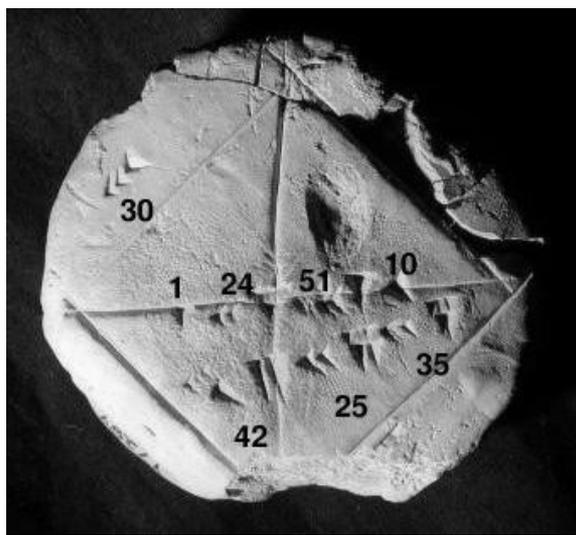


计算方法 (A)



童伟华 管理科研楼1205室

E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

中国科学技术大学 数学科学学院

<http://math.ustc.edu.cn/>





第八章 常微分方程数值解

微分方程数值解

- 在科学研究或工程领域中，有许多数学模型都是通过微分方程来描述的，求解微分方程是非常重要的、关键的问题
- 微分方程按自变量的个数可分为：
 - 常微分方程
 - 偏微分方程
- 微分方程按定解条件可分为：
 - 初值问题
 - 边值问题

微分方程数值解

- 研究微分方程解析解的学科：数学物理方程，但是绝大部分的微分方程是没有解析解的
- 数值求解微分方程没有统一的算法，针对不同类型的微分方程，需要设计特定的算法
- 目前，研究数值求解微分方程的方法是热门的课题，正在迅速发展之中，常见的方法：
 - 有限差分法
 - 有限元方法
 - 有限体积法
 - 边界元方法
 - 谱方法
 - ...

微分方程数值解

- 常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) , & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- 为了使解存在唯一，一般需要对函数 $f(x, y)$ 加限制条件
- (初值问题解的存在唯一性) 若函数 $f(x, y)$ 在条带 $a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty$ 上连续，且满足Lipschitz条件，即 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ ，则初值问题的解在区间 $[a, b]$ 上存在且唯一

微分方程数值解

- 常微分方程的解是一个函数，但是，计算机没有办法直接对函数进行运算
- 常微分方程的数值解采用数值离散的方法，即在一系列离散点列上，求未知函数在这些点上函数值的近似
- 基本步骤如下：
 - (1) 对区间进行分割： $\Delta_I : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ （即对函数定义域进行离散），目标是求解 $\{y_i = y(x_i)\}$ 的值
 - (2) 对微分方程进行离散，建立关于 $\{y_i\}$ 的方程，一般要求满足：解的存在唯一性、稳定性、收敛性、相容性
 - (3) 解关于 $\{y_i\}$ 方程，求出 $\{y_i\}$ 的值

微分方程数值解



■ 主要问题:

- 如何对定义域进行离散?
- 如何对微分方程进行离散?
- 收敛性问题, 即步长充分小时, 所得到的数值解能否逼近问题的真解
- 误差估计
- 稳定性问题, 即舍入误差在以后各步的计算中, 是否会无限制扩大
- 计算效率
- 并行计算
-

