

量子混沌与分形不确定性原理

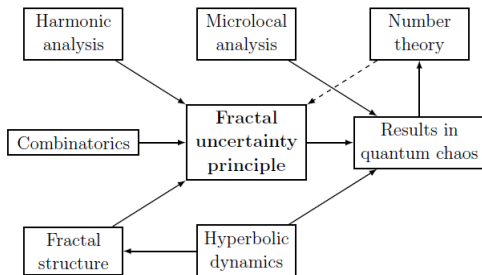
金龙

清华大学

中科大短期课程，2021 年 1 月

目标与计划

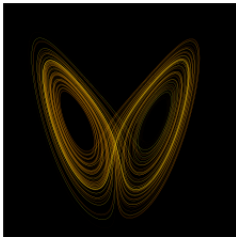
- ▶ 目标：简要介绍量子混沌中的一个新工具“分形不确定性原理”（Fractal Uncertainty Principle, FUP）以及其应用。
- ▶ 计划：
 1. 1.9: 引论，一个离散模型
 2. 1.11: 双曲曲面的预备知识
 3. 1.13: 紧双曲曲面的控制问题



1. 引论：量子混沌中的一些问题

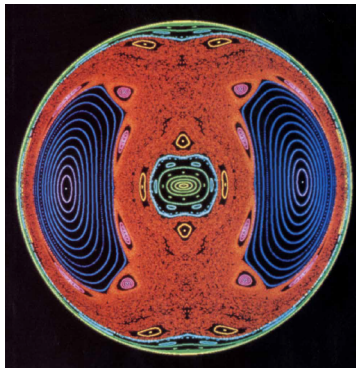
经典混沌

- ▶ 经典混沌系统指“对初值敏感”的动力系统，在物理，化学，生物，气象学，经济学等各领域中都有例子。
- ▶ Kepler 观测到月球绕地球轨道的不规则变化，Newton，Hill 解释为太阳的引力作用，三体问题。
- ▶ Poincaré 1903：在某些动力系统中初始状态的小的改变可以在最终结果中造成很大影响。
- ▶ Lorenz 1972：大气模型中的例子，“蝴蝶效应”。



量子混沌

- ▶ 从经典系统到量子系统：量子化，Bohr 对应原理...
- ▶ Einstein 1917：经典混沌系统的量子化会产生什么结果？
- ▶ Guizwiller 1992：“Chaos lurks in the smooth, wave-like quantum worlds.”



1.1 “基本”例子：台球系统

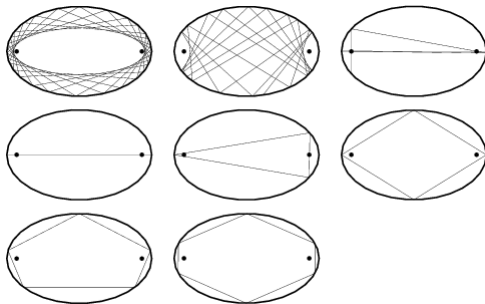


1.1 “基本”例子：台球系统



经典台球系统

这实际是三维区域 $S^*\Omega$ 上的动力系统：在有界区域 Ω 中轨迹（的投影）为在边界反射的折线，例如下面椭圆区域的示意



量子台球系统

对应的我们研究 Ω 上 Schrödinger 方程描述的量子的演化:

$$\begin{aligned}(i\partial_t + \Delta)u(t, x) &= 0, \\ u(0, x) &= u_0(x),\end{aligned}$$

或者波方程描述的波的演化:

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 - \Delta)u(t, x) &= 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \\ \partial_t u(0, x) &= u_1(x),\end{aligned}$$

特征值与特征函数

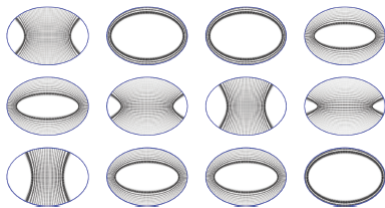
最基本的问题是关于 Ω 上 Laplace 算子 (比如 Dirichlet 条件下)

► 特征值 (能级/频率):

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots \nearrow \infty$$

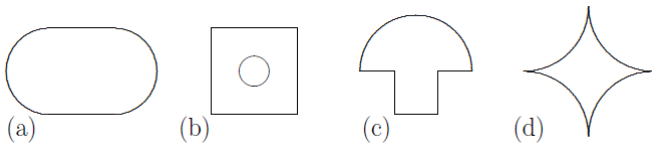
► 特征函数 (定态/波形):

$$-\Delta u_j = \lambda_j^2 u_j, \quad u_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} |u_j(x)|^2 dx = 1.$$

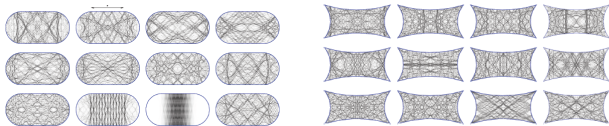


混沌台球系统

- ▶ 通常的长方形，或者椭圆区域对应的台球系统是“可积的”。
- ▶ 下面是一些混沌的台球系统：



- ▶ 混沌台球系统中的特征函数呈现不同性质：



特征值的分布

我们主要要考虑当特征值 $\lambda^2 \rightarrow +\infty$, 或者 Planck 常数 $h = \lambda^{-1} \rightarrow 0$ 的情形:

► Weyl 定律:

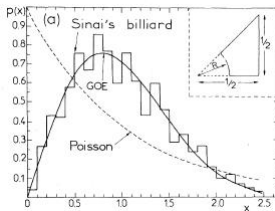
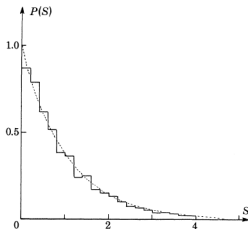
$$\#\{j: \lambda_j \leq R\} \sim \frac{1}{4\pi} \text{Area}(\Omega) R^2,$$

这与经典台球系统的性质无关。

► 特征值间隔的统计猜测与经典台球系统的性质相关:

► Berry–Tabor 猜想: 可积 $\Rightarrow$ Poisson。

► Bohigas–Giannoni–Schmit 猜想: 混沌 $\Rightarrow$ GOE。

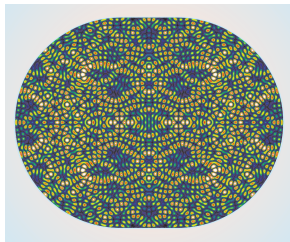
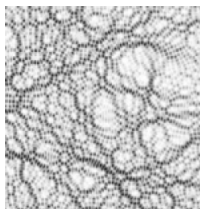


特征函数的性质

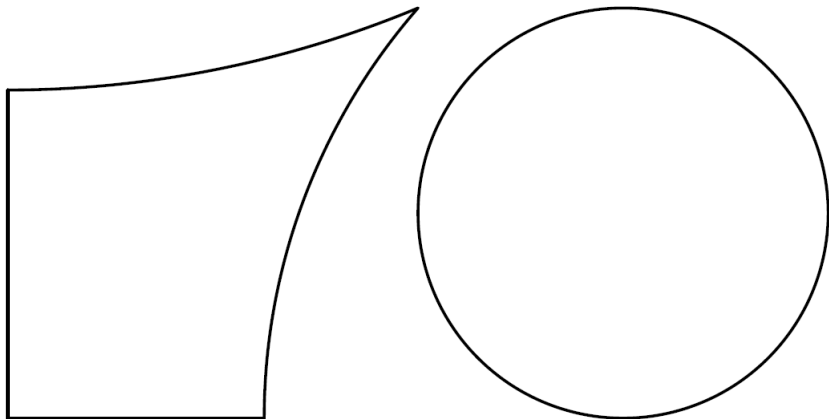
宏观性质：量子遍历

- ▶ 量子遍历：当经典台球系统是遍历的，“大多数”特征函数的“半经典测度”是 Liouville 测度，换言之，这些特征函数在 $\lambda \rightarrow \infty$ 时趋于平均分布；Shnirelman, Colin de Verdière, Zelditch, Gérard–Leichtnam, Zelditch–Zworski...
- ▶ 量子唯一遍历猜想（Rudnick–Sarnak）对一些强混沌经典台球系统，所有特征函数唯一的半经典测度是 Liouville 测度。（Hassell '10 对 Bunimovich 体育场不成立）

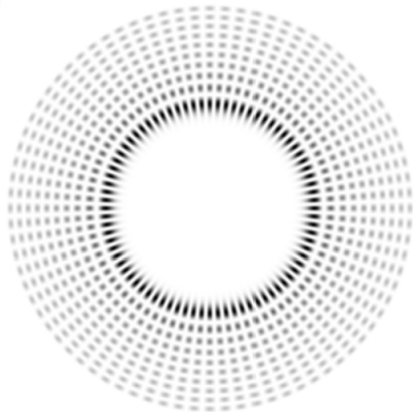
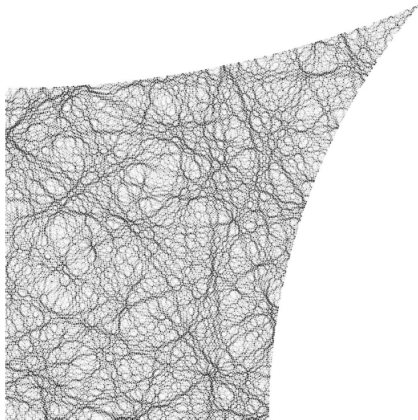
微观性质：随机波模型猜想



特征函数的性质

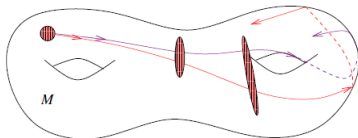
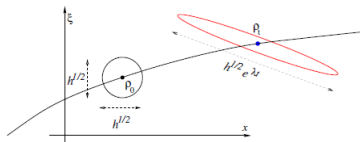
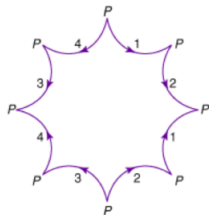
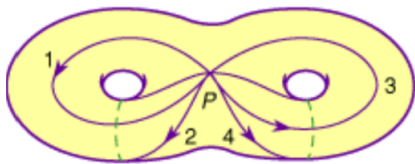


特征函数的性质



1.2 紧双曲曲面上 Laplace 特征函数

我们还可以在曲面上考虑台球系统的类比，即测地流系统。此时一个典型的混沌测地流的例子是负曲率曲面，特别地，我们可以考虑双曲曲面，即曲率恒为 -1 的曲面 $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ 。



紧双曲曲面上 Laplace 特征函数的半经典测度

- ▶ Rudnick–Sarnak 量子唯一遍历猜想：半经典测度 μ 一定是 Liouville 测度；
- ▶ 前人的工作主要考虑半经典测度 μ 的“熵”的下界：
 - ▶ S^*M 上所有不变测度 μ 的熵都介于 0 和 1 之间；
 - ▶ 测地流的一条闭轨道给出的 δ 测度的熵为 0；
 - ▶ Liouville 测度是唯一熵为 1 的不变测度。
- ▶ Bourgain–Lindenstrauss 在算术曲面的情形给出“Hecke 形式”对应的 Laplace 特征函数的半经典测度熵的下界，由此 Lindenstrauss 给出了算术量子唯一遍历猜想的证明。
- ▶ Anantharaman, Anantharaman–Nonnenmacher, Rivière 利用“熵不确定性原理”给出一般负曲率流形上半经典测度熵的下界。对双曲曲面，熵至少是 $1/2$ 。
- ▶ Dyatlov–J., Dyatlov–J.–Nonnenmacher 利用“分形不确定性原理”给出 $\text{supp } \mu = S^*M$ 。

主要结论及进一步应用

定理 [Dyatlov–J. 2018]

如果 M 是一个紧双曲曲面, $a \in C_c^\infty(T^*M)$, 并且 $a|_{S^*M} \not\equiv 0$, 则存在 $C, h_0 > 0$, 只依赖于 M 和 a 使得对任意的 $h \in (0, h_0)$ 以及 $u \in H^2(M)$,

$$\|u\|_{L^2} \leq C \| \text{Op}_h(a)u \|_{L^2} + \frac{C \log(1/h)}{h} \| (-h^2 \Delta - 1)u \|_{L^2}.$$

一些推论/应用

- ▶ 半经典测度一定满足 $\text{supp } \mu = S^*M$;
- ▶ 特征函数的“控制”: 所有特征函数在给定开集上 L^2 范数有一致下界;
- ▶ Galkowski–Zelditch: 特征函数在曲线上的“控制”: 所有特征函数在给定曲线上的 Cauchy 初值的 L^2 范数有一致下界;
- ▶ 线性 Schrödinger 方程的“能观性”与“能控性”;
- ▶ 阻尼波方程能量的指数衰减。

分形不确定性原理

量子物理中 Heisenberg 不确定性原理说明一个粒子的位置和动量不能同时以任意的精度被确定。在调和分析中，这一结论可以用 (酉) 半经典 Fourier 变换给出：

$$\mathcal{F}_h\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi h)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi/h} \varphi(x) dx.$$

$$\|x\varphi(x)\|_{L^2} \|\xi\mathcal{F}_h\varphi(\xi)\|_{L^2} \geq \frac{h}{2}.$$

换言之， φ 与 $\mathcal{F}_h\varphi$ 不能同时集中在 0 附近。

分形不确定性原理

量子物理中 Heisenberg 不确定性原理说明一个粒子的位置和动量不能同时以任意的精度被确定。在调和分析中，这一结论可以用 (酉) 半经典 Fourier 变换给出：

$$\mathcal{F}_h \varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi h)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \xi/h} \varphi(x) dx.$$

$$\|x\varphi(x)\|_{L^2} \|\xi \mathcal{F}_h \varphi(\xi)\|_{L^2} \geq \frac{h}{2}.$$

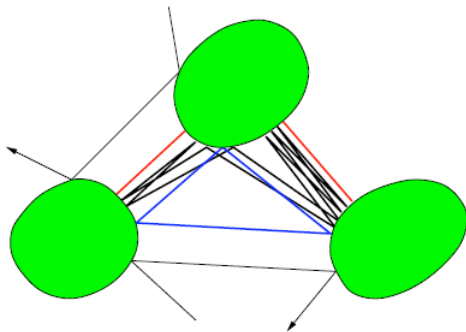
换言之， φ 与 $\mathcal{F}_h \varphi$ 不能同时集中在 0 附近。分形不确定性原理则说明 φ 与 $\mathcal{F}_h \varphi$ 不能同时集中在一个“分形集”附近：如果 $X, Y \subset [0, 1]$ 是两个分形集，则

$$\|\mathbb{1}_{X+[-h,h]} \mathcal{F}_h \mathbb{1}_{Y+[-h,h]}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq Ch^\beta.$$

- ▶ $X = Y = \{0\}$ 时， $\beta = 1/2$ ，这可以看作 Heisenberg 不确定性原理的另一个解释；
- ▶ $X = Y = [0, 1]$ 时， $\beta = 0$ 。

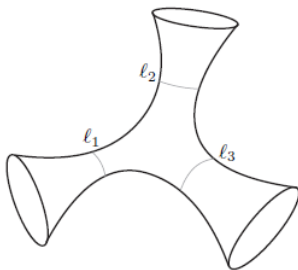
1.3 开放系统：散射问题

前面考虑的台球系统在有界区域内，我们还可以考虑开放的系统，其中大多数轨道都趋向无穷远，称为（障碍）散射问题：



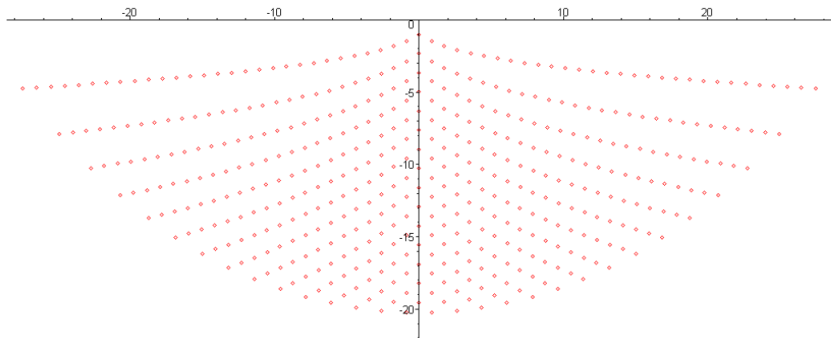
开放系统：非紧双曲曲面

类似地，我们也可以考虑非紧的双曲曲面



散射共振谱

- ▶ 对散射系统， L^2 -谱通常是连续的，但是我们可以定义离散的“散射共振谱”（scattering resonances）以及对应的“共振谱态”（resonance states）。散射共振谱分布在复平面上，实部代表频率，虚部代表衰减速率。
- ▶ 对非紧双曲曲面，散射共振谱对应着 Selberg ζ -函数的零点和极点；
- ▶ 相对论中，散射共振谱称为黑洞的拟正则模。



散射共振谱：三圆盘散射

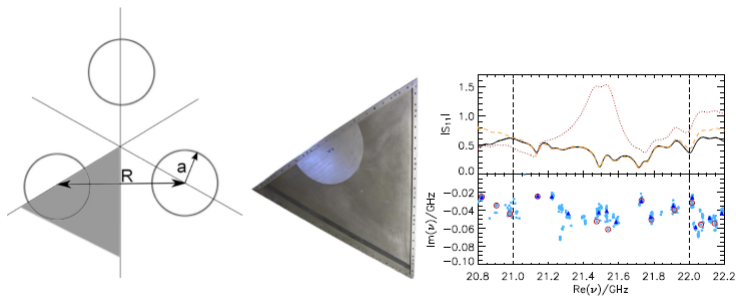
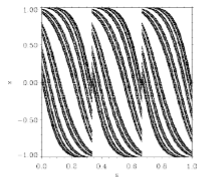
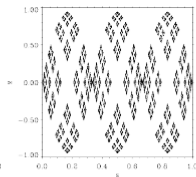


Figure: Barkhofen–Kuhl–Weich 2013

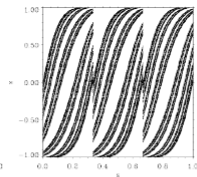
散射共振谱：三圆盘散射



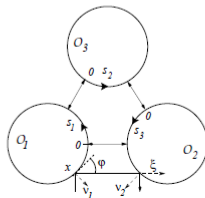
incoming set



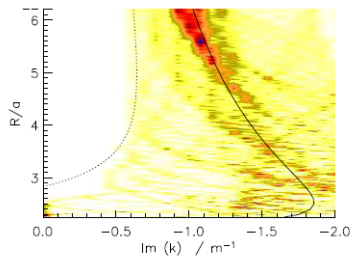
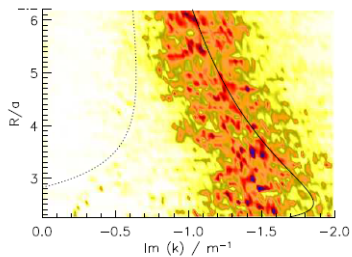
trapped set



outgoing set

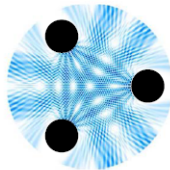
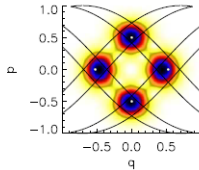
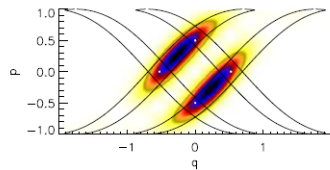
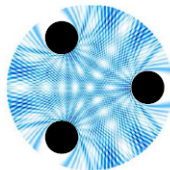
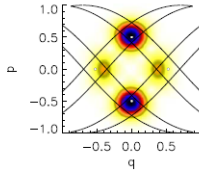
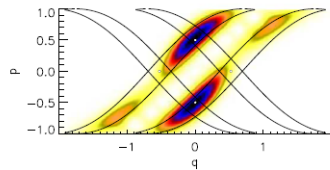
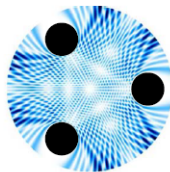
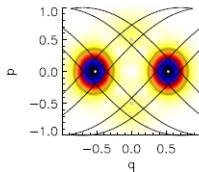
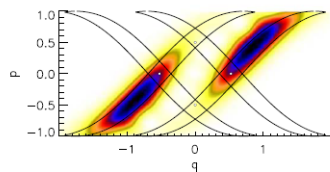


散射共振谱：三圆盘散射



实验 (左) 与数值计算 (右)

散射共振谱：三圆盘散射



一些“凸余紧双曲”曲面的散射共振谱

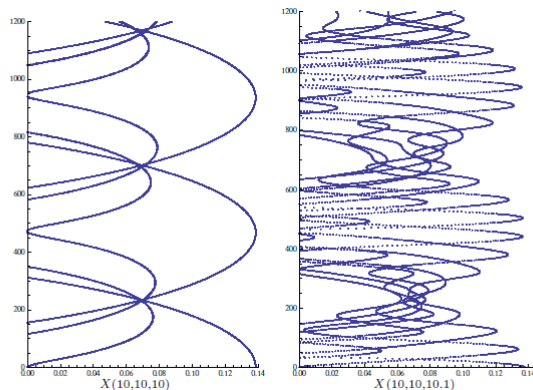


Figure: Borthwick 2013.

