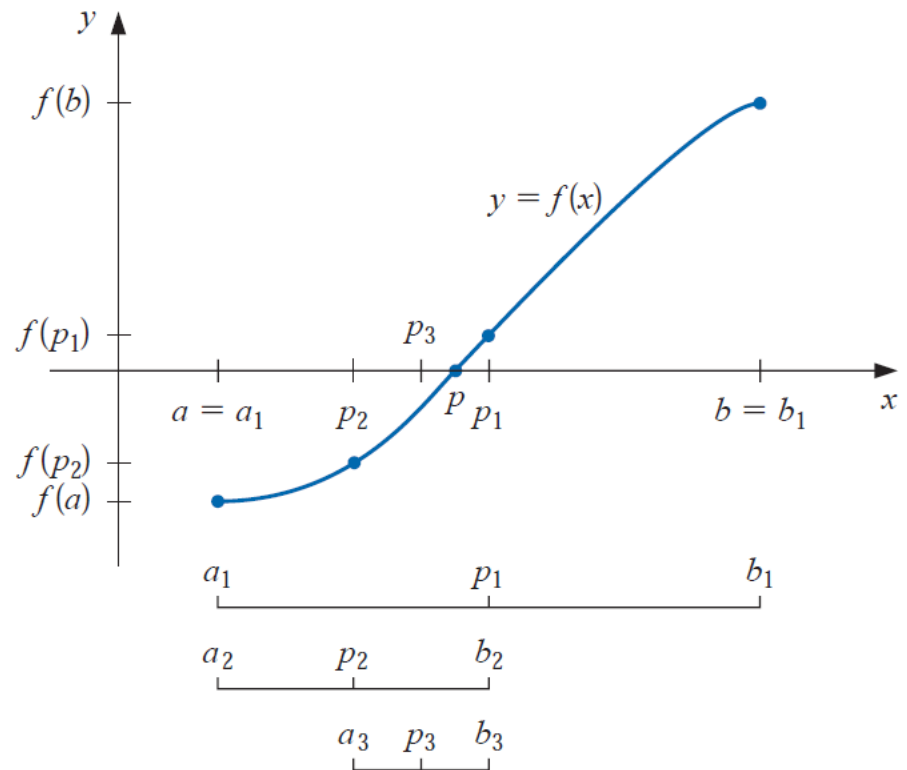


- 非线性方程的根通常不止一个，很难找到所有的解
- 非线性方程求根，通常需要给定初始值或求解范围，用迭代法求解
- (介值定理) 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的一个连续函数，那么 $f(x)$ 取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个值，即如果 y 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一个数，那么存在一个数 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = y$
(推论) $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x, s.t., f(x) = 0$

对分法



- 基于微积分中的介值定理，对区间 $[a, b]$ 不断进行细分，缩小搜索区间
- 停止标准： $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_1$ 或 $|f(x)| < \varepsilon_2$



对分法



■ 对分算法

Algorithm 6 Bisection Algorithm

Input:

$f(x), a, b, M, \delta, \varepsilon$

- 1: $u \leftarrow f(a)$;
- 2: $v \leftarrow f(b)$;
- 3: $e \leftarrow b - a$;
- 4: **if** $\text{sign}(u) == \text{sign}(v)$ **then**
- 5: **return false**;
- 6: **end if**
- 7: **for** $k = 1$ to M **do**
- 8: $e \leftarrow e/2$;
- 9: $c \leftarrow a + e$;
- 10: $w \leftarrow f(c)$;
- 11: **if** $|e| < \delta$ **or** $|w| < \varepsilon$ **then**
- 12: **return true**;
- 13: **end if**
- 14: **if** $\text{sign}(w) \neq \text{sign}(u)$ **then**
- 15: $b \leftarrow c$;
- 16: $v \leftarrow w$;
- 17: **else**
- 18: $a \leftarrow c$;
- 19: $u \leftarrow w$;
- 20: **end if**
- 21: **end for**
- 22: **return false**;

Output:

c, w

迭代法



- **基本思想：**将方程 $f(x)=0$ 转换成等价形式 $x = \varphi(x)$ ，给定初值 x_0 ，构造迭代序列：

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 1, 2, \dots$$

若迭代收敛，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = x^*,$$

则有 $f(x^*) = 0$

- **基本问题：**

- 如何构造迭代格式？
- 是否收敛？收敛速度？
- 收敛的条件？（例如是否与初值相关？）

迭代法



■ **定理：** 设 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的连续，如果 $\varphi(x)$ 满足