Euler公式



- 对定义域 $[a, b]$ 作等距剖分, 即

$$\Delta_I : x_i = a + hi, \quad h = \frac{b-a}{m}, \quad i = 0, 1, \dots$$

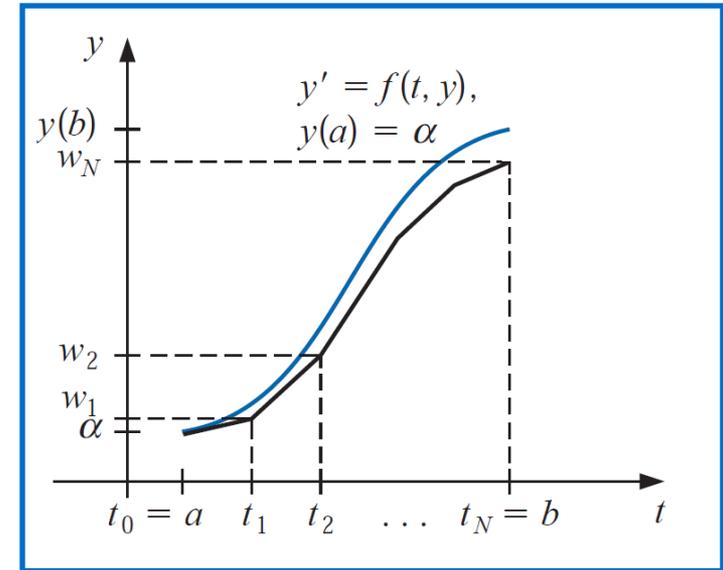
- 向前差商公式

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(\xi_i)$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i)) + \frac{h}{2} y''(\xi_i)$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$



Euler公式



- 定义：在假设第 i 步计算是精确的前提下，考虑截断误差 $T_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$ ，称 T_{i+1} 为局部截断误差。若 $T_{i+1} = O(h^{p+1})$ ，则称方法是 p 阶相容的，简称相容
- 向前差商公式的局部截断误差：

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y_{i+1} \\ &= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) - y_{i+1} \\ &= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) - y_i - hf(x_i, y_i) \\ &= \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

Euler公式



- 整体截断误差和收敛性：考虑局部截断误差的积累和传播

$$\begin{aligned} |e_{i+1}| &= |y(x_{i+1}) - y_{i+1}| \\ &= \left| y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) - y_i - hf(x_i, y_i) \right| \\ &\leq |y(x_i) - y_i| + h |f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)| + |T_{i+1}| \\ &\leq |e_i| + hL |y(x_i) - y_i| + |T_{i+1}| \\ &\leq (1 + hL) |e_i| + T, \quad T = \max_j |T_j| \\ &\leq (1 + hL) \left((1 + hL) |e_{i-1}| + T \right) + T \\ &= (1 + hL)^2 |e_{i-1}| + ((1 + hL) + 1) T \\ &\leq (1 + hL)^2 \left((1 + hL) |e_{i-2}| + T \right) + ((1 + hL) + 1) T \\ &= (1 + hL)^3 |e_{i-2}| + \left((1 + hL)^2 + (1 + hL) + 1 \right) T \end{aligned}$$

Euler公式

■ 整体截断误差和收敛性：

$$\leq \dots$$

$$\leq (1+hL)^{i+1} |e_0| + \left((1+hL)^i + \dots + 1 \right) T$$

$$= (1+hL)^{i+1} |e_0| + \frac{1 - (1+hL)^{i+1}}{1 - (1+hL)} T$$

$$\leq (1+hL)^{i+1} |e_0| + \frac{(1+hL)^{i+1}}{hL} T$$

$$\leq (1+hL)^{i+1} \left(|e_0| + \frac{T}{hL} \right)$$

$$\leq e^{(i+1)hL} \left(|e_0| + \frac{T}{hL} \right) \leq e^{(b-a)L} \left(|e_0| + \frac{T}{hL} \right)$$

是1阶方法

■ 当 $e_0 = 0, h \rightarrow 0$ 时, $T = O(h^2) \Rightarrow e^{(b-a)L} \left(|e_0| + \frac{T}{hL} \right) \rightarrow 0$, 即 Euler 公式是收敛的

Euler公式



- 稳定性：误差在以后各步的计算中不会无限制扩大
- 下面考虑简单情况：仅初值有误差，而其他计算步骤无误差

- 设 $\{z_i\}$ 是初值有误差后的计算值，则

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + hf(x_i, z_i)$$

$$\Rightarrow |e_{i+1}| \equiv |y_{i+1} - z_{i+1}| \leq |e_i| + h|f(x_i, y_i) - f(x_i, z_i)|$$

$$\leq |e_i| + hL|y_i - z_i| = |e_i|(1 + hL)$$

$$\leq \dots + hL)^{i+1} \leq |e_0|e^{(i+1)hL} \leq C|e_0|$$

- 可以看出，向前差商公式关于初值是稳定的。当初始误差充分小，以后各步的误差也充分小

Euler公式



■ 向后差商公式

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = y'(x_{i+1}) + \frac{h}{2} y''(\xi_i)$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + \frac{h}{2} y''(\xi_i)$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