一些“凸余紧双曲”曲面的散射共振谱

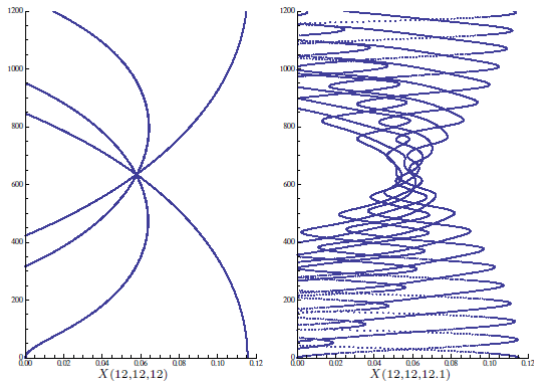


Figure: Borthwick 2013.

一些“凸余紧双曲”曲面的散射共振谱

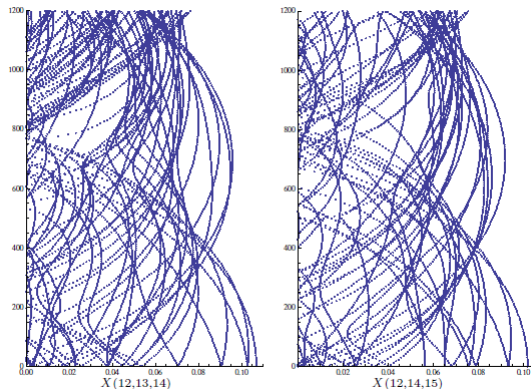


Figure: Borthwick 2013.

一些“凸余紧双曲”曲面的散射共振谱

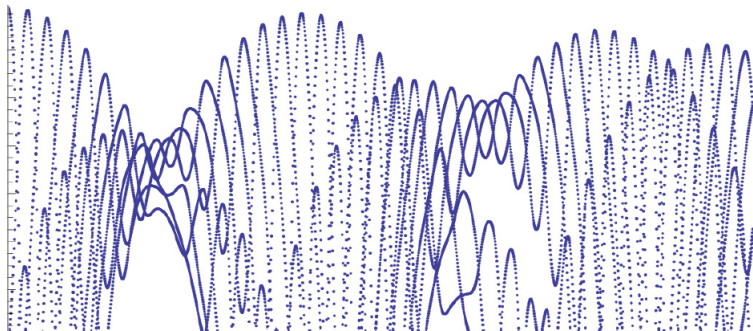


Figure: Borthwick 2013.

一些“凸余紧双曲”曲面的散射共振谱

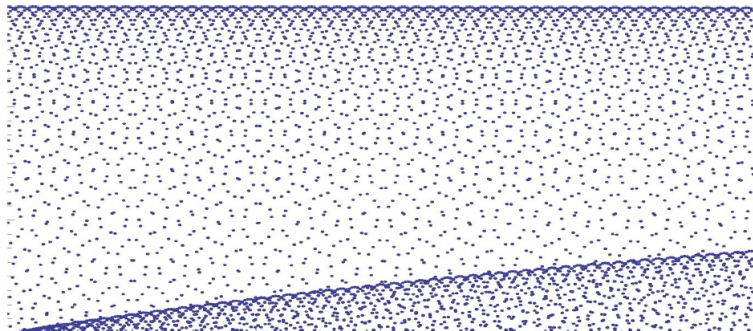


Figure: Borthwick 2013.

一些“凸余紧双曲”曲面的散射共振谱

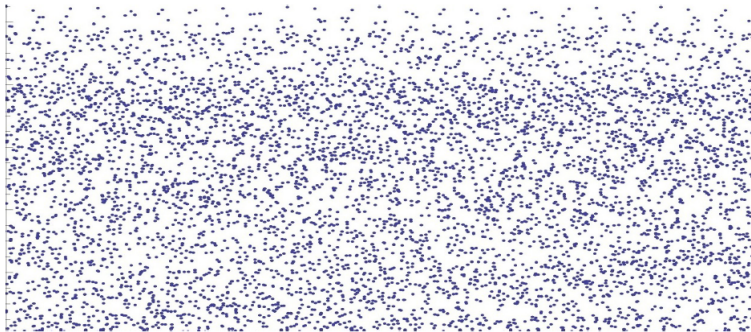
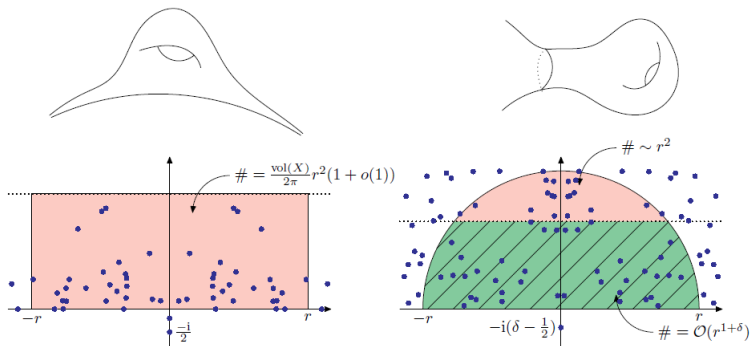


Figure: Borthwick 2013.

散射共振谱的分布：谱隙

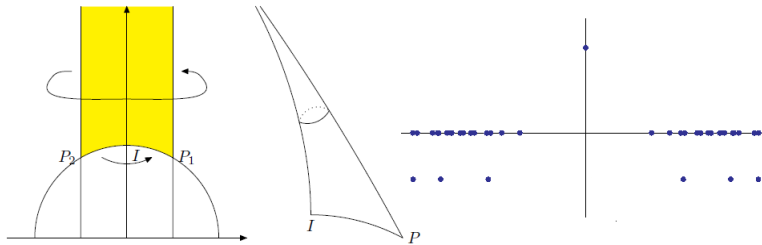
- ▶ 谱隙给出波方程解的能量局部指数衰减；通常与“陷阱集”的结构相关。
- ▶ 无陷阱条件下谱隙总是存在的，另一方面如果陷阱集是强“椭圆”型的，则谱隙不存在。
- ▶ 在混沌散射系统中，如果陷阱集满足“压强”条件，则谱隙存在：Patterson, Sullivan, Ikawa, Gaspard–Rice, Nonnenmacher–Zworski...
- ▶ Zworski 猜想对一般混沌散射系统，只要陷阱集是紧的，并且是“双曲”的，则谱隙也是存在的。
- ▶ Dyatlov–Zahl, Bourgain–Dyatlov 利用分形不确定性原理证明“凸余紧”双曲曲面的情形。
- ▶ Dyatlov–J., J.–Zhang 给出量化估计。

散射共振谱的分布：分形 Weyl 定律



- ▶ 上界：Sjöstrand, Zworski, Guillopé–Lin–Zworski, Nonnenmacher–Sjöstrand–Zworski, Datchev–Dyatlov...
- ▶ 紧双曲曲面上界的改进：Naud, Jakobson–Naud, Dyatlov...
- ▶ Lu–Sridhar–Zworski 猜想：虚部集中在经典逃逸速度附近。

Riemann 猜想



2. 简单模型：开放量子映射 与离散 FUP

2.1 离散动力系统与其量子化

- ▶ 我们下面考虑离散动力系统，即映射。特别地，我们考虑环面 $\mathbb{T}^2$ 上的保面积（辛）映射；对应的量子系统将由一族 $N \times N$ 酉矩阵给出，这里 $\hbar = \frac{1}{2\pi N}$ 起到了 Planck 常数的作用。特征值都在单位圆周上，对应之前的实特征值。特征向量可以用 Husimi 表示对应为环面上的函数。
- ▶ 我们还可以考虑“开放”映射，即在定义域和值域中分别去掉一些部分，视其为“无穷远”，则对应的量子系统为一族 $N \times N$ “次酉”矩阵，特征值在单位圆内。

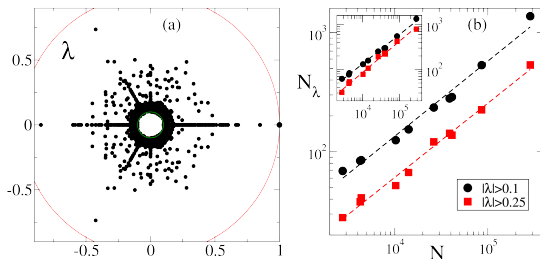
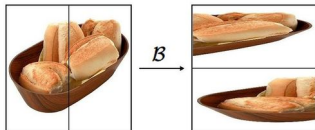


Figure: 信息网络研究中的应用, Ermann–Frahm–Shepelyansky

面包师映射

$$\mathcal{B} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad \mathbb{T}^2 = [0, 1]_p \times [0, 1]_q$$

$$\mathcal{B}(p, q) = \left(p + \frac{\lfloor 2q \rfloor}{2}, 2q - \lfloor 2q \rfloor\right).$$



量子面包师映射

面包师映射的量子化为

$$B_N = \mathcal{F}_N^* \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{N/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_{N/2} \end{pmatrix}$$

$N = 2^k$, $\mathcal{F}_N$ 是离散 Fourier 变换: $\ell_N^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell_N^2$,

$$\mathcal{F}_N u(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell} e^{2\pi i j \ell / N} u(\ell).$$

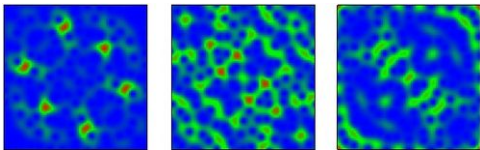


Figure: 特征向量的 Husimi 表示

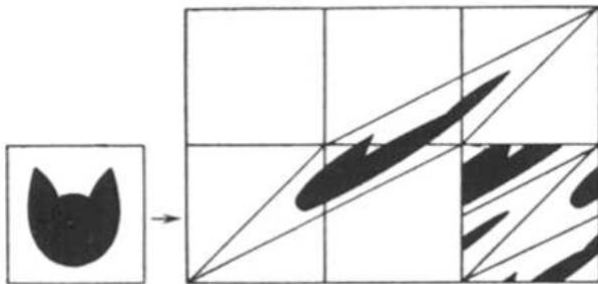
量子面包师映射的物理实验

- ▶ Hannay–Keating–Ozorio de Almeida '94: 光学
- ▶ Brun–Schack '98: NMR 量子计算机.

Arnold 猫映射

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$A(p, q) = (2p + q, p + q) \pmod{1}.$$



量子猫映射

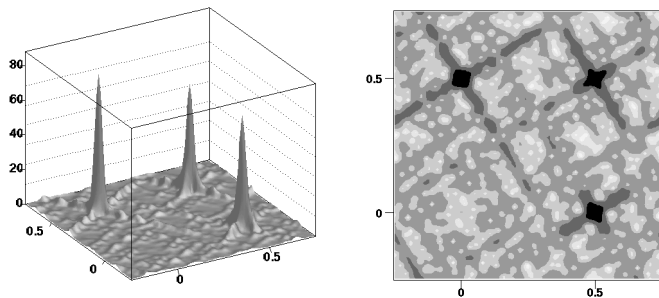


Figure: 集中在一个三周期轨道上的特征向量

半经典测度的一些性质：

- ▶ “熵”的下界：Anantharaman–Nonnenmacher, Brooks;
- ▶ “伤疤”的例子：Faure–Nonnenmacher–de Bièvre,
- ▶ Lebesgue 部分 $\geq$ 纯离散部分，
Anantharaman–Nonnenmacher, Faure–Nonnenmacher。

2.2 开放面包师映射

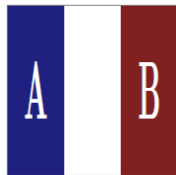
开放面包师映射 $\pi = \pi_{M,\mathcal{A}}$ 由以下变量决定

- ▶ 整数 $M \geq 3$, 称为基
- ▶ 集合 $\mathcal{A} \subset \{0, \dots, M-1\}$, 称为字母表
- ▶ 总假设 $1 < |\mathcal{A}| < M$

π 是 $(0, 1)_{\mathbf{x}} \times (0, 1)_{\xi}$ 到自身的一个辛“关系”:

$$\pi : (x, \xi) \mapsto \left(Mx - a, \frac{\xi + a}{M} \right)$$

$$\text{if } x \in \left(\frac{a}{M}, \frac{a+1}{M} \right), \quad a \in \mathcal{A}$$



离散 Cantor 集

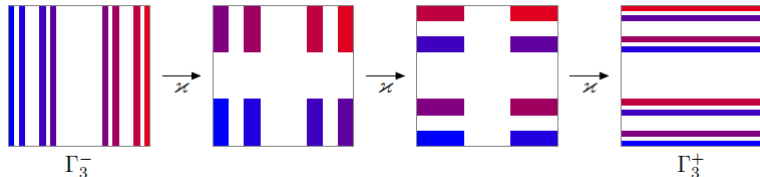
对 $k \in \mathbb{N}$, $\varkappa^k$ 的定义域和值域分别为

$$\Gamma_k^- := \text{Domain}(\varkappa^k) = \{(x, \xi) : \lfloor M^k \cdot x \rfloor \in \mathcal{C}_k\}$$

$$\Gamma_k^+ := \text{Range}(\varkappa^k) = \{(x, \xi) : \lfloor M^k \cdot \xi \rfloor \in \mathcal{C}_k\}$$

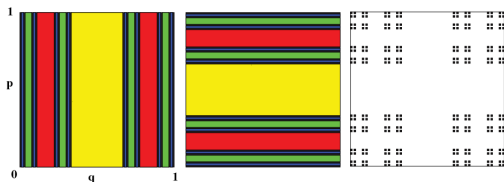
其中 $\mathcal{C}_k \subset \{0, \dots, M^k - 1\}$ 是离散 Cantor 集:

$$\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k(M, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} a_r M^r : a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathcal{A} \right\}$$



极限 Cantor 集与陷阱集

$\mathcal{U}$ 定义的动力系统中的陷阱集为 $K = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$, 其中 $\Gamma^\pm = \bigcap_k \Gamma_k^\pm$:



这就是 $C_\infty \times C_\infty$, 其中 C_∞ 是极限 Cantor 集

$$C_\infty := \bigcap_k \bigcup_{c \in C_k} \left[\frac{c}{M^k}, \frac{c+1}{M^k} \right] \subset [0, 1].$$

C_∞ 具有 Hausdorff 维数

$$\delta := \frac{\log |\mathcal{A}|}{\log M} \in (0, 1)$$

“拓扑压强”为 $P(s) = \delta - s$, $s \in \mathbb{R}$.