(1) 当 $x \in [a,b]$ 时，有 $a \leq \varphi(x) \leq b$ ；

(2) $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且存在正数 $L < 1$ ，使对任意的 $x \in [a,b]$ ，都有 $|\varphi'(x)| \leq L$ ，

则存在唯一的点 $x^* \in [a,b]$ ，使得 $x^* = \varphi(x^*)$ 成立，而且迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对于任意的初值 $x_0 \in [a,b]$ 均收敛于 $\varphi(x)$ 的不动点 x^* ，并有误差估计公式

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

■ **构造迭代格式的要害：**

- 等价形式 $x = \varphi(x)$ 满足 $|\varphi'(x)| < 1$ ；
- 初始值取自 x^* 的充分小邻域；

迭代法



■ 定义：设迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^* ，

记 $e_k = x_k - x^*$ ，若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C > 0$ ，则称该迭代格式为 p

阶收敛的，其中 C 称为渐进误差常数

Newton迭代法



- 将函数 $f(x)$ 在 x_0 处做Taylor展开:

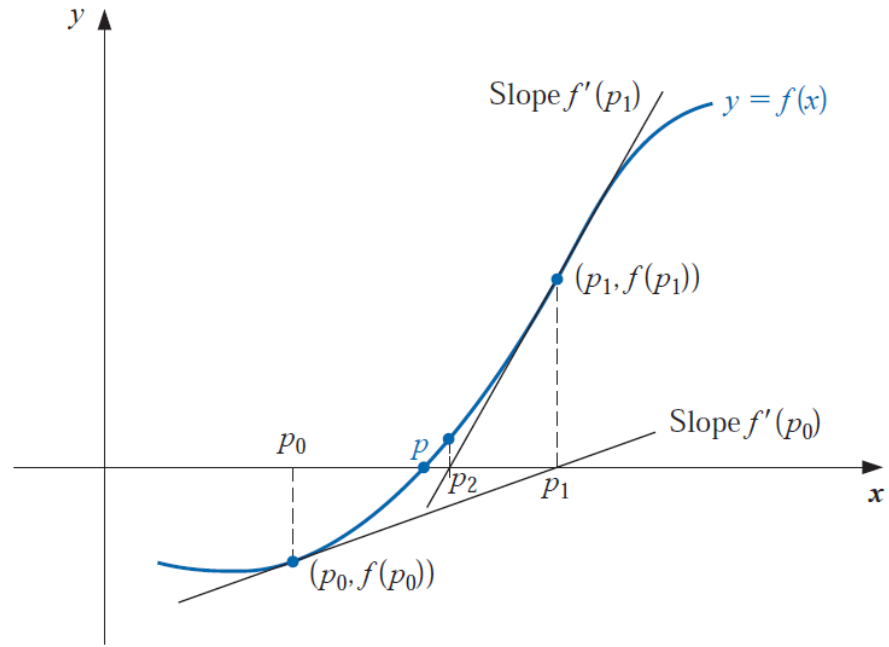
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \approx 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Newton迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$



Newton迭代法



- **(收敛性)** 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, x^* 为 $f(x)$ 的单根, 则存在 $\delta > 0, C > 0$, 使得对任意的初值 $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, Newton迭代法是2阶收敛的, 即有 $|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2$ ($n \geq 0$).
- **(重根情形)** 若 $f(x) \in C^{m+1}[a, b]$, x^* 为 $f(x)$ 的 m 重根, 则存在 $\delta > 0, C > 0$, 使得对任意的初值 $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, Newton迭代法1阶收敛的, 即有 $|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|$ ($n \geq 0$).
- **修正:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)} \quad \Longrightarrow \quad |x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2 \quad (n \geq 0).$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \\ f(x) = (x - x^*)^m p(x) \end{array} \right\} \Longrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

Newton迭代法



■ Newton迭代算法

Algorithm 7 Newton's Algorithm

Input:

$f(x), x_0, M, \delta, \varepsilon$

1: $v \leftarrow f(x_0)$;