■ 隐式格式，需要迭代求解

Euler公式



■ Picard迭代格式:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

■ 记 $\phi(y) = y_i + hf(x_{i+1}, y)$, 则当 h 充分小时,

$$|\phi'(y)| = |hf_y(x_i, y)| \leq hL < 1$$

从而迭代收敛

Euler公式



■ 中心差商公式

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} = y'(x_i) + \frac{h^2}{3!} y'''(\xi_i)$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} = f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{3!} y'''(\xi_i)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

■ 多步格式，二阶格式，数值不稳定

■ 基于数值积分的近似公式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), x \in [a, b] \Rightarrow y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(t) dx$$

■ 若取 $y'(t) \approx y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$, 则有

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(t) dx \approx (x_{i+1} - x_i) y'(x_i) = hf(x_i, y(x_i)) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

■ 若取 $y'(t) \approx y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$, 则有

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(t) dx \approx (x_{i+1} - x_i) y'(x_{i+1}) = hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

■ 若取 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(t) dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$, 则有

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})) \end{cases}$$

预估-校正公式

Euler公式



■ 向前差商的Euler算法

Algorithm 21 Euler's Algorithm

Input:

$f(x, y), a, b, m, y_0;$

1: $h \leftarrow (b - a)/m;$

2: **for** $i = 1$ to m **do**

3: $x_i = x_{i-1} + h;$

4: $y_i = y_{i-1} + h * f(x_{i-1}, y_{i-1});$

5: **end for**

Output:

$(x_i), (y_i)$

Runge-Kutta 方法

■ Taylor 级数法 (高阶单步方法) :

$$\begin{cases} y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \cdots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_i) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi_i) \\ y'(x) = f(x, y) \\ y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \\ y'''(x) = \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i)) + \cdots$$

■ 取 $k=1$, 向前差商的 Euler 公式

■ 取 $k=2$, 可得

$$y_{i+1} = y_i + h \left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)) \right]$$

Runge-Kutta 方法

- Taylor 级数法：要大量计算复合函数的全导数
- Runge-Kutta 方法：一个点上的导数值可以用它邻近的一些点上的函数值来近似表示（数值微分的思想） + Taylor 级数法
- 基本思想：

$$y'(x_i) + \dots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} y^{(k)}(x_i) = \sum_{j=1}^k \frac{h^{j-1}}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} f(x_i, y(x_i)) \approx \sum_{j=1}^k c_j k_j$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_j = f(x_i + a_j h, y_i + h \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl} k_l)$$

$$a_j = \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl}$$

Runge-Kutta 方法



- 基本做法：利用二元函数的Taylor展开形式

$$f(x+h, y+l) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y)$$

比较方程两边幂次相同的 h 项系数，得到关于 a_j, b_{jl}, c_j 的方程组

- 取 $k=2$ ，作Taylor展开

$$\begin{aligned} & c_1 f(x_i, y(x_i)) + c_2 f(x_i + a_2 h, y(x_i) + b_{21} h f(x_i, y(x_i))) \\ & \approx c_1 f(x_i, y(x_i)) + c_2 f(x_i, y(x_i)) + c_2 a_2 h f_x(x_i, y(x_i)) + \\ & c_2 b_{21} h f(x_i, y(x_i)) \cdot f_y(x_i, y(x_i)) + O(h^2) \end{aligned}$$

与 $f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i))$ 比较得：

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = 1/2 \\ c_2 b_{21} = 1/2 \end{cases} \quad \text{4个未知数, 3个方程, 有无穷多组解}$$

Runge-Kutta 方法



- **修正的Euler法（中点法）**：取 $c_1 = 0, c_2 = 1, a_2 = b_{21} = 1/2$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \end{cases}$$

- **二阶Runge-Kutta公式**：取 $c_1 = 1/2, c_2 = 1/2, a_2 = b_{21} = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + k_2)/2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) \end{cases}$$

- **Henu公式**：取 $c_1 = 1/4, c_2 = 3/4, a_2 = b_{21} = 2/3$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 3k_2)/4 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + 2h/3, y_i + 2hk_1/3) \end{cases}$$

Runge-Kutta 方法



■ 三阶Kutta公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 4k_2 + k_3) / 6 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