离散微局部分析

环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}_x^1 \times \mathbb{S}_\xi^1$, $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上我们可以定义一个量子化:

$$a \in C^\infty(\mathbb{T}^2) \mapsto \text{Op}_N(a) : \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2.$$

其中 $\ell_N^2 := \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ 的维数 $N = (2\pi h)^{-1} \gg 1$ 。我们这里不给出具体形式, 而只给出我们需要的性质:

- ▶ $a = a(x) \Rightarrow \text{Op}_N(a) = a_N, a_N(j) = a(j/N)$ 为乘法算子;
- ▶ $a = a(\xi) \Rightarrow \text{Op}_N(a) = \mathcal{F}_N^* a_N \mathcal{F}_N$, 其中 $\mathcal{F}_N$ 为离散 Fourier 变换;
- ▶ 交换子对应 Poisson 括号:

$$[\text{Op}_N(a), \text{Op}_N(b)] = -\frac{i}{2\pi N} \text{Op}_N(\{a, b\}) + O(N^{-2})_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2}.$$

开放量子面包师映射

基本粒子: $M = 3$, $\mathcal{A} = \{0, 2\}$. We put $N := M^k$ and

$$B_N = \mathcal{F}_N^* \begin{pmatrix} \chi_{N/3} \mathcal{F}_{N/3} \chi_{N/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{N/3} \mathcal{F}_{N/3} \chi_{N/3} \end{pmatrix} : \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2$$

这里 $\chi \in C_0^\infty((0, 1); [0, 1])$, $\chi_N(j) = \chi(j/N)$ (纯粹技术上的假设, 可以忽略)

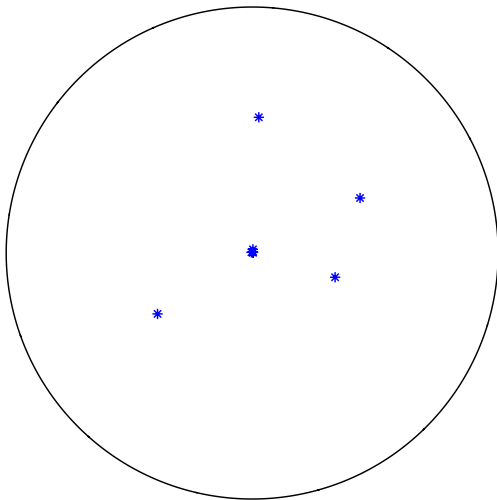
► B_N 是 $\kappa = \kappa_{M, \mathcal{A}}$ 的量子化: 我们有 Egorov 定理

$$B_N \text{Op}_N(a) = \text{Op}_N(b) B_N + \mathcal{O}(N^{-1})_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2}$$

if $a(x, \xi) = b(y, \eta)$ when $\kappa(x, \xi) = (y, \eta)$, $\xi, y \in \text{supp } \chi$

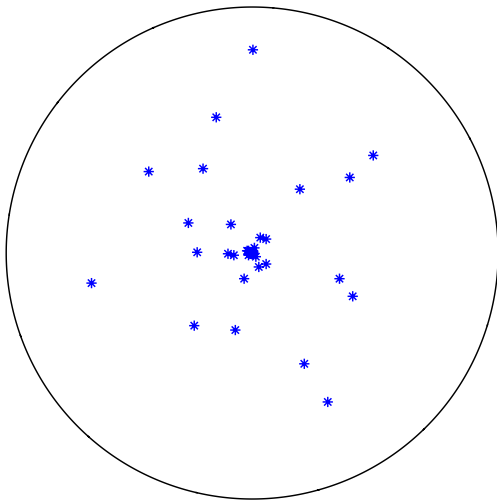
- “散射共振谱” 就是 B_N 的特征值, 包含在单位圆盘内 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, 谱隙即到单位圆周的距離。
- 对一般的基 M 和字母表 $\mathcal{A}$ 都可以类似地构造。

数值计算的例子: $M = 5$, $\mathcal{A} = \{1, 3\}$



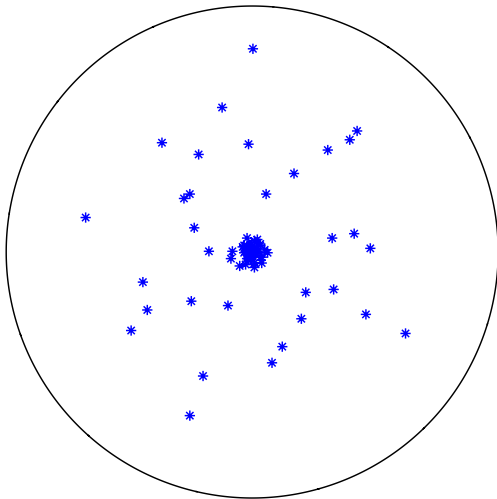
$\text{Spec}(B_N)$ for $k = 2$, $N = M^k$

数值计算的例子: $M = 5$, $\mathcal{A} = \{1, 3\}$



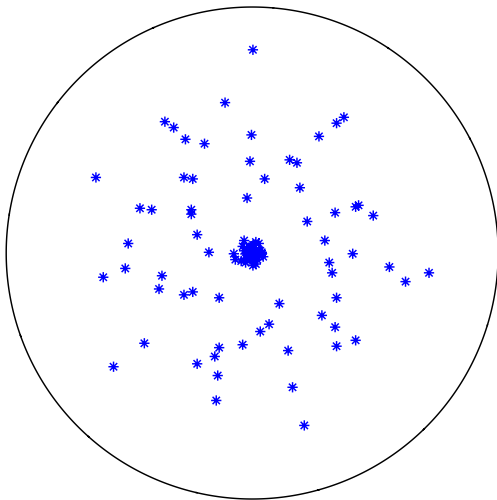
$\text{Spec}(B_N)$ for $k = 3$, $N = M^k$

数值计算的例子: $M = 5$, $\mathcal{A} = \{1, 3\}$



$\text{Spec}(B_N)$ for $k = 4$, $N = M^k$

数值计算的例子: $M = 5$, $\mathcal{A} = \{1, 3\}$



$\text{Spec}(B_N)$ for $k=5$, $N=M^k$

2.3 主要结果：谱隙的存在性

令 R_N 为 B_N 的谱半径

$$R_N := \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(B_N)\}.$$

定理 1[Dyatlov–J. '17]

存在（可以显式计算的！）

$$\beta = \beta(M, \mathcal{A}) > \max(0, \frac{1}{2} - \delta)$$

使得 B_N 存在渐进谱隙 β :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} R_N \leq M^{-\beta} < 1$$

► 压强条件即 $\delta < 1/2$ ，在此时通常压强给出的谱隙即

$$\beta = -P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \delta.$$

下面我们会看到这个谱隙是“平凡”的，我们的结论即对其改进。

数值计算的例子： $M = 5$, $\mathcal{A} = \{1, 3\}$, $N = M^5$

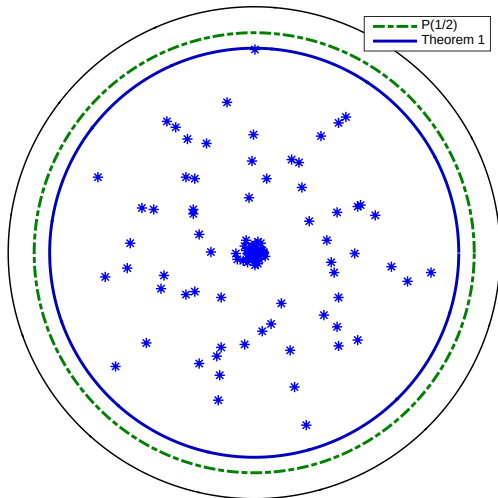


Figure: 有些情况下定理 1 结果很好的与真实的谱隙符合。

数值计算的例子： $M = 5$, $\mathcal{A} = \{1, 2\}$, $N = M^5$

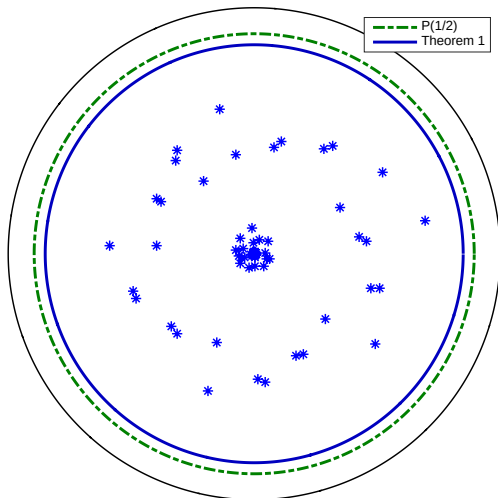


Figure: 在另一些情况下可能相差很远。

化归为一个分形不确定性原理

如果

$$(B_N - \lambda)u = 0, \quad \|u\|_{\ell_N^2} = 1, \quad |\lambda| \geq c > 0.$$

我们利用 Egorov 定理做 k 次, 其中 $N = M^k$,

$$B_N^k \text{Op}_N(a)u = \text{Op}_N(b)B_N^k u + O(N^{-\infty}) = \text{Op}_N(b)\lambda^k u + O(N^{-\infty})$$

其中 $a(x, \xi) = b(y, \eta) + \dots$, $\mathcal{A}^k(x, \xi) = (y, \eta)$ 。则我们有

- ▶ $a \equiv 1, b = 1_{\Gamma_k^+} \Rightarrow u = \text{Op}_N(1_{\Gamma_k^+})u + O(N^{-\infty})$;
- ▶ $b \equiv 1, a = 1_{\Gamma_k^-} \Rightarrow \|\text{Op}_N(1_{\Gamma_k^-})u\| \geq |\lambda|^k - O(N^{-\infty})$;
- ▶ 如果 $|\lambda| > M^{-\beta}$ 并且以下指数为 β 的 FUP 成立:

$$\|\text{Op}_N(1_{\Gamma_k^-})\text{Op}_N(1_{\Gamma_k^+})\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta}.$$

则推出矛盾。

分形不确定性原理：离散版本

上面的 FUP

$$\|\text{Op}_N(1_{\Gamma_k^-})\text{Op}_N(1_{\Gamma_k^+})\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta}$$

可以重新写作我们最开始的形式（的离散版本）

$$\|1_{c_k} \mathcal{F}_N 1_{c_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta}.$$

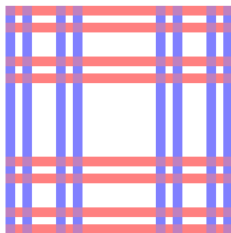
分形不确定性原理：离散版本

上面的 FUP

$$\|\text{Op}_N(1_{\Gamma_k^-})\text{Op}_N(1_{\Gamma_k^+})\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta}$$

可以重新写作我们最开始的形式（的离散版本）

$$\|1_{C_k} \mathcal{F}_N 1_{C_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta}.$$



从 FUP 到压强谱隙 $\beta = \frac{1}{2} - \delta$

从 FUP 中我们可以容易的证明压强谱隙 $\beta = \frac{1}{2} - \delta$ 。为此只要证明指数为 $\beta = \frac{1}{2} - \delta$ 的 FUP:

$$\|1_{\textcolor{red}{c}_k} \mathcal{F}_N 1_{\textcolor{blue}{c}_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta},$$

我们做一个计数:

$$N = M^k, \quad |C_k| = |\mathcal{A}|^k = M^{\delta k} = N^\delta$$

并利用离散 Fourier 变换的 $\ell^1 \rightarrow \ell^\infty$ 范数界:

$$\|\mathcal{F}_N\|_{\ell_N^1 \rightarrow \ell_N^\infty} \leq N^{-1/2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \|1_{\textcolor{red}{c}_k} \mathcal{F}_N 1_{\textcolor{blue}{c}_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} &\leq \|1_{\textcolor{red}{c}_k}\|_{\ell_N^\infty \rightarrow \ell_N^2} \|\mathcal{F}_N\|_{\ell_N^1 \rightarrow \ell_N^\infty} \|1_{\textcolor{blue}{c}_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^1} \\ &\leq \sqrt{|\textcolor{red}{C}_k|} N^{-1/2} \sqrt{|\textcolor{blue}{C}_k|} = N^{\delta-1/2}. \end{aligned}$$

改进 FUP 的指数

$$\|1_{\mathcal{C}_k} \mathcal{F}_N 1_{\mathcal{C}_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta},$$

- ▶ 上面的讨论说明 FUP 指数 $\beta = \frac{1}{2} - \delta$ 成立;
- ▶ FUP 指数 $\beta = 0$ 也显然成立。
- ▶ 另外, 如果取 $u \in \ell_N^2$ 支撑在 $\mathcal{C}_k$ 中一个点, 则容易得到最大的 FUP 指数为 $\beta = -\frac{P(1)}{2} = \frac{1-\delta}{2}$ 。

定理 2[Dyatlov-J '17]

在 FUP 中, 我们可以取指数:

$$\beta = \beta(M, \mathcal{A}) > \max\left(0, \frac{1}{2} - \delta\right).$$

FUP 指数的数值结果

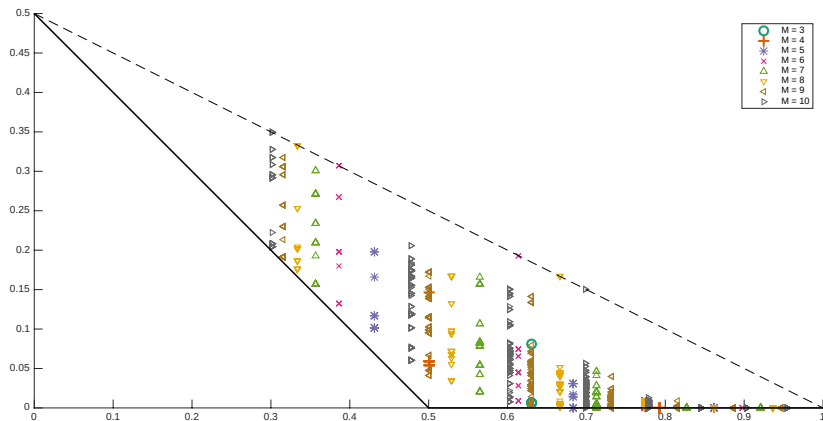


Figure: X 轴: δ ; Y 轴: FUP 指数 β (数值结果); 取所有可能的字母表以及 $M \leq 10$. 实线: $\beta = \max(0, \frac{1}{2} - \delta)$ (平凡/压强谱隙), 虚线: $\beta = -\frac{P(1)}{2} = \frac{1-\delta}{2}$.

FUP 的证明：离散 Fourier 变换的“可乘性”

如果 $N = N_1 N_2$ ，则

$$\mathcal{F}_N = \Psi_2(I \otimes \mathcal{F}_{N_2})\Psi_1^{-1}\Theta\Psi_1(\mathcal{F}_{N_1} \otimes I)\Psi_1^{-1}.$$

其中 $\Theta: \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2$ 是对角酉矩阵

$$\Theta(u)(N_2 j_1 + j_2) = e^{-2\pi i j_1 j_2 / N} u(N_2 j_1 + j_2), \quad 0 \leq j_1 < N_1, \quad 0 \leq j_2 < N_2.$$

而 $\Psi_1, \Psi_2: \ell_{N_1}^2 \otimes \ell_{N_2}^2 \rightarrow \ell_N^2$ 是如下的等距同构：

$$\Psi_1(u_1 \otimes u_2)(N_2 j_1 + j_2) = u_1(j_1)u_2(j_2), \quad 0 \leq j_1 < N_1, \quad 0 \leq j_2 < N_2;$$

$$\Psi_2(u_1 \otimes u_2)(N_1 j_2 + j_1) = u_1(j_1)u_2(j_2), \quad 0 \leq j_1 < N_1, \quad 0 \leq j_2 < N_2.$$

注释

注意到如果我们取 Walsh Fourier 变换 W_N 而不是通常的离散 Fourier 变换 $\mathcal{F}_N$ ，即 $(\mathbb{Z}_M)^{\otimes k}$ 上的 Fourier 变换，则

$W_N = (I \otimes W_{N_2})(W_{N_1} \otimes I)$ 。这里离散 Fourier 变换多了“纠缠因子” Θ, Ψ_1, Ψ_2 。另外，这个公式本质上与快速 Fourier 变换是一样的。

FUP 的证明：次可乘性

令

$$r_k := \|1_{\mathcal{C}_k} \mathcal{F}_N 1_{\mathcal{C}_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2}$$

则我们得到 r_k 的次可乘性：

$$r_{k_1+k_2} \leq r_{k_1} \cdot r_{k_2}.$$

因此要证明 FUP

$$\|1_{\mathcal{C}_k} \mathcal{F}_N 1_{\mathcal{C}_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta},$$

中指数可以改进到 $\beta > \max(0, \frac{1}{2} - \delta)$ ，只要证明存在某个 k ，使得

$$r_k < \min(1, N^{\delta-1/2}).$$

FUP 的证明: 改进平凡谱隙 $\beta = 0$

首先我们证明存在 k 使得 $r_k < 1$: 如果不然, 则存在 u

$$\|u\|_{\ell_N^2} = 1, \quad u = 1_{C_k} u, \quad \mathcal{F}_N u = 0 \text{ on } \mathbb{Z}_N \setminus C_k.$$

我们不妨假设 $M-1 \notin \mathcal{A}$, 否则可以在 $\mathbb{Z}_N$ 上做一个平移得到同样的结果。考虑如下的多项式

$$p(z) = \sum_j u(j) z^j.$$

- ▶ $\deg p \leq \max C_k \leq (M-1)M^{k-1}$;
- ▶ p 至少有 $|\mathbb{Z}_N \setminus C_k| \geq M^k - (M-1)^k$ 个根:

$$p(e^{-2\pi i j/N}) = \sqrt{N} \mathcal{F}_N u(j).$$

- ▶ 因此当 k 足够大时就推出矛盾。

FUP 的证明：改进压强谱隙 $\beta = \frac{1}{2} - \delta$

下面说明存在 k 使得

$$r_k < N^{\delta-1/2} = |C_k|/\sqrt{N}.$$

如果不然，则

$$\|1_{C_k} \mathcal{F}_N 1_{C_k}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} = \frac{|C_k|}{\sqrt{N}} = \|1_{C_k} \mathcal{F}_N 1_{C_k}\|_{\text{HS}}.$$

► 这只有在矩阵

$$1_{C_k} \mathcal{F}_N 1_{C_k}$$

的秩不超过 1 的时候才成立。换言之，所有的 2×2 子矩阵的行列式都是 0。

► 容易看出来只要 $|\mathcal{A}| > 1$, $k \geq 2$, 这就是矛盾的。

2.3 FUP 指数的进一步讨论

当 $M \rightarrow \infty$ 时 β 的界

$\delta \leq 1/2$:

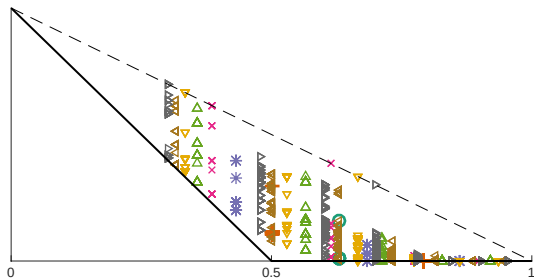
$$\beta - (\tfrac{1}{2} - \delta) \gtrsim \frac{1}{M^8 \log M}$$

$\delta \approx 1/2$: “加法能量方法”

$$\beta \gtrsim \frac{1}{\log M}$$

$\delta \geq 1/2$:

$$\beta \gtrsim \exp\left(-M^{\frac{\delta}{1-\delta} + o(1)}\right)$$



Solid: $\beta = \max(0, \frac{1}{2} - \delta)$, dashed: $\beta = \frac{1-\delta}{2}$

2.3 FUP 指数的进一步讨论

当 $M \rightarrow \infty$ 时 β 的界

$\delta \leq 1/2$:

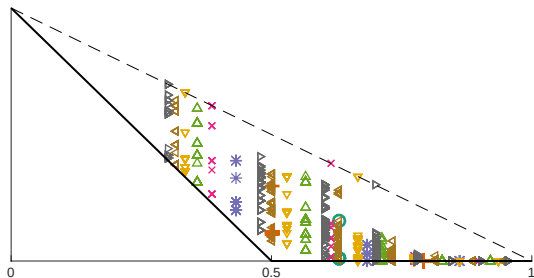
$$\beta - (\tfrac{1}{2} - \delta) \gtrsim \frac{1}{M^8 \log M}$$

$\delta \approx 1/2$: “加法能量方法”

$$\beta \gtrsim \frac{1}{\log M}$$

$\delta \geq 1/2$:

$$\beta \gtrsim \exp\left(-M^{\frac{\delta}{1-\delta} + o(1)}\right)$$



Solid: $\beta = \max(0, \frac{1}{2} - \delta)$, dashed: $\beta = \frac{1-\delta}{2}$

► 存在（等差数列）字母表的例子使得 $\delta \leq 1/2$ 并且

$$\beta - (\tfrac{1}{2} - \delta) \lesssim \frac{M^{2\delta-1}}{\log M}.$$

► 存在特殊的字母表使得 $\beta = \frac{1-\delta}{2}$ （最佳可能）。

给出最佳 β 的特殊字母表

我们称 $\mathcal{A}$ 为“特殊”字母表，如果满足

$$j, \ell \in \mathcal{A}, j \neq \ell, \Rightarrow \mathcal{F}_M(1_{\mathcal{A}})(j - \ell) = 0.$$