2: **if** $|v| < \varepsilon$ **then**

3: **return true**;

4: **end if**

5: **for** $k = 1$ to M **do**

6: $x_1 \leftarrow x_0 - v/f'(x_0)$;

7: $v \leftarrow f(x_1)$;

8: **if** $|x_1 - x_0| < \delta$ **or** $|v| < \varepsilon$ **then**

9: **return true**;

10: **end if**

11: $x_0 \leftarrow x_1$;

12: **end for**

13: **return false**;

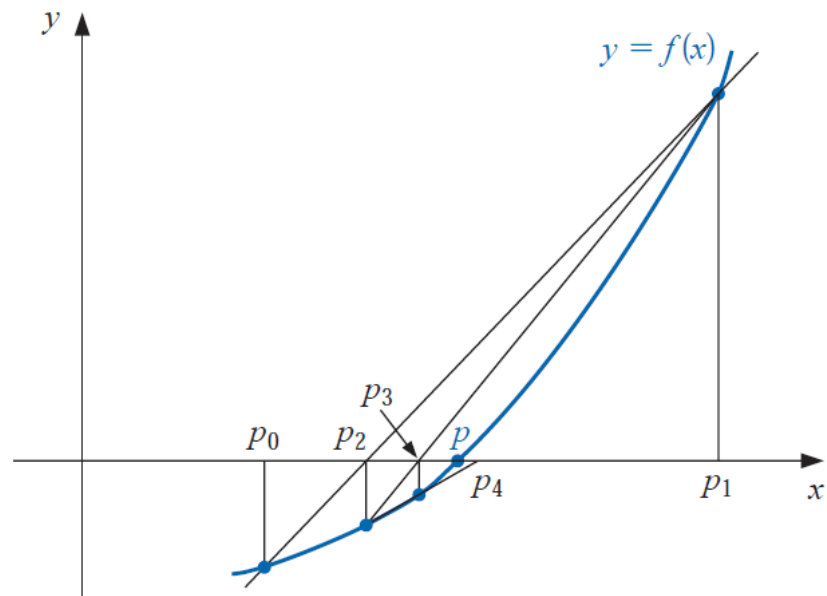
Output:

x_0, v

弦截法

- Newton法：需要求导数
- 思想：用差商代替导数
- 弦截法迭代格式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



弦截法



- **(收敛性)** 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, x^* 为 $f(x)$ 的单根, 则存在 $\delta > 0$, $C > 0$, 使得对任意的初值 $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, 弦截法收敛, 收敛阶为 $(1 + \sqrt{5})/2$, 即有

$$|x_{n+1} - r| \leq C |x_n - r|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad (n \geq 0).$$

■ 弦截迭代算法

Algorithm 8 Secant Algorithm

Input:

```
 $f(x), a, b, M, \delta, \varepsilon$   
1:  $u \leftarrow f(a)$ ;  
2:  $v \leftarrow f(b)$ ;  
3: for  $k = 2$  to  $M$  do  
4:   if  $|u| > |v|$  then  
5:      $a \leftrightarrow b$ ;  
6:      $u \leftrightarrow v$ ;  
7:   end if  
8:    $s \leftarrow (b - a)/(v - u)$ ;  
9:    $b \leftarrow a$ ;  
10:   $v \leftarrow u$ ;  
11:   $a \leftarrow a - u * s$ ;  
12:   $u \leftarrow f(a)$ ;  
13:  if  $|u| < \varepsilon$  or  $|b - a| < \delta$  then  
14:    return true;  
15:  end if  
16: end for  
17: return false;
```

Output:

x_0, v

非线性方程组的Newton方法



■ 考虑二阶非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \approx 0 \\ f_2(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \approx 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -f_1(x_0, y_0) \\ -f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

■ Newton迭代格式:

$$J(x_k, y_k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k) \\ -f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}, \quad \Delta x = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k$$

非线性方程组的Newton方法



■ 对于一般的 n 阶非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$



$$F(X) = 0, F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

■ Newton迭代格式:

$$X_{k+1} = X_k - \frac{F(X_k)}{F'(X_k)} = X_k - (J(X_k))^{-1} F(X_k) \Leftrightarrow J(X_k)(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k)$$

$$J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$