■ 三阶Henu公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 3k_3) / 4 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/3, y_i + hk_1/3) \\ k_3 = f(x_i + 2h/3, y_i + 2hk_2/3) \end{cases}$$

Runge-Kutta 方法



■ 四阶Runge-Kutta公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h / 2, y_i + hk_1 / 2) \\ k_3 = f(x_i + h / 2, y_i + hk_2 / 2) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{cases}$$

■ 四阶Kutta公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) / 8 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h / 3, y_i + hk_1 / 3) \\ k_3 = f(x_i + 2h / 3, y_i - hk_1 / 3 + hk_2) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3) \end{cases}$$

Runge-Kutta 方法

- 步长的自适应：设置一个误差容限，(1) 假如超出误差容限，则否决这一步并减小步长；(2) 假如符合误差容限，则接受这一步并选取适合下一步的步长

- 改变步长的策略：

- 步长加倍或减半
- 根据阶的信息选取适当的步长

$$\begin{cases} e_i \approx ch_i^{p+1} \\ \frac{e_i}{|y_i|} < T \end{cases} \Rightarrow h_{i+1} = 0.8 * \left(\frac{T |y_i|}{e_i} \right)^{\frac{1}{p+1}} h_i$$

- 嵌入Runge-Kutta对：一个 p 阶和另一个 $p+1$ 阶，共享必要的计算

Runge-Kutta 方法



■ 嵌入 Runge-Kutta 4/5 对公式

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}hk_1 + \frac{9}{32}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}hk_1 - \frac{7200}{2197}hk_2 + \frac{7296}{2197}hk_3\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \frac{3680}{513}hk_3 - \frac{845}{4104}hk_4\right)$$

$$k_6 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}hk_1 + 2hk_2 - \frac{3544}{2565}hk_3 + \frac{1859}{4104}hk_4 - \frac{11}{40}hk_5\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5\right)$$

$$z_{i+1} = y_i + h\left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right)$$

Runge-Kutta 方法

- 步长控制所需的误差估计为:

$$e_{i+1} = |z_{i+1} - y_{i+1}| = h \left| \frac{1}{360} k_1 - \frac{128}{4275} k_3 - \frac{2197}{75240} k_4 + \frac{1}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right|$$

- 步长自适应策略:

(1) 若误差测试 $\frac{e_{i+1}}{|y_{i+1}|} < T$ 成功, 则用 z_{i+1} 取代 y_{i+1} , 程序进入下一步;

(2) 否则, 用 $h_{i+1} = 0.8 * \left(\frac{T |y_i|}{e_i} \right)^{\frac{1}{p+1}} h_i$ 再尝试一遍 (如果重复失败, 则步长减半直至成功)

- 在 Matlab 中, 就使用这种方法, 譬如 `ode23`, `ode45` 等命令 (分别使用嵌入 Bogacki-Shampine 2/3 对、嵌入 Dormand-Prince 4/5 对)

Runge-Kutta 方法



■ Runge-Kutta 算法

Algorithm 22 Runge-Kutta Method

Input:

$f(x, y), a, b, m, y_0;$

1: $h \leftarrow (b - a)/m;$

2: **for** $i = 1$ to m **do**

3: $K_1 = hf(x_{i-1}, y_{i-1});$

4: $K_2 = hf(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + K_1/2);$

5: $K_3 = hf(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + K_2/2);$

6: $K_4 = hf(x_{i-1} + h, y_{i-1} + K_3);$

7: $x_i = x_{i-1} + h;$

8: $y_i = y_{i-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6;$

9: **end for**

Output:

$(x_i), (y_i)$

线性多步法

- 线性 k 步方法的一般形式:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{m+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{m+j},$$

需要给定 k 个初始值 y_0, y_1, \dots 才能启动迭代

- 基本思想: 微分方程化为积分方程, 用数值积分近似

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = y(x^*) + \int_{x^*}^x y'(t) dt$$

线性多步法

- 取 x, x^* 分别为 x_{i+1}, x_{i-p} , 有

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-p}) + \int_{x_{i-p}}^{x_{i+1}} y'(x) dx = y(x_{i-p}) + h \sum_{j=0}^q a_{i-j} f(x_{i-j}, y(x_{i-j})) + hT_{i+1}$$