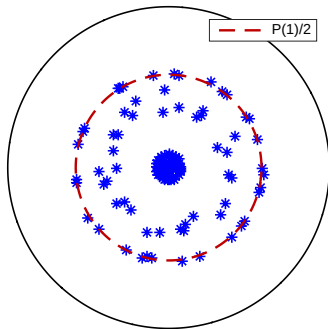
这样的 $\mathcal{A}$ 满足 $\beta = \frac{1-\delta}{2} = -P(1)/2$ ，并且在 $k=1$ 时， $1_{\mathcal{A}}\mathcal{F}_M 1_{\mathcal{A}}$ 所有非零奇异值都等于 $M^{-\frac{1-\delta}{2}}$ 。

给出最佳 β 的特殊字母表

我们称 $\mathcal{A}$ 为“特殊”字母表，如果满足

$$j, \ell \in \mathcal{A}, j \neq \ell, \Rightarrow \mathcal{F}_M(1_{\mathcal{A}})(j - \ell) = 0.$$

这样的 $\mathcal{A}$ 满足 $\beta = \frac{1-\delta}{2} = -P(1)/2$ ，并且在 $k=1$ 时， $1_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_M 1_{\mathcal{A}}$ 所有非零奇异值都等于 $M^{-\frac{1-\delta}{2}}$ 。



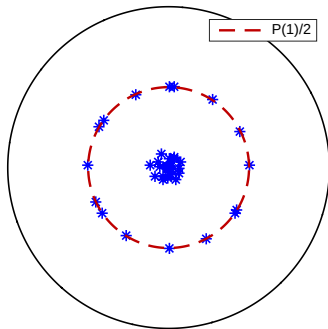
例子: $M = 6$, $\mathcal{A} = \{1, 4\}$, $N = M^5$

给出最佳 β 的特殊字母表

我们称 $\mathcal{A}$ 为“特殊”字母表，如果满足

$$j, \ell \in \mathcal{A}, j \neq \ell, \Rightarrow \mathcal{F}_M(1_{\mathcal{A}})(j - \ell) = 0.$$

这样的 $\mathcal{A}$ 满足 $\beta = \frac{1-\delta}{2} = -P(1)/2$ ，并且在 $k=1$ 时， $1_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_M 1_{\mathcal{A}}$ 所有非零奇异值都等于 $M^{-\frac{1-\delta}{2}}$ 。



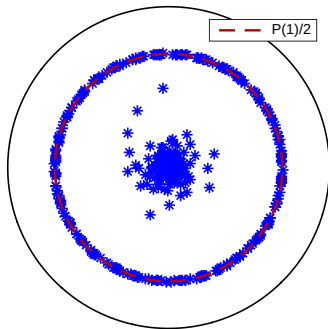
例子: $M=8, \mathcal{A}=\{2,4\}, N=M^4$

给出最佳 β 的特殊字母表

我们称 $\mathcal{A}$ 为“特殊”字母表，如果满足

$$j, \ell \in \mathcal{A}, j \neq \ell, \Rightarrow \mathcal{F}_M(1_{\mathcal{A}})(j - \ell) = 0.$$

这样的 $\mathcal{A}$ 满足 $\beta = \frac{1-\delta}{2} = -P(1)/2$ ，并且在 $k=1$ 时， $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_M \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ 所有非零奇异值都等于 $M^{-\frac{1-\delta}{2}}$ 。



例子: $M = 8, \mathcal{A} = \{1, 2, 5, 6\}, N = M^4$

特殊字母表的带状结构猜想

猜想 1

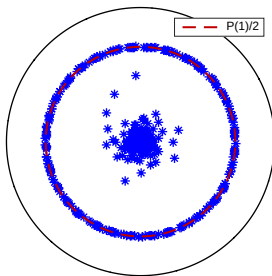
如果 $\mathcal{A}$ 是一个特殊字母表, 则存在 $\mu > \frac{1-\delta}{2}$ 使得:

- ▶ 对任意的 $\varepsilon > 0$ 以及充分大的 N , 存在第二谱隙:

$$\text{Spec}(B_N) \cap \{M^{-\mu} \leq |\lambda| \leq M^{-\frac{1-\delta}{2}-\varepsilon}\} = \emptyset$$

- ▶ 特征值在第一带状区域满足分形 Weyl 定律:

$$|\text{Spec}(B_N) \cap \{|\lambda| \geq M^{-\mu}\}| = |\mathcal{A}|^k = N^\delta$$



一般的 N 对应的开放量子面包师映射

在 B_N 的定义中 (仍然不妨设 $M=3, \mathcal{A}=\{0,2\}$)

$$B_N = \mathcal{F}_N^* \begin{pmatrix} \chi_{N/3} \mathcal{F}_{N/3} \chi_{N/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{N/3} \mathcal{F}_{N/3} \chi_{N/3} \end{pmatrix} : \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2$$

我们可以取 N 是 M 的任意倍数, 而未必是 M 的幂次 M^k 。谱隙仍然可以从一个 FUP 中得出:

$$\|1_{C_k(N)} \mathcal{F}_N 1_{C_k(N)}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta}.$$

这里

► k 使得 $M^k \leq N < M^{k+1}$;

► $C_k(N) \subset \mathbb{Z}_N$ 满足 $|C_k(N)| = |\mathcal{A}|^k$, 并且“像” $C_k \subset \mathbb{Z}_{M^k}$ 。

虽然 $C_k(N)$ 不再有之前好的“张量结构”, 但仍然与 C_k 一样是“分形”的! 我们可以通过对一般的连续 FUP 做离散化得到。

Ahlfors–David 正则集与一般的 FUP

如果 $X \subset \mathbb{R}$ 是一个非空紧集, $\delta \in (0, 1)$, $C_R \geq 1$, 并且 $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \infty$, 我们称 X 在尺度 α_0 到 α_1 是以常数 C_R Ahlfors–David δ -正则的, 如果存在 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度 μ_X 使得

- ▶ μ_X 支在 X 中: $\mu_X(\mathbb{R} \setminus X) = 0$;
- ▶ 对任意长度在 α_0 和 α_1 之间的区间 I , $\mu_X(I) \leq C_R |I|^\delta$;
- ▶ 如果进而 I 的中心在 X 中, 则 $\mu_X(I) \geq C_R^{-1} |I|^\delta$.

定理

如果 $X, Y \subset [0, 1]$ 都是在尺度 h 到 1 中以常数 C_R Ahlfors–David δ -正则的, 则

$$\|1_Y \mathcal{F}_h 1_X\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C h^\beta$$

其中 $\beta > \max(\frac{1}{2} - \delta, 0)$ 只依赖于 C_R 和 δ .

- ▶ Dyatlov–J.: 对 $\delta \leq 1/2$, $\beta \geq \frac{1}{2} - \delta + (40M^{3\delta})^{-\frac{160}{\delta(1-\delta)}}$;
- ▶ Bourgain–Dyatlov, J.–Zhang: 对 $\delta \geq 1/2$, $\beta \geq \exp[-\exp(KM^{K(1-\delta)^{-2}})]$, 其中 K 是一个 (可以计算的) 常数。

一般的 N 的数值结果

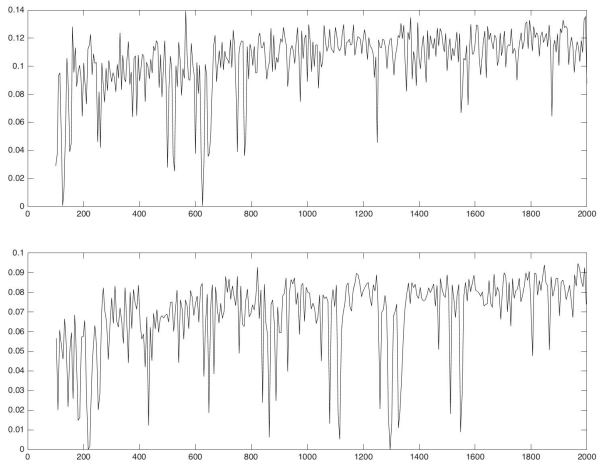


Figure: 两个不同的开放量子映射的谱隙，上面： $M=5$, $\mathcal{A}=\{1,2,3\}$ ；
下面： $M=6$, $\mathcal{A}=\{1,2,3,4\}$ 。X轴： N ；Y轴：谱隙。

对于一般的 N 的猜想

猜想

对 “generic” 的 N , FUP

$$\|1_{C_k(N)} \mathcal{F}_N 1_{C_k(N)}\|_{\ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2} \leq CN^{-\beta}$$

对指数 $\beta = \frac{1-\delta}{2}$ 成立。由此, 存在谱隙 $\beta = \frac{1-\delta}{2}$ 。

- ▶ 回忆 $\beta = \frac{1-\delta}{2}$ 是最大可能的 FUP 指数, 对经典系统, $\frac{1-\delta}{2} = -\frac{1}{2}P(1)$ 是 “逃逸速率”;
- ▶ Lu-Sridhar-Zworski 猜想: 对一般的混沌散射系统, 散射共振谱 “集中” 在 $\text{Im } z = \frac{1}{2}P(1)$ 附近;
- ▶ Jakobson-Naud 猜想: 对凸余紧双曲曲面, 谱隙等于 $\frac{1-\delta}{2}$ 。

2.4 特征值个数的上界

我们还可以考察 B_N 的在环形区域特征值个数:

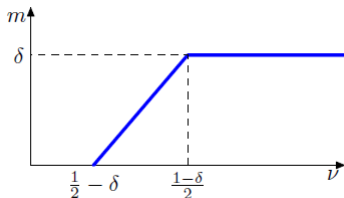
$$\#(N, \nu) = |\operatorname{Spec}(B_N) \cap \{|\lambda| \geq M^{-\nu}\}|$$

定理 3[Dyatlov-J. '17]

对任意的 $\varepsilon > 0$, $\nu > 0$, 我们有特征值个数上界

$$\#(N, \nu) \leq C_{\nu, \varepsilon} N^{m(\delta, \nu) + \varepsilon}, \quad m(\delta, \nu) = \min(\delta, 2\nu + 2\delta - 1)$$

- ▶ 对 $\nu \geq \frac{1-\delta}{2} = -\frac{1}{2}P(1)$, $m = \delta$;
- ▶ 对 $\nu < \frac{1}{2} - \delta = -P(\frac{1}{2})$, $m < 0$ 。

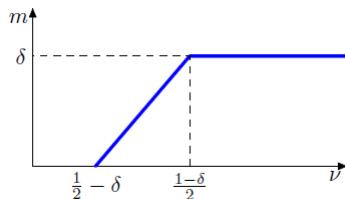


分形 Weyl 定律猜想

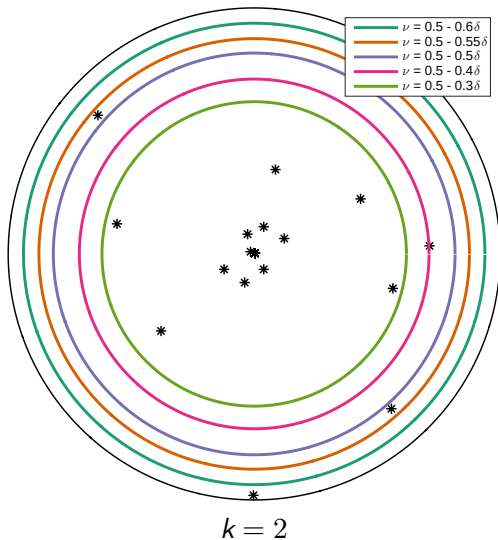
猜想 2

如果 $\nu > -\frac{1}{2}P(1) = \frac{1-\delta}{2}$, 则存在 $c_\nu > 0$ 使得

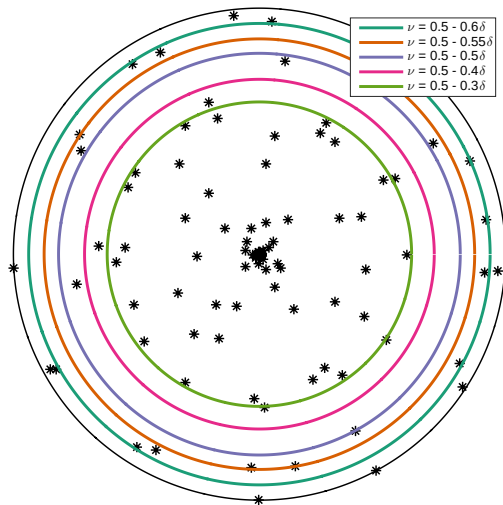
$$\#(N, \nu) \geq c_\nu N^\delta.$$



数值计算结果: $M = 6$, $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$

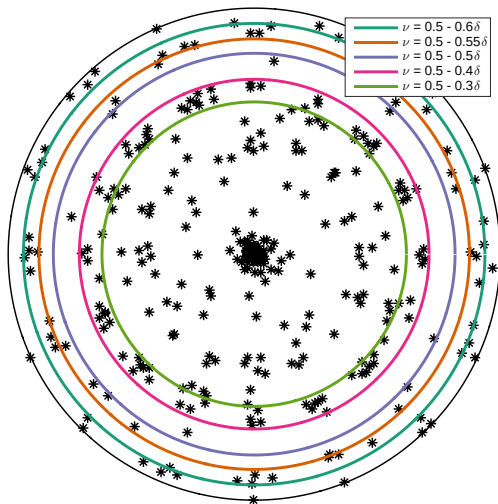


数值计算结果: $M = 6$, $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$



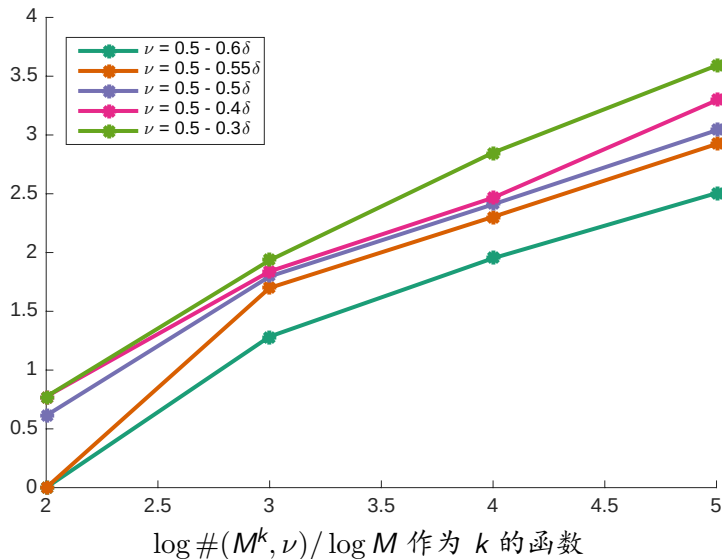
$k = 3$

数值计算结果： $M = 6$, $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$

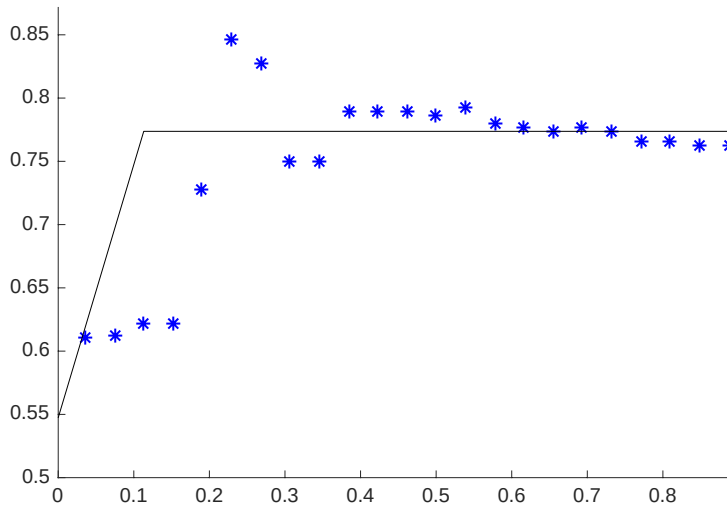


$k = 4$

数值计算结果： $M = 6$, $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$



数值计算结果： $M=6$, $\mathcal{A}=\{1,2,3,4\}$



$\#(N, \nu)$ 增长指数的线性拟合

3. 预备知识：双曲曲面的几何与动力系统性质

3.1 双曲曲面的几何

- ▶ 下面我们考虑的曲面指连通, 可定向, 无边, 二维光滑流形;
- ▶ 我们主要考虑紧曲面 M , 其拓扑上由亏格唯一确定;
- ▶ 对于非紧曲面我们总假设其是拓扑有限的, 即同胚于一个紧曲面去掉有限多个点; 每个被去掉的点的可缩邻域 (的等价类) 称为一个无穷远端;
- ▶ 一个双曲曲面即一个曲面 M 与其上的一个曲率恒为 -1 的完备 Riemann 度量 g 。

例子

- ▶ 双曲平面 $\mathbb{H}^2$: 在等距同构下唯一的单连通双曲曲面, 其它所有的双曲曲面都是 $\mathbb{H}^2$ 模去一个其等距同构群的一个离散子群 Γ (Fuchs 群) 给出的;
- ▶ 由 Gauss-Bonnet 公式, 紧双曲曲面的亏格至少为 2: 事实上每个亏格 ≥ 2 的紧曲面上都有无穷多个不同的双曲度量;
- ▶ 最简单的非平凡的非紧双曲曲面是: 双曲圆柱, 抛物圆柱, 拓扑上都等同于圆柱, 但双曲度量不同。

一点准备: Möbius 变换

给定 2×2 矩阵

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$$

我们定义一个映射如下:

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \ni z \mapsto Tz := \frac{az + b}{cz + d} \in \hat{\mathbb{C}}.$$

- ▶ 这个映射可逆当且仅当 $\det T \neq 0$, 即 $T \in GL(2, \mathbb{C})$, 此时称 T 对应的 Möbius 变换;
- ▶ 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, $T \in GL(2, \mathbb{C})$, T 和 λT 对应的 Möbius 变换是相同的;
- ▶ 所有 Möbius 变换组成的群等同于

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\}.$$

双曲平面：上半平面模型

双曲平面的一个标准模型是上半平面模型

$$\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}, \quad g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

- ▶ 我们将 $\mathbb{H}^2$ 视为 $\hat{\mathbb{C}}$ 的子集，则其边界为 $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- ▶ 在这个模型下，保定向的等距同构群即所有保持上半平面的 Möbius 变换组成的群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 。

$\mathbb{H}^2$ 中的测地线即 $\hat{\mathbb{C}}$ 中的与 $\partial\mathbb{H}$ 正交的圆（在 $\mathbb{H}^2$ 中的部分）：

- ▶ 如果两个交点都在 $\mathbb{R}$ 上，就是以某个 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为中心， $r > 0$ 为半径的半圆弧 $\{z \in \mathbb{H}^2 : |z - x_0| = r\}$;
- ▶ 如果一个交点是 ∞ ，就是以某个 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为基点的竖直向上的射线 $\{z \in \mathbb{H}^2 : \mathrm{Re} z = x_0\}$ 。

双曲平面：Poincaré 单位圆盘模型

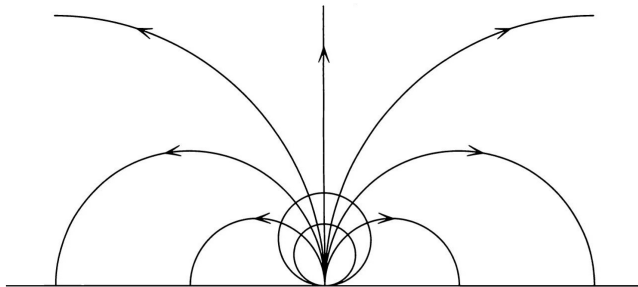
另一个重要的模型是单位圆盘模型

$$\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad g = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2}.$$