- 显式公式: 用数值积分节点 x_i, x_{i-1}, \dots 构造插值多项式近似 $y'(x)$, 在区间 $[x_{i-p}, x_{i+1}]$ 上计算数值积分 $\int_{x_{i-p}}^{x_{i+1}} y'(x) dx$
- 隐式公式: 用数值积分节点 x_{i+1}, x_i, \dots 构造插值多项式近似 $y'(x)$, 在区间 $[x_{i-p}, x_{i+1}]$ 上计算数值积分 $\int_{x_{i-p}}^{x_{i+1}} y'(x) dx$
- p 控制积分区间, q 控制插值节点

线性多步法

■ Adams格式：取 $p = 0$

■ 例：构造 $p = 0, q = 1$ 的显式格式

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [l_0(x)y'(x_i) + l_1(x)y'(x_{i-1}) + R(x)]dx \\ &= y(x_i) + a_0y'(x_i) + a_1y'(x_{i-1}) + T_{i+1}\end{aligned}$$

$$a_0 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_0(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}dx = \frac{3}{2}h$$

$$a_1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_1(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}dx = -\frac{1}{2}h$$

$$T_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{y^{(3)}(\eta_x)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i-1})dx = \frac{5}{12}h^3 y^{(3)}(\xi)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})]}{2}$$

二阶显式Adams公式

线性多步法



■ 三阶显式Adams公式:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h[23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})]}{12}, \quad T_{i+1} = \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(\xi)$$

■ 四阶显式Adams公式:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h[55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})]}{24},$$

$$T_{i+1} = \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(\xi)$$

■ 三阶隐式Adams公式:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h[5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})]}{12}, \quad T_{i+1} = -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(\xi)$$

■ 四阶隐式Adams公式:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h[9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})]}{24},$$

$$T_{i+1} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\xi)$$

线性多步法



■ 例：构造 $p=1, q=2$ 的显式格式

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) &= y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [l_0(x)y'(x_i) + l_1(x)y'(x_{i-1}) + l_2(x)y'(x_{i-2}) + R(x)]dx \\ &= y(x_{i-1}) + a_0y'(x_i) + a_1y'(x_{i-1}) + a_2y'(x_{i-2}) + T_{i+1}\end{aligned}$$

$$a_0 = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} l_0(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-2})}dx = \frac{7}{3}h$$

$$a_1 = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} l_1(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-2})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i-2})}dx = -\frac{2}{3}h$$

$$a_2 = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} l_2(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{(x_{i-2}-x_i)(x_{i-2}-x_{i-1})}dx = \frac{1}{3}h$$

$$T_{i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} R(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{y^{(4)}(\eta_x)}{3!} (x-x_i)(x-x_{i-1})(x-x_{i-2})dx$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h[7f(x_i, y_i) - 2f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})]}{3}$$

线性多步法



■ 例：构造 $p=2, q=2$ 的隐式格式

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) &= y(x_{i-2}) + \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} [l_0(x)y'(x_{i+1}) + l_1(x)y'(x_i) + l_2(x)y'(x_{i-1}) + R(x)]dx \\ &= y(x_{i-2}) + a_0y'(x_{i+1}) + a_1y'(x_i) + a_2y'(x_{i-1}) + T_{i+1}\end{aligned}$$

$$a_0 = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} l_0(x)dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}dx = \frac{3}{4}h$$

$$a_1 = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} l_1(x)dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i-1})}dx = 0$$

$$a_2 = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} l_2(x)dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_i)}dx = \frac{9}{4}h$$

$$T_{i+1} = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} R(x)dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} \frac{y^{(4)}(\eta_x)}{3!} (x-x_{i+1})(x-x_i)(x-x_{i-1})dx$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-2} + \frac{h[3f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 9f(x_{i-1}, y_{i-1})]}{4}$$

线性多步法



- 为避免迭代，可用预估-校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h[7f(x_i, y_i) - 2f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})]}{3} \\ y_{i+1} = y_{i-2} + \frac{h[3f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) + 9f(x_{i-1}, y_{i-1})]}{4} \end{cases}$$

常微分方程组的数值解法



- 设 m 个一阶方程组成的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \dots) & a \leq x \leq b \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{cases}$$