- ▶ 可以通过任意一个将 $\mathbb{H}^2$ 映为 $\mathbb{B}^2$ 的 Möbius 变换将这两个模型互相转化，例如 $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ 给出了 $\mathbb{H}^2$ 到 $\mathbb{B}^2$ 的等距同构并且将 i 映为 0。
- ▶ $\mathbb{B}^2$ 的边界即 $S^1 = \{|z| = 1\}$ ，相对 $\mathbb{H}^2$ 的边界直观上容易理解，但是大多数计算时 $\mathbb{H}^2$ 更容易。
- ▶ $\mathbb{B}^2$ 中的保定向等距同构群即 $\mathrm{PSU}(1, 1)$ ；
- ▶ $\mathbb{B}^2$ 中的测地线即与边界 S^1 正交的圆（在 $\mathbb{B}^2$ 中的部分）。

双曲平面中的测地线与极限圆

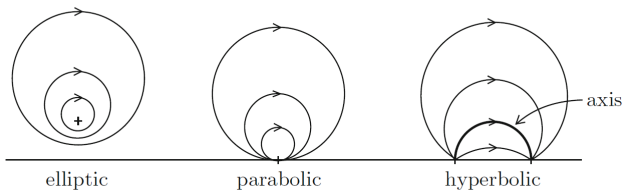
双曲平面中另一类重要的曲线是极限圆 (horocycle)，这是与边界相切的圆 (去掉切点)。



等距同构的分类

现在考虑上半平面模型 $\mathbb{H}^2$, $T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 称为

- ▶ 椭圆的：如果 $\mathrm{Tr} T < 2$, 此时 T 在 $\mathbb{H}^2$ 中有一个不动点；
- ▶ 抛物的：如果 $\mathrm{Tr} T = 2$, 并且 $T \neq I$, 此时 T 在 $\partial\mathbb{H}^2$ 上有一个不动点；
- ▶ 双曲的：如果 $\mathrm{Tr} T > 2$, 此时 T 在 $\partial\mathbb{H}^2$ 上有两个不动点, 其中一个“吸引”, 另一个“排斥”。



双曲曲面的结构定理与分类

Hopf 定理

任意的双曲曲面 M 都是由某个不包含椭圆元的 Fuchs 群 Γ (即 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 的离散子群) 给出的: $M \simeq \mathbb{H}^2 / \Gamma$ 。并且我们有 Γ 不变的万有覆盖映射 $\pi: \mathbb{H} \rightarrow M$ 。

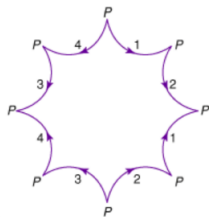
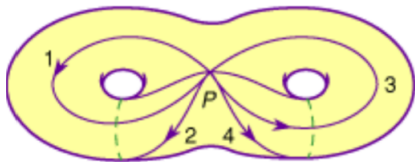
对 Fuchs 群 Γ , 我们定义其极限集 $\Lambda(\Gamma) \subset \partial\mathbb{H}$ 为 $z \in \mathbb{H}$ 的轨道 Γz 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中的所有极限点组成的集合 (不依赖于 z 的选取)。

Poincaré 以及 Fricke–Klein 给出了如下的分类:

- ▶ Γ 称为初等的: 如果 $\Lambda(\Gamma)$ 是有限集, 此时只可能包含 0, 1, 2 个元素。这种情况只有平凡群, 循环群以及共轭于某个 $z \mapsto \lambda z$ 和 $z \mapsto -1/z$ 生成的群。
- ▶ Γ 称为第一类的, 如果 $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$ 。此时 $M = \mathbb{H}^2 / \Gamma$ 是有限面积的。如果进而 M 是紧的, 则称 Γ 为余紧的。
- ▶ Γ 称为第二类的, 如果 $\Lambda(\Gamma)$ 是 $\partial\mathbb{H}$ 中的一个完全 (没有孤立点, 闭) 且无处稠密的集合。此时 $M = \mathbb{H}^2 / \Gamma$ 是无限面积的, $\Lambda(\Gamma)$ 类似于一个 Cantor 集。

紧双曲曲面的例子

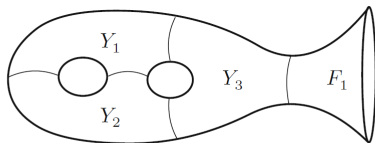
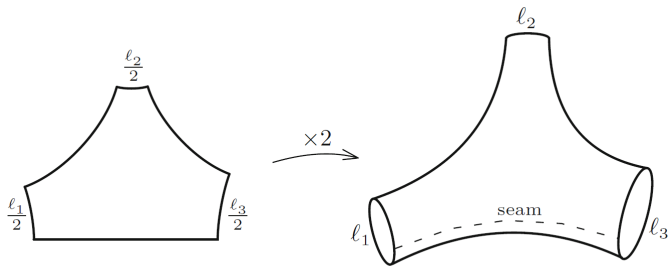
在 Poincaré 单位圆盘中，取以原点为中心的正八边形，使得每条边都是测地线，每个角恰好为 $\pi/4$ ，将其对应的边如图粘起来即得到一个亏格为 2 的紧双曲曲面。



注释

事实上 Teichmüller 理论给出对亏格为 g 的紧曲面 M 上的双曲度量可以由 $6g - 6$ 个参数确定： M 由 $2g - 2$ 个“裤子”组成，每个裤子的三个边界都可以由长度任意给定的测地线确定，因此粘在一起时共有 $3g - 3$ 个长度参数以及扭曲参数。对于非紧情形也有类似理论。

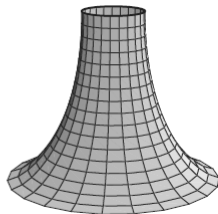
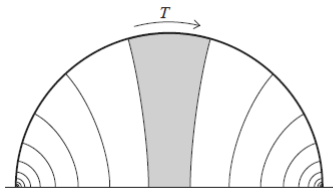
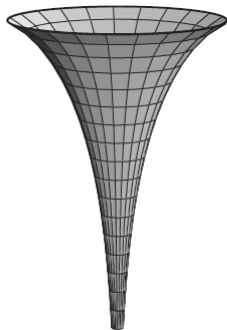
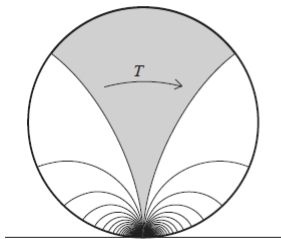
双曲曲面的裤子分解



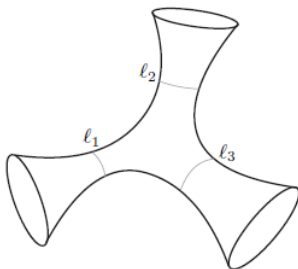
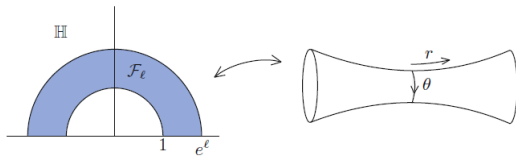
非紧双曲曲面的基本例子

- ▶ 双曲圆柱: Γ 是由一个 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 中的双曲元生成的循环群, 例如由 $z \mapsto e^\ell z$ 生成的群 Γ_ℓ 给出的双曲圆柱 C_ℓ , $\ell \in (0, \infty)$ 。 C_ℓ 上有唯一闭测地线, 长度为 ℓ 。 C_ℓ 沿着这一闭测底线切开的一般称为一个“烟囱”(funnel)。
- ▶ 抛物圆柱: Γ 是有一个 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 中的抛物元生成的循环群, 例如由 $z \mapsto z + 1$ 生成的群 Γ_∞ 。这个圆柱的小的一端称为一个“尖点”(cusp), 大的一端类似于一个烟囱, 但只在这一个情形下出现。
- ▶ 一般的非紧双曲曲面的每个无穷远端要么是一个尖点(对应 Γ 中抛物元), 要么是一个烟囱(对应 Γ 中双曲元)。尖点的面积有限, 而烟囱的面积无限。
- ▶ 如果一个非紧双曲曲面的所有无穷远端都是烟囱, 则称为凸余紧的(等价于其“凸核”是紧的), 此时对应的 Fuchs 群 Γ 又称为 Schottky 的。

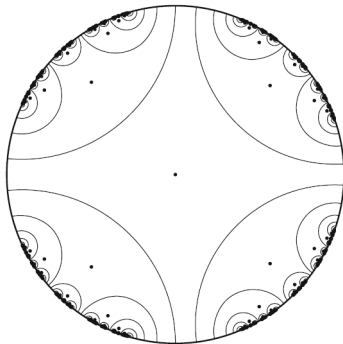
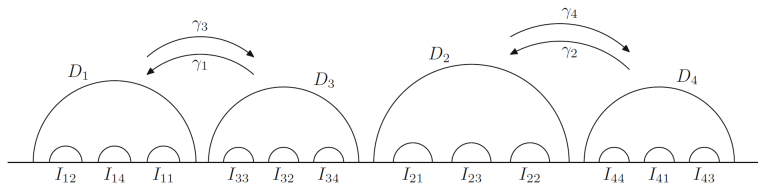
尖点 (cusp) 与烟囱 (funnel)



非紧双曲曲面



Schottky 群与分形极限集



双曲曲面的一些基本不变量

对双曲曲面 $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$,

► Poincaré 级数:

$$P_s(z, w) = \sum_{T \in \Gamma} e^{-sd(z, Tw)}, \quad z, w \in \mathbb{H}^2, s \in \mathbb{C}.$$

► 收敛指数: (不依赖于 z, w 的选取)

$$\delta = \inf\{s \geq 0 : P_s(z, w) < \infty\}.$$

► Selberg ζ -函数:

$$Z_M(s) = \prod_{\ell \in \mathcal{L}_M} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-(s+k)\ell}), \quad s \in \mathbb{C}$$

其中 $\mathcal{L}_M$ 为 M 上所有原始闭测地线长度的集合, (计重数)。

► 长度计数函数:

$$\pi_M(t) = \#\{\ell \in \mathcal{L}_M : \ell \leq t\}.$$

一些经典结果

Patterson–Sullivan 理论

- ▶ δ 等于极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 的 Hausdorff 维数, 特别地, $\delta \in [0, 1]$;
- ▶ 对初等 Fuchs 群 Γ , $\Lambda(\Gamma)$ 有限, 因此 $\delta = 0$;
- ▶ 对第一类 Fuchs 群 Γ , $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{H}$, 因此 $\delta = 1$; (有限面积: 紧或者只有尖点)
- ▶ 对第二类 Fuchs 群 Γ , $\delta \in (0, 1)$ 。并且如果 Γ 包含抛物元, 则 $\delta > 1/2$ 。

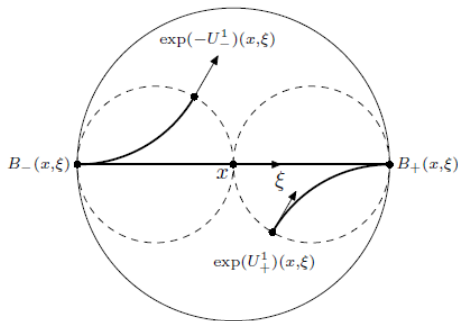
Selberg 理论

- ▶ $Z_M(s)$ 在 $\operatorname{Re} s > \delta$ 时绝对收敛, 并且可以延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数;
- ▶ $Z_M(s)$ 在 $s = \delta$ 有一个单重零点 (对应 Δ 的第一特征值/第一散射共振谱 $\delta(1 - \delta)$), 并且在 $\operatorname{Re} s \geq \delta$ 时没有其它零点。
- ▶ 素数定理的类比: $\pi_M(t) \sim e^{\delta t} / \delta t$ 以及更强渐进形式。

3.2 双曲曲面上的动力系统

在双曲曲面 $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ 上有两（三）个重要的动力系统：

- ▶ 测地流： $\varphi_t = e^{tX} : S^*M \rightarrow S^*M$;
- ▶ 稳定/非稳定极限圆流： $\psi^s = e^{sU_{\pm}} : S^*M \rightarrow S^*M$ 。



测地流与极限圆流的表示

我们可以将 $S^*\mathbb{H}^2$ 等同于李群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, 即 $T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 对应于 $(T(i), dT(i))$ 。则此时测地流 $\varphi_t = \exp(tX)$ 的生成向量场 X 以及极限圆流 $\psi_s^\pm = \exp(sU_\pm)$ 的生成向量场 $U_\pm$ 都是 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 上的不变向量场, 因此可以由其李代数

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) : \mathrm{Tr} A = 0\}.$$

中的元素确定:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

它们之间有如下的关系:

$$[X, U_\pm] = \pm U_\pm.$$

因此

$$e^{tX} e^{sU_\pm} = e^{se^{\pm t} U_\pm} e^{tX}.$$

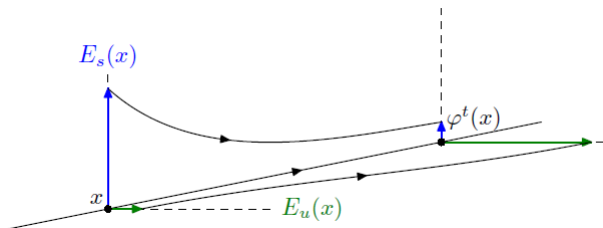
测地流的 Anosov 性质

$$T_x(S^*M) = E_0(x) \oplus E_s(x) \oplus E_u(x)$$

$$d\varphi_t(x)E_\bullet(x) = E_\bullet(\varphi_t(x)), \quad \bullet = s, u, \quad E_0(x) = \mathbb{R}X(x)$$

$$|d\varphi_t(x)v|_{\varphi_t(x)} \leq Ce^{-\theta|t|}|v|_x, \quad v \in E_u(x), \quad t < 0$$

$$|d\varphi_t(x)v|_{\varphi_t(x)} \leq Ce^{-\theta|t|}|v|_x, \quad v \in E_s(x), \quad t > 0$$



- 在双曲曲面上 $E_s = \mathbb{R}U_+$, $E_u = \mathbb{R}U_-$, 并且上面两个估计中 $C = 1$, $\theta = 1$ 且取等号。换言之, 我们有一致扩张/压缩速率。

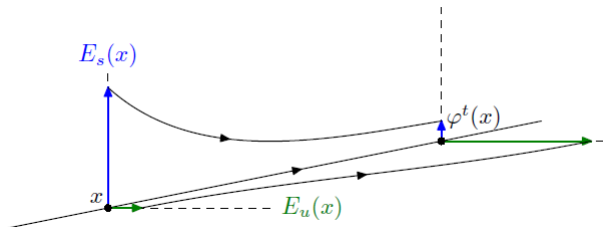
测地流的 Anosov 性质

$$T_x(S^*M) = E_0(x) \oplus E_s(x) \oplus E_u(x)$$

$$d\varphi_t(x)E_\bullet(x) = E_\bullet(\varphi_t(x)), \quad \bullet = s, u, \quad E_0(x) = \mathbb{R}X(x)$$

$$|d\varphi_t(x)v|_{\varphi_t(x)} \leq Ce^{-\theta|t|}|v|_x, \quad v \in E_u(x), \quad t < 0$$

$$|d\varphi_t(x)v|_{\varphi_t(x)} \leq Ce^{-\theta|t|}|v|_x, \quad v \in E_s(x), \quad t > 0$$



- 对一般的负曲率流形也存在使得以上估计成立的分解，但不再有一致的扩张/压缩速率。这个分解也不再光滑地依赖于 x ，而只是 Hölder 连续地依赖于 x 。

紧双曲曲面 M 上测地流 $\varphi_t = \exp(tX)$ 的性质

基于拓扑的性质

- ▶ φ_t 的所有周期轨道的并在 S^*M 是稠密的;
- ▶ 存在一条 φ_t 的轨道在 S^*M 中稠密;
- ▶ 拓扑传递的: 对任意的开集 $U, V \subset S^*M$ 以及 $T > 0$, 存在 $t > T$ 使得 $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ 。

基于测度的性质

- ▶ S^*M 上的 Liouville 测度 μ_L 关于 φ_t 是遍历的: 任意不变子集 $A \subset S^*M$ 满足 $\mu_L(A) = 0$ 或者 $\mu_L(S^*M \setminus A) = 0$;
- ▶ μ_L 还是混合的: 对任意的 $f, g \in C(M)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(g \circ \varphi_t) d\mu_L = \left(\int f d\mu_L \right) \left(\int g d\mu_L \right)$$

事实上, 还是指数混合的, 即收敛速度为指数快的。

紧双曲曲面 M 上极限圆流 $\psi_s^\pm = \exp(sU_\pm)$ 的性质

基于拓扑的性质

- ▶ ψ_s 没有周期轨道;
- ▶ 所有 ψ_s 的轨道在 S^*M 中稠密;
- ▶ 回归: 对任意的开集 $U \subset S^*M$, 存在 $T > 0$ 使得对任意的 $x \in S^*M$, $\{\psi_s(x) : s \in [0, T]\} \cap U \neq \emptyset$ 。

基于测度的性质

- ▶ S^*M 上的 Liouville 测度 μ_L 关于 ψ_s 是遍历的并且是混合的:
- ▶ 事实上, 它还是唯一遍历的: 即 Liouville 测度是唯一不变的遍历 (概率) 测度。

简单模型：Arnold 猫映射

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \pmod{1}.$$

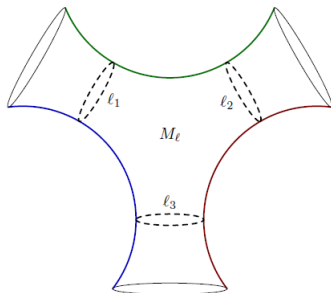
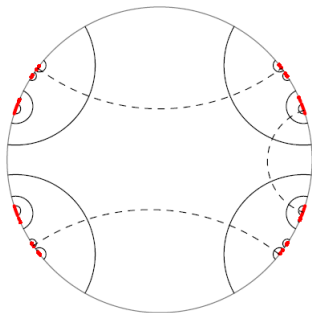
- ▶ 矩阵 A 有两个不同的特征值 $0 < \lambda_+ < 1 < \lambda_-$, $\lambda_+ \lambda_- = 1$;
- ▶ 对应的特征向量 $v_+, v_- \in \mathbb{R}^2$ 的方向是无理的。
- ▶ 我们可以考虑由 A 给出的离散时间的系统 φ_j , $j \in \mathbb{Z}$, 以及对应的连续时间系统 $\psi_s^\pm(x) = x + sv_\pm$, 满足

$$\varphi_j \circ \psi_s^\pm = \psi_{s\lambda_\pm^j}^\pm \circ \varphi_j.$$

这些系统可以容易验证满足前述测地流/极限圆流的性质。

凸余紧双曲曲面上的动力系统性质

- ▶ 测地流的陷阱集 $K \subset S^*M$ 由不趋于无穷远的轨道的并组成；
- ▶ K 中元素对应的测地线两端都趋于极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 中的点，因此 $\dim K = 2\delta + 1$ ；
- ▶ 可以构造恰当的遍历的测度，并且定义“熵”，“压强”等概念...



4. 准备：双曲曲面上的半经典微局部分析

4.1 回顾: $\mathbb{R}^n$ 上的半经典量子化

对 $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$,

$$\mathrm{Op}_h(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi/h} a(x, \xi) u(y) dy d\xi.$$

► 定义可以延拓到象征类 $S^m(T^*\mathbb{R}^n)$ 中:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

- 如果 $a = a(x)$, 则 $\mathrm{Op}_h(a)u(x) = a(x)u(x)$;
- 如果 $a = a(\xi)$, 则 $\mathrm{Op}_h(a)u(x) = \mathcal{F}_h^{-1}[a(\xi)\mathcal{F}_h u(\xi)]$ 。
- 如果 $a \in S^0$, 则 $\mathrm{Op}_h(a) : L^2 \rightarrow L^2$ 有界。

半经典量子化的基本性质

► $\text{Op}_h(a) \text{Op}_h(b) = \text{Op}_h(c) = \text{Op}_h(ab) + \mathcal{O}(h),$

$$c = e^{ih\langle D_\xi, D_y \rangle} a(x, \xi) b(y, \eta) |_{y=x, \eta=\xi} \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) (hD_x)^\alpha b(x, \xi).$$

► $[\text{Op}_h(a), \text{Op}_h(b)] = -ih \text{Op}_h(\{a, b\}) + \mathcal{O}(h^2),$

$$\{a, b\} = H_a b = \langle \partial_\xi a, \partial_x b \rangle - \langle \partial_x a, \partial_\xi b \rangle.$$

► Gårding 不等式: 如果 $a \in S$, $a \geq 0$, 则

$$\langle \text{Op}_h(a) u, u \rangle \geq -Ch \|u\|_{L^2}^2.$$



$$\|\text{Op}_h(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \sup |a| + \mathcal{O}(h).$$

紧流形上的半经典量子化

► 如果 $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是微分同胚,

$$(\gamma^{-1})^* \text{Op}_h(a)(\gamma^*) = \text{Op}_h(b) + \mathcal{O}(h),$$

$$b(x, \xi) = a(\gamma^{-1}(x), \partial\gamma(\gamma^{-1}(x))^T \xi).$$

可以通过单位分解及截断函数定义（未必唯一典范的）量子化映射

$$\text{Op}_h: S^m(T^*M) \ni a \mapsto \text{Op}_h(a) \in \Psi_h^m(M)$$

以及主象征映射

$$\sigma_h: \Psi_h^m(M) \ni A \mapsto \sigma_h(A) \in S^m/hS^{m-1}(T^*M).$$

满足 $\sigma_h(\text{Op}_h(a)) = [a]$ 。之前的性质仍然成立。

► Laplace 算子 $-h^2\Delta$ 的主象征为 $p(x, \xi) := |\xi|_{g_x}^2$ 。

微局部化：波前集

- ▶ 对 $a \in S^k(T^*M)$, 如果存在 $(x_0, \xi_0) \in T^*M$ 的邻域 W 使得在 W 中 $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) = \mathcal{O}(h^\infty)$, 则称在 (x_0, ξ_0) 附近 $a = \mathcal{O}(h^\infty)$;
- ▶ 对 $A \in \Psi^k(M)$, 如果 $(x_0, \xi_0) \in T^*M$ 使得对任意的局部坐标卡中 A 的局部表示的全象征都在 (x_0, ξ_0) 附近 $= \mathcal{O}(h^\infty)$, 则称 $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}_h(A)$ 。 $\text{WF}_h(A) \subset T^*M$ 为一个闭集。
- ▶ 如果某个开集 $U \subset T^*M$ 满足 $\text{WF}_h(A - B) \cap U = \emptyset$, 则称在 U 中微局部地 $A = B + \mathcal{O}(h^\infty)$ 。类似地可以定义在某个紧集 V 附近微局部地 $A = B + \mathcal{O}(h^\infty)$ 。
- ▶ 如果 $\text{WF}_h(A) \subset T^*M$ 是一个紧集, 则称 $A \in \Psi^{\text{comp}}(M)$ 。
 $\Psi^{\text{comp}}(M) \subset \Psi^m(M)$, $\forall m \in \mathbb{R}$ 。
- ▶ $\text{WF}_h(A + B) \subset \text{WF}_h(A) \cup \text{WF}_h(B)$,
 $\text{WF}_h(AB) \subset \text{WF}_h(A) \cap \text{WF}_h(B)$, $\text{WF}_h(A^*) = \text{WF}_h(A)$ 。

椭圆估计, 单位分解

- ▶ 对 $A \in \Psi^k(M)$, 如果 $(x_0, \xi_0) \in T^*M$ 使得 $\sigma_h(A)$ 作为 S^k/hS^{k-1} 的元素在 (x_0, ξ_0) 附近可逆, 则称 A 在 (x_0, ξ_0) 处椭圆, 并记为 $(x_0, \xi_0) \in \text{ell}_h(A)$.
- ▶ 椭圆估计: 如果 $A, B \in S^0$, $\text{WF}_h(A) \subset \text{ell}_h(B)$, 则

$$\|Au\|_{L^2} \leq C\|Bu\|_{L^2} + \mathcal{O}(h^\infty).$$

- ▶ 微局部单位分解: 如果 $a_1, \dots, a_k \in S^0(T^*M)$ 使得在紧集 $V \subset T^*M$ 附近 $\sum a_j = 1$, 则存在 $A_1, \dots, A_k \in \Psi^0(M)$ 使得

$$\sigma_h(A_j) = a_j, \quad \text{WF}_h(A_j) \subset \text{supp } a_j;$$

并且在 V 附近微局部地有 $\sum A_j = I + \mathcal{O}(h^\infty)$.

Egorov 定理

- ▶ $P = \text{Op}_h(p)$, $U(t) = e^{-itP/h}$, $|t| \leq T$, 其中 T 不依赖于 h , 则

$$U(-t) \text{Op}(a) U(t) = \text{Op}_h(a_t) + \mathcal{O}(h^\infty), a \in S^{\text{comp}}$$

其中

$$a_t = a \circ \exp(tH_p) + \mathcal{O}(h).$$

- ▶ 特殊情形: $p = |\xi|_g$, $P = \sqrt{-h^2\Delta}$, 则 H_p 在 S^*M 上等于测地流的生成向量场 X , $\exp(tH_p)$ 即测地流在 $T^*M \setminus 0$ 上的齐次延拓。此时 $U(t) = e^{-it\sqrt{-\Delta}}$ 为“半波算子”。
- ▶ 以上我们需要假设 t 的上界 T 不依赖于 h , 一般而言我们可以取 $T = c \log(1/h)$, 即 Ehrenfest 时间, 但是我们需要放宽象征类的限制, 利用奇异象征类 S_δ^{comp} 。

奇异象征类 S_δ^{comp}

$$S_\delta^{\text{comp}} = \{a \in C_c^\infty(T^*M) : |\partial^\alpha a| \leq Ch^{-\delta|\alpha|}\}.$$

- 当 $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ 时有与之前类似良好的性质:

$$\text{Op}_h(a) \text{Op}_h(b) = \text{Op}_h(ab) + \mathcal{O}(h^{1-2\delta}).$$

- 临界情形 $\delta = \frac{1}{2}$ 不再有渐进展开等性质, 但仍有一定用处。
- 直到 Ehrenfest 时间的 Egorov 定理: $P = \text{Op}_h(p)$, $U(t) = e^{-itP/h}$, p 不依赖于 h , 定义 Lyapunov 指数

$$\Gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup \log \|d \exp(tH_p)\|.$$

则对任意的 $\gamma > \Gamma$, $\delta \in (0, \frac{1}{2})$,

$$0 \leq t \leq T := T_0 + \frac{\delta}{\gamma} \log(1/h),$$

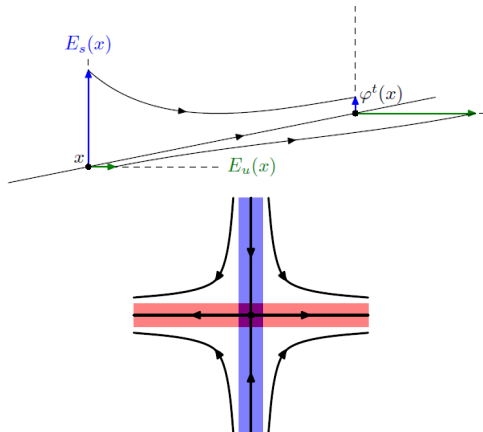
$$U(-t) \text{Op}_h(a) U(t) = \text{Op}_h(a_t) + \mathcal{O}(h^\infty), a \in S^{\text{comp}}$$

其中

$$a_t = a \circ \exp(tH_p) + \mathcal{O}_{S_\delta^{\text{comp}}}(h^{2-3\delta}).$$

4.2 双曲曲面上的直到 Ehrenfest 时间的 Egorov 定理

- ▶ 在双曲曲面上 Lyapunov 指数 $\Gamma = 1$ ，因此 Ehrenfest 时间为 $(\frac{1}{2} - \varepsilon) \log(1/h)$ ；
- ▶ 在我们的应用中我们实际上要一直走到时间 $(1 - \varepsilon) \log(1/h)$ ，这是我们需要一个“各向异性”的奇异象征类。



Lagrange 叶状结构

$U \subset T^*M$ 是一个开集, $L = L_{(x,\xi)} \subset T_{(x,\xi)}(T^*M)$, $(x,\xi) \in U$ 称为 U 上的一个 Lagrange 叶状结构, 如果

- ▶ L 是可积的: 如果 X, Y 是 U 上在取值在 L 中的向量场, 则 $[X, Y]$ 也是;
- ▶ L 在每个点都是 Lagrange 子空间。

标准例子

在 $T^*\mathbb{R}^n_{(y,\eta)}$ 上, 取 L_0 处处等于 $\partial_{\eta_1}, \dots, \partial_{\eta_n}$ 张成的子空间。

Lagrange 叶状结构定理

任意 Lagrange 叶状结构局部上可以被辛映射映为 L_0 。

$\mathbb{R}^n$ 上各向异性的象征类

我们称 $a = a(y, \eta; h) \in S_{L_0, \rho}^{\text{comp}}(T^*\mathbb{R}^n)$, 其中 $0 \leq \rho < 1$, 如果

$$\sup_{y, \eta} |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a| \leq C_{\alpha\beta} h^{-\rho|\alpha|}.$$

仍然定义 $\text{Op}_h(a)$ 如前, 利用如下的酉变换: $T_\rho: L^2 \rightarrow L^2$,

$$T_\rho u(y) = h^{\rho/4} u(h^{\rho/2} y)$$

我们有 $T_\rho \text{Op}_h(a) T_\rho^{-1} = \text{Op}_h(a_\rho)$, 其中

$$a_\rho(x, \xi; h) = a(h^{\rho/2} x, h^{-\rho/2} \xi; h) \in S_{\rho/2}.$$

因此我们的各向异性的象征类可以转化为通常的奇异象征类 S_δ , $\delta = \rho/2 \in [0, \frac{1}{2})$, 从而可以建立良好的运算法则。

$S_{L_0, \rho}^{\text{comp}}$ 运算

- 对 $a, b \in S_{L_0, \rho}^{\text{comp}}$, 我们有 $\text{Op}_h(a) \text{Op}_h(b) = \text{Op}_h(c) + \mathcal{O}(h^\infty)$, 其中

$$c \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\eta}^{\alpha} a(y, \eta) (hD_y)^{\alpha} b(y, \eta) = ab + \mathcal{O}(h^{1-\rho}).$$

- 对 $a \in S_{L_0, \rho}^{\text{comp}}$, $\text{Op}_h(a)^* = \text{Op}_h(a^*) + \mathcal{O}(h^\infty)$,

$$a^* = \bar{a} + \mathcal{O}(h^{1-\rho}).$$

- 如果 $a \in S_{L_0, \rho}^{\text{comp}}$, $\text{Re } a \geq 0$, 则

$$\text{Re} \langle \text{Op}_h(a)u, u \rangle_{L^2} \geq Ch^{1-\rho} \|u\|_{L^2}^2.$$

- 如果 $a \in S_{L_0, \rho}^{\text{comp}}$,

$$\|\text{Op}_h(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \sup |a| + \mathcal{O}(h^{1-\rho}).$$

双曲曲面上的稳定/非稳定叶状结构

对双曲曲面 $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$, 我们固定如下的一族 $T(T^*M \setminus 0)$ 上的标架:

$$H_p, U_+, U_-, D \in C^\infty(T^*M \setminus 0, T(T^*M \setminus 0)).$$

- ▶ H_p 是 $p = |\xi|_{g_x}$ 的 Hamilton 向量场, 生成齐次测地流;
- ▶ $U_\pm$ 是前述 S^*M 上的极限圆流的生成向量场, 并齐次延拓到 $T^*M \setminus 0$;
- ▶ $D = \xi \cdot \partial_\xi$ 是纤维方向伸缩变换的生成向量场。

满足

$$[H_p, U_\pm] = \pm U_\pm; \quad [H_p, D] = [U_\pm, D] = 0.$$

并且我们有以下两个 Lagrange 叶状结构:

$$L_s = \text{Span}(H_p, U_+), \quad L_u = \text{Span}(H_p, U_-)$$

双曲曲面上的各向异性的奇异象征类

我们定义 $a = a(x, \xi; h) \in S_{L, \rho}^{\text{comp}}(T^*M \setminus 0)$, $L = L_u$ 或 L_s , $\rho \in [0, 1)$, 如果

- ▶ 对 $0 < h \leq 1$, $a \in C^\infty(T^*M \setminus 0)$, 并且 $\text{supp } a$ 包含于一个不依赖于 h 的紧集中;
- ▶ $\sup |a(x, \xi; h)| \leq C$, C 不依赖于 h ;
- ▶ a 满足如下估计: 对任意向量场 $Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_k$, 其中 $Y_1, \dots, Y_m$ 与 L 相切, 都有

$$\sup_{x, \xi} |Y_1 \cdots Y_m Z_1 \cdots Z_k a| \leq Ch^{-\rho k}, \quad 0 < h \leq 1.$$

注释

在最终证明中, 我们还需要一个比以上条件稍弱的象征类, 即允许求导后丢失 $(\log h)$ 的幂次的情形。为简单起见, 我们这里略过。

Fourier 积分算子作为辛映射的量子化

- ▶ 在 T^*M 上, 我们可以用 (恰当的) 辛映射做坐标变换 $(x, \xi) \mapsto (y, \eta)$ 使得 $L = L_u, L_s$ 变成 L_0 ;
- ▶ 事实上, 在 $\mathbb{H}^2$ 上我们可以找到如下的具有显式表达式的辛映射:

$$\kappa^\pm : T^*\mathbb{H}^2 \setminus 0 \rightarrow T^*(\mathbb{R}_w^+ \times \mathbb{S}_y^1)$$

使得

$$(\kappa^+)_*(L_u) = (\kappa^-)_*(L_s) = L_v = \ker(dw) \cap \ker(dy).$$

- ▶ 因此我们可以利用满足以下条件的 Fourier 积分算子 $B \in I_h^{\text{comp}}(\kappa)$ 以及 $B' \in I_h^{\text{comp}}(\kappa^{-1})$ 来构造 T^*M 上 $S_{L,\rho}^{\text{comp}}$ 的量子化:

$$BB', B'B \in \Psi^{\text{comp}}, \quad \text{微局部地 } BB' = I + \mathcal{O}(h^\infty), B'B = I + \mathcal{O}(h^\infty).$$

双曲曲面上的各向异性象征类的量子化

我们现在可以定义如下量子化:

$$\mathrm{Op}_h^L : S_{L,\rho}^{\mathrm{comp}}(T^*M \setminus 0) \ni a \mapsto A = \mathrm{Op}_h^L(a) \in \Psi_{h,L,\rho}^{\mathrm{comp}}(M).$$

以及对应的主象征映射

$$\sigma_h^L : \Psi_{h,L,\rho}^{\mathrm{comp}}(M) \ni A \mapsto \sigma_h^L(A) \in S_{L,\rho}^{\mathrm{comp}}/h^{1-\rho}S_{L,\rho}^{\mathrm{comp}}.$$

满足

- ▶ $\sigma_h^L(\mathrm{Op}_h^L(a)) = a + \mathcal{O}(h^{1-\rho})$;
- ▶ 如果 $A \in \Psi_{h,L,\rho}^{\mathrm{comp}}$ 使得 $\sigma_h^L(A) = \mathcal{O}(h^{1-\rho})$, 则 $A \in h^{1-\rho}S_{L,\rho}^{\mathrm{comp}}$.
- ▶ 对任意的 $A \in \Psi_{h,L,\rho}^{\mathrm{comp}}$, 存在 $a \in S_{L,\rho}^{\mathrm{comp}}$,
 $\mathrm{Op}_h^L(a) = A + \mathcal{O}(h^\infty)$.

$S_{L,\rho}^{\text{comp}}$ 量子化的性质

- ▶ 如果 $a \in C_c^\infty(T^*M \setminus 0)$ 不依赖于 h , 则

$$\text{Op}_h^L(a) = \text{Op}_h(a) \in \Psi^{\text{comp}}(M), \quad \sigma_h(\text{Op}_h^L(a)) = a.$$

- ▶ 对任意的 $A, B \in \Psi_{h,L,\rho}^{\text{comp}}$,

$$\sigma_h^L(AB) = \sigma_h^L(A)\sigma_h^L(B) + \mathcal{O}(h^{1-\rho})$$

- ▶ 对任意的 $A \in \Psi_{h,L,\rho}^{\text{comp}}$,

$$\sigma_h^L(A^*) = \overline{\sigma_h^L(A)} + \mathcal{O}(h^{1-\rho})$$

- ▶ 对任意的 $A \in \Psi_{h,L,\rho}^{\text{comp}}$,

$$\|A\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \sup |\sigma_h^L(A)| + \mathcal{O}(h^{1-\rho}).$$

双曲曲面上“两倍”Ehrenfest 时间的 Egorov 定理

如果 $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ 是一个紧双曲曲面，并且

- ▶ $a \in S^{\text{comp}}(T^*M \setminus 0)$ 不依赖于 h , $A = \text{Op}_h(a)$;
- ▶ $p(x, \xi) = |\xi|_{g_x}$, $\varphi_t = \exp(tH_p)$ 为 (齐次) 测地流,
- ▶ $U(t) = e^{-itP/h}$, $P = \text{Op}_h(p)$, $A(t) := U(-t)AU(t)$ 。

则对固定的 $\rho \in [0, 1)$, 对 $t \in [0, \rho \log(1/h))$,

$$A(t) = \text{Op}_h^{L_s}(a \circ \varphi_t) + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(h^{1-\rho}), \quad a \circ \varphi_t \in S_{L_s, \rho}^{\text{comp}}$$

$$A(-t) = \text{Op}_h^{L_u}(a \circ \varphi_{-t}) + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(h^{1-\rho}), \quad a \circ \varphi_{-t} \in S_{L_u, \rho}^{\text{comp}}.$$

注意!