- 写成向量形式

$$\begin{cases} \frac{dY}{dx} = F(x, Y(x)) \\ Y(a) = \eta \end{cases}, Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{pmatrix} \quad F(x, Y(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots) \\ f_2(x, y_1(x), \dots) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1(x), \dots) \end{pmatrix}$$

常微分方程组的数值解法



■ 各种方法都可以直接运用过来

■ 例：两个一阶微分方程组成的微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

■ Euler公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) \end{cases}$$

常微分方程组的数值解法



■ Runge-Kutta公式

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_1^{(2)}\right) \\ g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_1^{(2)}\right) \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_2^{(2)}\right) \\ g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_2^{(2)}\right) \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} f(x_n + h, y_n + hK_3^{(1)}, z_n + hK_3^{(2)}) \\ g(x_n + h, y_n + hK_3^{(1)}, z_n + hK_3^{(2)}) \end{pmatrix}$$

常微分方程组的数值解法



■ 高阶微分方程：引入辅助变量，可化为一阶微分方程组

■ 设 m 阶常微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y, y', \dots) \\ y(a) = \eta_1 \\ y'(a) = \eta_2 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \eta_m \end{cases}, \quad a \leq x \leq b$$

■ 引入辅助变量

$$\begin{cases} y = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_{m-1}}{dx} = y_m \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f(x, y_1, \dots) \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{cases} \quad a \leq x \leq b$$

常微分方程的稳定性

- 定义：若一个离散变量的 k 步方法，在Lipschitz条件下，存在常数 C 和 $h_0 > 0$ ，使得以 $(0, h_0]$ 中任意值 h 为步长，通过任意两组初值 $\{u_m\}_{m=0}^{k-1}$ 和 $\{v_m\}_{m=0}^{k-1}$ 得到两组离散值 $\{u_m\}_{m=k}^N$ 和 $\{v_m\}_{m=k}^N$ ($N = \lceil \frac{T-t_0}{h} \rceil$)，都成立

$$\max_{k \leq m \leq N} |u_m - v_m| \leq C \max_{0 \leq m \leq k-1} |u_m - v_m|,$$

则称该方法是稳定的

- 数值方法的稳定性：初值产生误差的传播（或者离散解关于初值的连续依赖性）
- 数值方法的稳定性不仅于数值方法有关，而且与微分方程本身有关。如果微分方程本身是不稳定的，那就没理由要求数值方法稳定。因此，数值方法的稳定性概念是建立在微分方程稳定的基础上的

常微分方程的稳定性



- 为了比较不同方法的性质，取典型的微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda y, \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- 将一般的差分方程（数值格式）：

$$\sum_{j=0}^k a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k b_j f(x_{n+j}, y_{n+j})$$

应用到典型的微分方程，可得：

$$\sum_{j=0}^k a_j y_{n+j} = \lambda h \sum_{j=0}^k b_j y_{n+j}, \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

对于给定的初始误差 e_0, e_1, \dots, e_{k-1} ，误差方程具有一样的形式

$$\sum_{j=0}^k a_j e_{n+j} = \lambda h \sum_{j=0}^k b_j e_{n+j}, \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

常微分方程的稳定性

- 定义：差分方程称为绝对稳定的，若差分方程作用到典型的微分方程

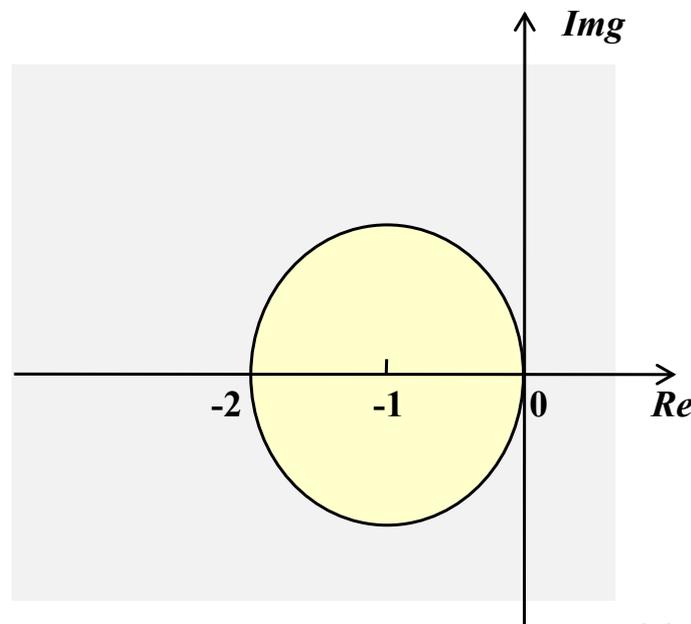
$$\frac{dy}{dx} = \lambda y, \operatorname{Re}(\lambda) < 0,$$