对不同的 L , 例如 $a \in S_{L_s, \rho}^{\text{comp}}$ 及 $b \in S_{L_u, \rho}^{\text{comp}}$, 一般而言 ab 不在合理的象征类中! $\text{Op}_h^{L_s}(a) \text{Op}_h^{L_u}(b)$ 不再是“拟微分算子”, 但是我们下一次将要运用 FUP 来分析这样的算子。

5. 紧双曲曲面上的控制问题

5.1 Laplace 特征函数

我们现在考虑一个紧 Riemann 流形 (M, g) 上的 Laplace 特征函数:

$$(-\Delta - \lambda^2)u = 0, \quad \|u\|_{L^2} = 1.$$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \nearrow +\infty.$$

在 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时的极限行为:

- ▶ M 上概率密度 $|u|^2 dx$ 在 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时的弱极限 ν (总存在, 但未必唯一) 称为一个“量子极限”: 对任意的 $a \in C(M)$,

$$\int_M a|u|^2 dx \rightarrow \int_M a d\nu.$$

- ▶ 我们可以进而将其提升至 T^*M 上的“半经典测度” μ : 对任意的 $a \in C_c^\infty(T^*M)$, 令 $h = \lambda^{-1}$, $(-h^2\Delta - 1)u = 0$,

$$\langle \text{Op}_h(a)u, u \rangle_{L^2} \rightarrow \int_{T^*M} a d\mu.$$

Laplace 特征函数的半经典测度

$$(-h^2\Delta - 1)u = 0, \quad \|u\|_{L^2} = 1, \quad \langle \text{Op}_h(a)u, u \rangle \rightarrow \int_{T^*M} a d\mu.$$

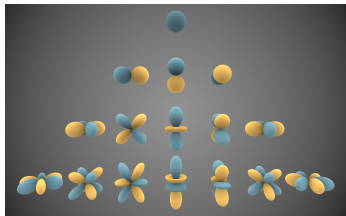
基本性质

- ▶ μ 是概率测度;
- ▶ $\text{supp } \mu \subset S^*M = \{(x, \xi) : |\xi|_{g_x} = 1\}$;
- ▶ μ 在测地流 $\varphi_t = \exp(tH_p)$, $p = |\xi|_{g_x}$ 下不变。

基本例子

- ▶ Liouville 测度 μ_L : 对应“均匀分布”;
- ▶ 支在测地流的一条闭轨道 γ 上的 δ 测度 δ_γ : “强伤疤”;
- ▶ 在这两者之间还有许多例子。

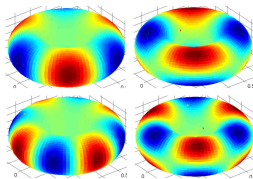
球面 S^2



对通常的球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$,

- ▶ Laplace 特征函数由球调和函数给出, 即 $\mathbb{R}^3$ 中齐次调和多项式;
- ▶ 存在特征函数序列“集中”在赤道附近, 对应的半经典测度支在一条测地流的闭轨道上;
- ▶ 事实上, Jakobson, Zelditch, Maciá... 说明所有在测地流下不变的概率测度都是某一系列特征函数的半经典测度。

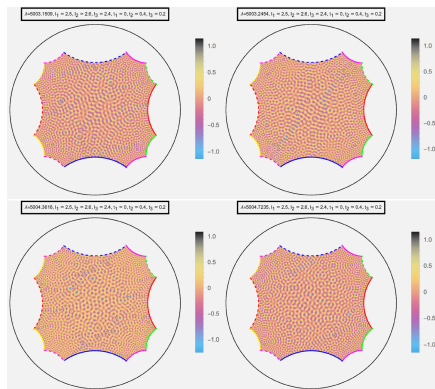
环面 $\mathbb{T}^2$



对环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

- ▶ Laplace 特征函数形如 $\sin 2\pi kx \sin 2\pi \ell y$, $\cos 2\pi kx \cos 2\pi \ell y$, $\dots$, $k, \ell \in \mathbb{N}$;
- ▶ 注意到特征值为 $\lambda^2 = 4\pi^2(k^2 + \ell^2)$, 实际上某些特征值有很大的重数, 对应的特征函数包含上面基函数的线性组合;
- ▶ Cooke, Zygmund, Bourgain... 所有量子极限都关于 Lebesgue 测度绝对连续;
- ▶ 特别地, 半经典测度不可能是支在某条测地流闭轨道上的 δ 测度。

双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\Gamma$



对双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\Gamma$,

- ▶ 测地流在 S^*M 上遍历, Shnirelman, Colin de Verdière, Zelditch 的量子遍历定理说明存在“密度”为 1 的特征函数序列的半经典测度是 Liouville 测度。
- ▶ 量子唯一遍历猜想: Rudnick-Sarnak 进而猜想 Liouville 测度是唯一的半经典测度。

5.2 主要定理

定理 [Dyatlov–J. 2018]

如果 M 是一个紧双曲曲面，则 Laplace 特征函数的半经典测度 μ 满足 $\text{supp } \mu = S^*M$ ，即对任意的非空开集 $\mathcal{U} \subset S^*M$ ， $\mu(\mathcal{U}) > 0$ 。

- ▶ 对算术双曲曲面，Lindenstrauss 证明“Hecke 形式”的半经典测度一定是 Liouville 测度。
- ▶ 一般而言，在负曲率流形上 Anantharaman 证明了半经典测度的熵有正的下界，特别地，不能是支在某条测地流闭轨道上的 δ 测度。
- ▶ 在紧双曲曲面的情形，Anantharaman–Nonnenmacher, Rivière 证明半经典测度的 Kolmogorov–Sinai 熵 $h_{KS}(\mu) \geq 1/2$ 。
- ▶ Dyatlov–J.–Nonnenmacher 将定理推广至一般紧负曲率曲面（乃至更一般的 Anosov 曲面）的情形。

主要定理

定理 [Dyatlov–J. 2018]

如果 M 是一个紧双曲曲面，则 Laplace 特征函数的半经典测度 μ 满足 $\text{supp } \mu = S^*M$ ，即对任意的非空开集 $\mathcal{U} \subset S^*M$ ， $\mu(\mathcal{U}) > 0$ 。

- ▶ Anantharaman–Nonnenmacher, Rivière: $h_{KS}(\mu) \geq 1/2$;
- ▶ 注意对一般的不变测度， $0 \leq h_{KS}(\mu) \leq 1$; $h_{KS}(\mu_L) = 1$; $h_{KS}(\delta_\gamma) = 0$; 并且 $h_{KS}(\mu) = 1$ 当且仅当 $\mu = \mu_L$ 。
- ▶ 一方面， $h_{KS}(\mu) \geq 1/2$ 排除了形如 $\mu = \alpha\mu_L + (1 - \alpha)\delta_\gamma$ ， $\alpha < 1/2$ 的测度，而我们的结果不能；
- ▶ 另一方面， $h_{KS}(\mu) \geq 1/2$ 可以推出 $\dim \text{supp } \mu \geq 2$ 。特别地，存在不变测度 μ 使得 $\dim \text{supp } \mu$ 非常接近 3，并且 $h_{KS}(\mu)$ 非常接近 1，我们的结果可以排除这样的测度但是熵下界不能。
- ▶ 注意对量子猫映射模型，存在半经典测度 $\frac{1}{2}\mu_L + \frac{1}{2}\delta_\gamma$ ！

主要估计

定理 [Dyatlov–J. 2018]

如果 M 是一个紧双曲曲面, $a \in C_c^\infty(T^*M)$, 并且 $a|_{S^*M} \not\equiv 0$, 则存在 $C, h_0 > 0$, 只依赖于 M 和 a 使得对任意的 $h \in (0, h_0)$ 以及 $u \in H^2(M)$,

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\mathrm{Op}_h(a)u\|_{L^2} + \frac{C \log(1/h)}{h} \|(-h^2\Delta - 1)u\|_{L^2}.$$

- ▶ 在这个估计中取 $(-h^2\Delta - 1)u = 0$ 即得主要定理;
- ▶ 这个估计实际上说明我们还可以将特征函数放宽为 $o(h/\log(1/h))$ -准态 (quasimode):
 $(-h^2\Delta - 1)u = o(h/\log(1/h))$.
- ▶ 另一方面如果 $a|_{S^*M} \equiv 0$, 对 $(-h^2\Delta - 1)u = 0$, 我们有 $\|\mathrm{Op}_h(a)u\|_{L^2} \leq Ch\|u\|_{L^2}$;
- ▶ Brooks, Eswarathasan–Nonnenmacher, Eswarathasan–Silberman 构造 $\mathcal{O}(h/\log(1/h))$ -准态可以“集中”在一条闭测地线上。

进一步的推论：特征函数的一致控制

定理

如果 M 是一个紧双曲曲面, $\Omega \subset M$ 是一个非空开集, 则存在 $c > 0$ 只依赖于 M 和 Ω 使得对任意的 Laplace 特征函数 u , $(-\Delta - \lambda^2)u = 0$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq c \|u\|_{L^2(M)}.$$

- 在一般的紧流形上, 由椭圆方程解的唯一延拓 (Carleman 估计),

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq ce^{-C\lambda} \|u\|_{L^2(M)}.$$

并且在球面这是最佳的。

- “小性”的传播: Donnelly–Fefferman, ..., Logunov–Malinnikova, 对任意正测度的集合 Ω ,

$$\sup_{\Omega} |u| \geq (c|\Omega|)^{C\lambda} \sup_M |u|.$$

- 对环面 $\mathbb{T}^2$, Jaffard, Hauraux, Komornik, Jakobson, Burq–Zworski, Anantharaman–Maciá... 给出同样的结论。

控制论中的应用：线性 Schrödinger 方程的控制

以下我们假设 M 是一个紧双曲曲面, $\Omega \subset M$ 是一个非空开集, $T > 0$,

“能观性”定理

存在常数 $K > 0$, 只依赖于 M 和 Ω 使得对任意的 $u_0 \in L^2(M)$,

$$\|u_0\|_{L^2(M)}^2 \leq K \int_0^T \|e^{it\Delta} u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

“能控性”定理

对任意的 $u_0 \in L^2(M)$, 存在 $f \in L^2((0, T) \times \Omega)$ 使得

$$(i\partial_t + \Delta)u(t, x) = f|_{(0, T) \times \Omega}(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x)$$

的解满足 $u(T, x) \equiv 0$ 。

控制论中的应用：线性 Schrödinger 方程的控制

- ▶ Lebeau: 一般而言, 如果 Ω 满足“几何控制条件”(GCC), 则结论总是成立的;
- ▶ Macià: 在球面上, 几何控制条件还是必要条件;
- ▶ Jaffard, Haraux, Komornik, Burq-Zworski: 在环面上不需要任何条件成立;
- ▶ Anantharaman-Léautaud-Macià: 在圆盘上 Ω 只需要与边界相交;
- ▶ Anantharaman-Rivière: 在负曲率流形上 Ω 满足“熵条件”时成立。
- ▶ Dyatlov-J.-Nonnenmacher: 一般的 Anosov 曲面上不需要任何条件成立。

控制论中的应用：阻尼波方程的能量衰减

定理

如果 M 是一个紧双曲曲面, $a \in C^\infty(M)$ 使得 $a \geq 0$ 但 $a \not\equiv 0$ 。则对任意的 $s > 0$, 存在常数 $C, \gamma > 0$ 使得对任意的 $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s = H^{s+1}(M) \times H^s(M)$,

$$(\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)v(t, x) = 0$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad \partial_t v(0, x) = v_1(x)$$

的解 $v(t)$ 满足

$$E(v(t)) = \frac{1}{2} \int_M |\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2 dx \leq Ce^{-\gamma t} \|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}^s}^2.$$

控制论中的应用：阻尼波方程的能量衰减

- ▶ Rauch–Taylor, Bardos–Lebeau–Rauch, Burq–Gérard：在 $s = 0$ 时， $E(v(t)) \rightarrow 0$ 当且仅当“几何控制条件”成立，并且此时一定指数衰减；Lebeau, Koch–Tataru 给出最佳指数衰减速率。
- ▶ Lebeau, Burq...：一般而言， $s > 0$ 时能量对数衰减；
- ▶ 在一些情形下有多项式衰减：Burq–Zworski, Liu–Rao, Phung, Burq–Hitrik, Chrisitanson–Schenck–Vasy–Wunsch, Anantharaman–Léautaud, Burq–Zuily, Léautaud–Lerner...
- ▶ 更好的情形下可能有亚指数衰减：Chrisitanson, Burq–Chrisitanson, Nonnenmacher–Rivière, CSVW...
- ▶ Schenck, Nonnenmacher：负曲率流形上“压强”条件下指数衰减。
- ▶ Dyatlov–J.–Nonnenmacher：一般的 Anosov 曲面上不需要任何条件。

几何控制条件

- ▶ 我们称开集 $\Omega \subset M$ 满足几何控制条件, 如果每条测地线都通过 Ω 。特别地, 存在 $T > 0$, 使得每条长度为 T 的测地线都通过 Ω 。
- ▶ 我们称 $a \in C(M; [0, \infty))$ 满足几何控制条件, 如果 $\Omega = \{a > 0\}$ 满足几何控制条件。
- ▶ 我们称 $a \in C_c^\infty(T^*M)$ 在 S^*M 上满足“微局部”几何控制条件, 如果存在 $T > 0$ 使得对任意的 $(x, \xi) \in S^*M$, 存在 $t \in [0, T]$,

$$a(\varphi_t(x, \xi)) \neq 0.$$

特别地, 如果我们假设 $a \geq 0$, 则在 S^*M 上

$$\int_0^T a \circ \varphi_t(x, \xi) dt \geq c > 0.$$

几何控制条件下的主要估计

定理 GCC

如果 $A = \text{Op}_h(a)$, $a \in C_c^\infty(T^*M)$ 在 S^*M 上满足几何控制条件, 则存在 $C, h_0 > 0$, 只依赖于 M 和 a 使得对任意的 $h \in (0, h_0)$ 以及 $u \in H^2(M)$,

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\text{Op}_h(a)\|_{L^2} + \frac{C}{h} \|(-h^2\Delta - 1)u\|_{L^2}.$$

证明是以下基本传播估计与 Egorov 定理 + 椭圆估计的直接结合:

传播估计

如果记 $A(t) = U(-t)AU(t)$, $U(t) = \exp(-itP/h)$, $P = \text{Op}_h(p)$, 其中 $p \in C_c^\infty(T^*M)$ 使得在 S^*M 附近 $p = |\xi|_g$, 则

$$\|A(t)u\|_{L^2} \leq \|Au\|_{L^2} + \frac{C|t|}{h} \|(-h^2\Delta - 1)u\|_{L^2}.$$

5.3 主要估计证明框架

为证明主要估计

$$\|u\|_{L^2} \leq C \| \text{Op}_h(a)u \|_{L^2} + \frac{C \log(1/h)}{h} \| (-h^2 \Delta - 1)u \|_{L^2}.$$

我们将 T^*M 分成若干不同区域:

- ▶ 在 S^*M 之外, 椭圆估计给出 u 可以被 $(-h^2 \Delta - 1)u$ 控制;
- ▶ 在 S^*M 上我们进一步分为可以被 a 控制的部分, 以及不能被 a 控制的部分;
 - ▶ 被 a 控制的部分即所有通过 $\{a \neq 0\}$ 的测地流轨道的并, 这一部分利用传播估计以及 Egorov 定理 u 可以被 $\text{Op}_h(a)u$ 以及 $(-h^2 \Delta - 1)u$ 控制;
 - ▶ 不能被 a 控制的部分

$$K := S^*M \setminus \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t \{a \neq 0\}$$

在稳定/不稳定方向都是“分形”的, 利用分形不确定性原理控制。

证明细节 I: 微局部单位分解

为简单起见, 我们只在 S^*M 附近微局部地讨论, 选取一个微局部单位分解:

$$I = A_1 + A_2, \quad A_j = \text{Op}_h(a_j),$$

其中

- ▶ $\text{supp } a_1 \subset \{a \neq 0\}$, 从而

$$\|A_1 u\|_{L^2} \leq C \|\text{Op}_h(a)u\|_{L^2} + \mathcal{O}(h)\|u\|_{L^2}.$$

- ▶ 每个 A_j 都在 S^*M 上失去一些部分: 在某个开锥形集 $\mathcal{U}_j$ 上 $a_j = 0$.
- ▶ 并且 $a_1 + a_2 = 1$, $0 \leq a_1, a_2 \leq 1$, 从而

$$\|A_j\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 1 + \mathcal{O}(h).$$

微局部单位分解在测地流下的加细

对 $n \in \mathbb{N}$ 考虑所有长度为 n , 字母为 1 和 2 的单词:

$$\mathcal{W}(n) = \{1, 2\}^n = \{\mathbf{w} = w_0 w_1 \dots w_{n-1} \mid w_k \in \{1, 2\}\}.$$

对 $\mathbf{w} \in \mathcal{W}(n)$ 定义

$$A_{\mathbf{w}} = A_{w_{n-1}}(n-1)A_{w_{n-2}}(n-2) \cdots A_{w_1}(1)A_{w_0}(0)$$

以及其对应的象征

$$a_{\mathbf{w}} = \prod_{k=0}^{n-1} (a_{w_k} \circ \varphi_k).$$

则我们仍有

$$I = \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}(n)} A_{\mathbf{w}}.$$

长单词和对应的算子

- 如果 n 关于 h 一致有界, Egorov 定理给出:

$$A_{\mathbf{w}} = \text{Op}_h(a_{\mathbf{w}}) + \mathcal{O}(h).$$

- 利用之前定义的各向异性的奇异象征类 $S_{L,\rho}^{\text{comp}}$, 我们有对 $n \leq \rho \log(1/h)$,

$$A_{\mathbf{w}} = \text{Op}_h^{L^s}(a_{\mathbf{w}}) + l.o.t.$$

- 最终我们要利用长度为 $N_1 = 2\rho \log(1/h)$ 的单词, 对应的算子不再是拟微分算子, 不能再用前述奇异象征类描述, 但是可以分解为两个不同奇异象征类算子的乘积: $\mathbf{w} \in \mathcal{W}(N_1)$ 可以写作

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_+ \mathbf{w}_-, \quad \mathbf{w}_{\pm} \in \mathcal{W}(\log(1/h))$$

令

$$A_+ = A_{\mathbf{w}_+}(-N_1) = U(N_1)A_{\mathbf{w}_+}U(-N_1), \quad A_- = A_{\mathbf{w}_-}.$$

则

$$A_{\mathbf{w}} = U(-N_1)A_-A_+U(N_1)$$

证明细节 II: 分形不确定性原理

如果

$$\mathbf{w}_+ = w_{N_1}^+ \cdots w_1^+, \quad \mathbf{w}_- = w_0^- \cdots w_{N_1-1}^-$$

则

$$A_+ = \text{Op}_h^{L^u}(a_+) + l.o.t. \quad A_- = \text{Op}_h^{L^s}(a_-) + l.o.t.$$

并且

$$a_{\pm} = \prod_k (a_{w_k^{\pm}} \circ \varphi_{\mp k}).$$

引理 (分形不确定性原理)

存在 $\beta > 0$ 只依赖于 M, a_1, a_2 使得

$$\|A_{\mathbf{w}}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|\text{Op}_h^{L^s}(a_-) \text{Op}_h^{L^u}(a_+)\|_{L^2 \rightarrow L^2} + \dots \leq Ch^{\beta}.$$