对任意的初值，总存在左半复平面上的一个区域，当在这个区域时，差分方程的解趋于0 ($x \rightarrow \infty$)，这个区域称为稳定区域

- 例：向前Euler公式的稳定性

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n \Rightarrow e_{n+1} = e_n + \lambda h e_n$$

$$\Rightarrow \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |1 + \lambda h| < 1$$



常微分方程的稳定性

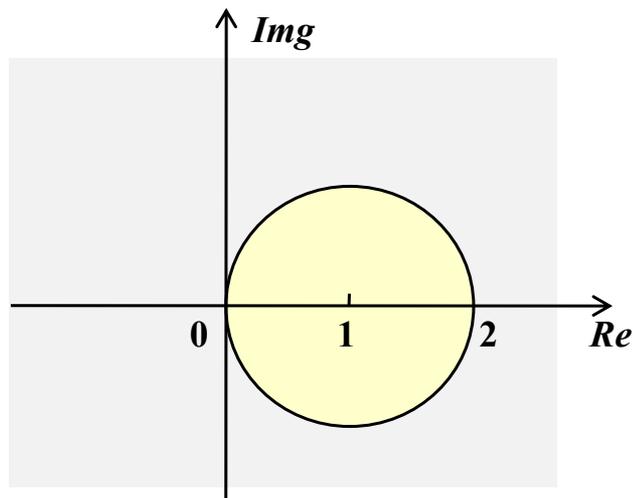


■ 例：向后Euler公式的稳定性

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right) y_i$$

$$\Rightarrow e_{i+1} = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right) e_i$$

$$\Rightarrow \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \frac{1}{|1 - \lambda h|} < 1$$



- 定义：当绝对稳定区域是左半平面时，则称该数值方法是无条件绝对稳定的
- 一般来说，隐式格式的绝对稳定性比同阶的显式法的好

常微分方程的稳定性



■ 例：3阶Runge-Kutta公式的稳定性

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3]$$

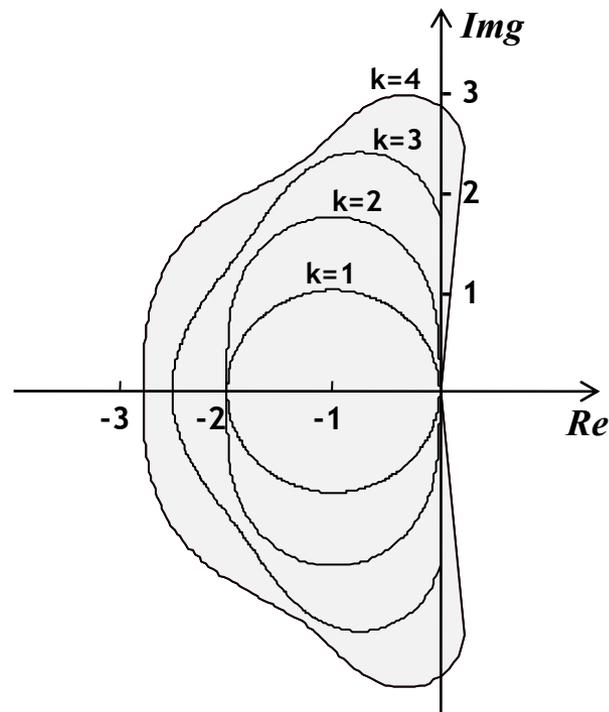
$$K_1 = \lambda y_n$$

$$K_2 = \lambda y_n \left(1 + \frac{1}{2} \lambda h\right)$$

$$K_3 = \lambda y_n \left[1 + \lambda h + (\lambda h)^2\right]$$

$$y_{n+1} = y_n \left[1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3\right]$$

$$\Rightarrow \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \left|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3\right| < 1$$



- 可以证明：Runge-Kutta方法和隐式Adams方法都是绝对稳定的