$\text{supp } a_{\pm}$ 是分形集

$(x, \xi) \in \text{supp } a_{\pm}$ 当且仅当 $k = 0, \dots, N_1 - 1$,

$$\varphi_{\mp k}(x, \xi) = \exp(\mp kV)(x, \xi) \in \text{supp } a_{w_k^{\pm}} \subset S^*M \setminus \mathcal{U}_{w_k^{\pm}}.$$

我们利用

- ▶ φ_t 是 Anosov 的, 以及
- ▶ 极限圆流是唯一遍历的

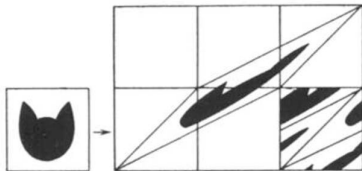
来说明

$$\text{supp } a_{\pm} \subset S^*M \setminus \bigcup_{k=0}^{N_1-1} \varphi_{\pm k}(\mathcal{U}_{w_k^{\pm}})$$

- ▶ 在不稳定/稳定方向是“光滑”的;
- ▶ 在稳定/不稳定方向是“多孔”的。

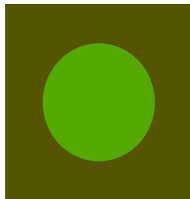
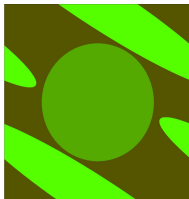
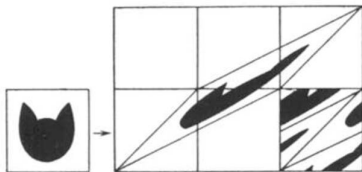
Arnold 猫映射的演示

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \pmod{1}.$$



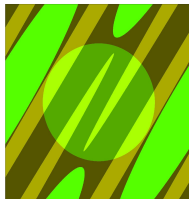
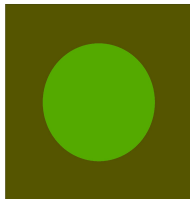
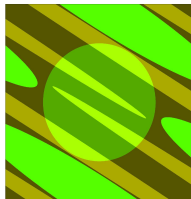
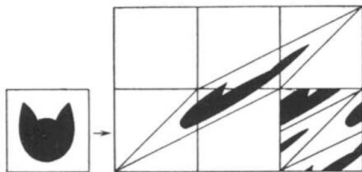
Arnold 猫映射的演示

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \mod 1.$$



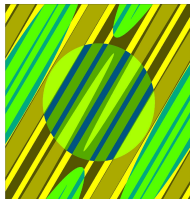
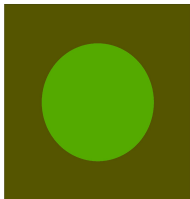
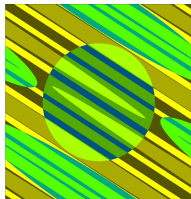
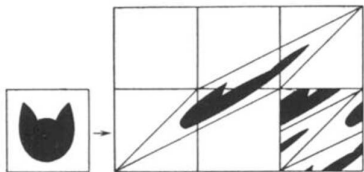
Arnold 猫映射的演示

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \mod 1.$$



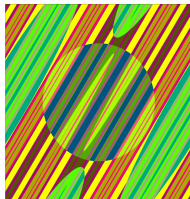
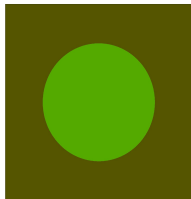
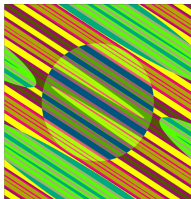
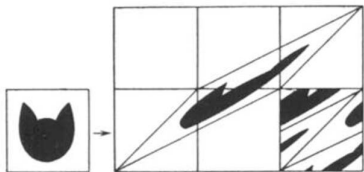
Arnold 猫映射的演示

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \mod 1.$$



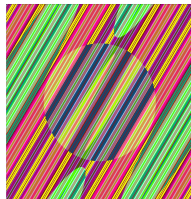
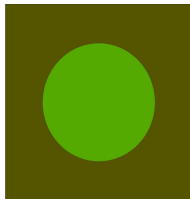
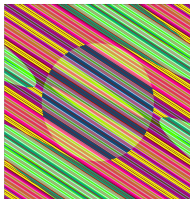
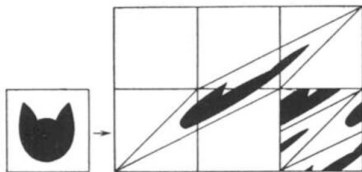
Arnold 猫映射的演示

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \mod 1.$$



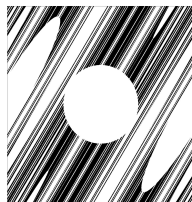
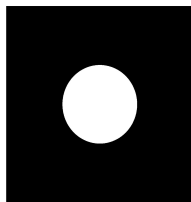
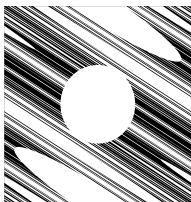
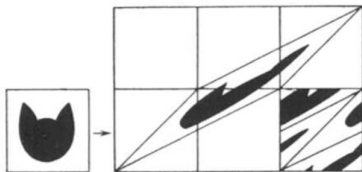
Arnold 猫映射的演示

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \pmod{1}.$$



Arnold 猫映射的演示

$$A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad A(p, q) = (2p + q, p + q) \pmod{1}.$$



证明细节 III: 分解为可控区域以及不可控区域

我们现在作分解 $\mathcal{W}(2N_1) = \mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y}$, 其中

- ▶ $\mathcal{X}$ 是“不可控”单词组成的集合;
- ▶ $\mathcal{Y}$ 是“可控”单词组成的集合。

则 $I = A_{\mathcal{X}} + A_{\mathcal{Y}}$,

$$A_{\mathcal{X}} = \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{X}} A_{\mathbf{w}}, \quad A_{\mathcal{Y}} = \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{Y}} A_{\mathbf{w}}.$$

为简单起见, 我们先给出一个“粗糙”版本

- ▶ $\mathcal{X} = \{\mathbf{w} | w_k = 2, \forall k\}$ 只包含一个单词 $\mathbf{w}_{trap} = 22 \cdots 2$,
- ▶ $\mathcal{Y} = \{\mathbf{w} | \exists k, w_k = 1\}$ 。则 $\mathcal{Y} = \sqcup_{\ell=0}^{2N_1-1} \mathcal{Y}_{\ell}$, 其中

$$\mathcal{Y}_{\ell} = \{\mathbf{w} | w_k = 2 \text{ for } k > \ell, w_{\ell} = 1\}.$$

“证明”的完结

由此 $A_{\mathcal{Y}} = \sum_{\ell=0}^{2N_1-1} A_{\mathcal{Y}_\ell}$, 其中

$$A_{\mathcal{Y}_\ell} = A_2(2N_1 - 1)A_2(2N_1 - 2) \cdots A_2(\ell + 1)A_1(\ell).$$

由传播估计

$$\|A_{\mathcal{Y}_\ell} u\|_{L^2} \leq \|A_1 u\|_{L^2} + C|\ell|h^{-1}\|(-h^2\Delta - 1)u\|_{L^2}.$$

我们就得到

$$\|A_{\mathcal{Y}} u\|_{L^2} \leq C \log(1/h) \|\text{Op}_h(a)u\|_{L^2} + \frac{C \log(1/h)^2}{h} \|(-h^2\Delta - 1)u\|_{L^2} + \mathcal{O}(h) \|u\|_{L^2}.$$

对不可控区域, 我们直接对 $A_{\mathcal{X}}$ 应用分形不确定性原理:

$$\|A_{\mathcal{X}} u\|_{L^2} \leq Ch^\beta \|u\|_{L^2},$$

两者结合我们得到一个主要估计的“粗糙版本”:

$$\|u\|_{L^2} \leq C \log(1/h) \|\text{Op}_h(a)u\|_{L^2} + \frac{C \log(1/h)^2}{h} \|(-h^2\Delta - 1)u\|_{L^2}.$$

证明细节 IV: 真实的分解与证明

为了去掉多出的 $\log(1/h)$ 因子, 我们需要做一个更好的分解:

- ▶ 将每个长度为 $2N_1$ 的单词分成 8 份, 每份为长度为 $N_0 = \frac{1}{4}\rho \log(1/h)$ 的单词, 对应的算子在 $S_{\rho/4}^{\text{comp}}$ 中。
- ▶ 记 $\mathcal{Z}$ 为所有至少有 αN_0 个字母为 1 的单词, $\alpha > 0$ 是一个小常数; 则 $A_{\mathcal{Z}}$ 满足估计:

$$\|A_{\mathcal{Z}}u\|_{L^2} \leq \frac{C}{\alpha} \|\text{Op}_h(a)u\|_{L^2} + \frac{C \log(1/h)}{\alpha h} \|(-h^2\Delta - 1)u\|_{L^2} + \mathcal{O}(h^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

- ▶ $\mathcal{Y}$ 为至少有一份在 $\mathcal{Z}$ 中的单词, 则 $A_{\mathcal{Y}}$ 类似之前可以分成 8 份, 每一份利用传播估计由 $A_{\mathcal{Z}}$ 估计。
- ▶ $\mathcal{X} = \mathcal{W}(2N_1) \setminus \mathcal{Y}$ 中元素个数不超过 $Ch^{-4\sqrt{\alpha}}$, 因此当 α 足够小时 $A_{\mathcal{X}}$ 仍然可以用 FUP 估计:

$$\|A_{\mathcal{X}}u\|_{L^2} \leq Ch^{\beta-4\sqrt{\alpha}}\|u\|_{L^2}.$$

6. 分形不确定性原理与未解问题

6.1 分形集：正则与多孔

Ahlfors–David 正则集

如果 $X \subset \mathbb{R}$ 是一个非空紧集, $\delta \in (0, 1)$, $C_R \geq 1$, 并且 $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \infty$, 我们称 X 在尺度 α_0 到 α_1 是以常数 C_R Ahlfors–David δ -正则的, 如果存在 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度 μ_X 使得

- ▶ μ_X 支在 X 中: $\mu_X(\mathbb{R} \setminus X) = 0$;
- ▶ 对任意长度在 α_0 和 α_1 之间的区间 I , $\mu_X(I) \leq C_R |I|^\delta$;
- ▶ 如果进而 I 的中心在 X 中, 则 $\mu_X(I) \geq C_R^{-1} |I|^\delta$.

多孔集

如果 $\nu \in (0, 1)$, $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1$, 称 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 在尺度 α_0 到 α_1 是 ν -多孔的, 如果对任意的长度在 α_0 和 α_1 之间的区间 I , 存在子区间 $J \subset I$ 使得

$$|J| = \nu |I|, \quad J \cap \Omega = \emptyset.$$

例子

- ▶ 通常的 Cantor 集 $C \subset [0, 1]$ 在尺度 0 到 1 是 $\frac{\log 2}{\log 3}$ -正则的, 并且在尺度 0 到 1 是 $\frac{1}{5}$ -多孔的。
- ▶ C 的 h -邻域在尺度 h 到 1 是 $\frac{\log 2}{\log 3}$ -正则的, 并且在尺度 Ch 到 1 是 $\frac{1}{6}$ -多孔的。
- ▶ 非紧双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\Gamma$ 的极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 在尺度 0 到 1 是 δ -正则的, 其中 $\delta = \dim \Lambda(\Gamma)$ 。
- ▶ 在紧双曲曲面 M 上, 任取开集 $U \subset S^*M$, 则

$$K = S^*M \setminus \bigcup_{k=0}^{N-1} \varphi_k(U), \quad N = \log(1/h)$$

在稳定方向是多孔的, 即对任意的 (x, ξ) ,

$$\{s \in [0, 1] : e^{sU^+}(x, \xi) \in K\}$$

在尺度 Ch 到 1 是 ν -多孔的。

正则性与多孔性之间的联系

- ▶ 正则集一定是多孔的：如果 X 在尺度 α_0 到 α_1 是以常数 C_R Ahlfors–David δ -正则的，并且 $L \geq (3C_R)^{\frac{2}{1-\delta}}$ 是一个整数，则对任意区间 I 满足 $L\alpha_0 \leq |I| \leq \alpha_1$ ，将 I 等分成 L 个长度为 $|I|/L$ 的子区间的并，其中至少有一个与 X 不相交。
- ▶ 多孔集一定是某个正则集的子集：如果 Ω 在尺度 α_0 到 1 是 ν -多空的，则存在 δ, C_R 只依赖于 ν ，以及在尺度 0 到 1 以常数 C_R Ahlfors–David δ -正则的集合 X 使得 $\Omega \subset X + [-\alpha_0, \alpha_0]$ 。

6.2 分形不确定性原理

定理

如果 $X, Y \subset [0, 1]$ 都是在尺度 h 到 1 中以常数 C_R Ahlfors–David δ -正则的, 则

$$\|\mathbb{1}_Y \mathcal{F}_h \mathbb{1}_X\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq Ch^\beta$$

其中 $\beta > \max(\frac{1}{2} - \delta, 0)$ 只依赖于 C_R 和 δ 。

► Dyatlov–J.: 对 $\delta \leq 1/2$,

$$\beta \geq \frac{1}{2} - \delta + (40M^{3\delta})^{-\frac{160}{\delta(1-\delta)}};$$

► Bourgain–Dyatlov, J.–Zhang: 对 $\delta \geq 1/2$,

$$\beta \geq \exp[-\exp(KM^{K(1-\delta)^{-2}})],$$

其中 K 是一个 (可以计算的) 常数。

► $\delta \cong 1/2$: Dyatlov–Zahl, Cladek–Tao。

在双曲曲面的应用：Fourier 积分算子形式

定理

如果 $B = B(h) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ 如下

$$Bf(x) = h^{-1/2} \int e^{i\Phi(x,y)/h} b(x,y) f(y) dy.$$

其中 $\Phi \in C^\infty(U; \mathbb{R})$, $b \in C_c^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ 满足

$$\partial_{xy}^2 \Phi \neq 0.$$

则对任意的 X, Y 在尺度 h 到 1 中以常数 C_R Ahlfors–David δ -正则的, 都存在 $\beta > 0$ 只依赖于 δ 和 C_R 使得

$$\|\mathbb{1}_Y B \mathbb{1}_X\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C h^\beta.$$

- 在双曲曲面中, 我们有显式 Fourier 积分算子将 L_u, L_s 映为 L_0 , 由此 FUP 中 Φ 有如下形式: $\Phi(y, y') = \log |y - y'|$, $y, y' \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, 并且 b 支在 $\{y \neq y'\}$ 中。

平凡情形

$$\|\mathbb{1}_Y \mathcal{F}_h \mathbb{1}_X\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq Ch^\beta$$

- ▶ $\delta = 0$: $X = Y = [0, h]$, $\beta = 1/2$;
- ▶ $\delta = 1$: $X = Y = [0, 1]$, $\beta = 0$ 。
- ▶ 事实上如果我们考虑体积: $|X|, |Y| \leq Ch^{1-\delta}$, 则

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_Y \mathcal{F}_h \mathbb{1}_X\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\leq \|\mathbb{1}_Y\|_{L^\infty \rightarrow L^2} \|\mathcal{F}_h\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \|\mathbb{1}_X\|_{L^2 \rightarrow L^1} \\ &\leq Ch^{\frac{1-\delta}{2}} h^{-1/2} h^{\frac{1-\delta}{2}} = Ch^{\frac{1}{2}-\delta}.\end{aligned}$$

- ▶ 并且当 $h \rightarrow 0$ 时, $\|\mathbb{1}_{[0, h^{1-\delta}]} \mathcal{F}_h \mathbb{1}_{[0, h^{1-\delta}]}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \sim h^{\max(0, \frac{1}{2}-\delta)}$ 。

因此我们为了改进基本 FUP 指数 $\beta_0 = \max(0, \frac{1}{2} - \delta)$, 必须利用分形集的进一步结构。

分形集的树型结构与多尺度估计

如果 X 是一个在尺度 h 到 1 的 δ -正则集, 固定很大的整数 L ,

- ▶ 在每个尺度 L^{-k} 上, 将 X 离散化为一些长度为 L^{-k} 的区间 (的并),
- ▶ 对不同的尺度 k , X 的离散化形成一个“正则”树结构;
- ▶ 在每个尺度上我们试图将 Fourier 限制的范数估计改进 $1 - \varepsilon$, 总计 $\text{clog}(1/h)$ 个尺度即得到 h^β 改进。

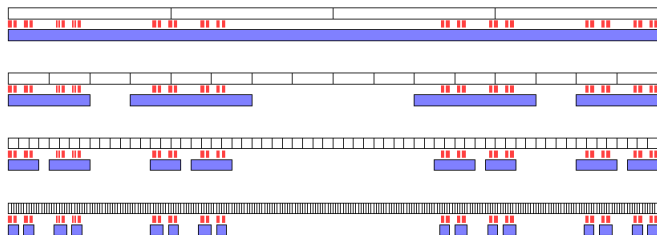


Figure: Cantor 集对 $L = 4$ 的离散化。

几种不同的证明思路

- ▶ Bourgain–Dyatlov, $\delta \geq 1/2$ 的情形: 对 Fourier 变换支在某一个尺度上正则的集合 Z 的函数 f 的量化唯一延拓原则, Beurling–Malliavin 乘子定理, 推出 $\beta > 0$ 。
- ▶ Dyatlov–Jin, $\delta \leq 1/2$ 的情形: Dolgopyat 方法, 从 $L^1 \rightarrow L^\infty$ 范数到 $L^2 \rightarrow L^2$ 范数的改进, 只要相函数满足一定非退化条件, 推出 $\beta > \frac{1}{2} - \delta$ 。
- ▶ Dyatlov–Zahl, $\delta \cong 1/2$: 加性能量方法, 利用 L^4 估计以及

$$\mathcal{E}_A(X) = \{(a, b, c, d) \in X^4 : a + b = c + d\} \leq Ch^{3(1-\delta)+\beta_A}$$

推出 $\beta = \frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \delta) + \frac{\beta_A}{8}$ 。

- ▶ Bourgain–Dyatlov, $\delta < 2/3$: Fourier 衰减方法, 利用

$$\mathcal{K}(y) = \frac{1}{2\pi h} \int_X e^{ixy} dx = \mathcal{O}(h^{-\delta+\beta_F})$$

推出 $\beta = \frac{1}{2} - \delta + \frac{\beta_F}{2}$ 。

6.3 一些未解问题：高维下的 FUP

问题

FUP 在高维情形下需要怎样的条件才能成立？

重要反例

$n = 2$, $\delta = 1$, 取 X 和 Y 分别是水平和竖直的直线的 h -邻域, 则 FUP 只在 $\beta = 0$ 时成立。

一些进展

- ▶ Han-Schlag: X, Y 都是正则的, 并且其中有一个具有一维分形集的乘积结构;
- ▶ Cladek-Tao: n 为奇数, X, Y 都是正则的, $\delta \cong n/2$ 。

应用？

- ▶ 高维非紧双曲流形的散射共振谱的谱隙;
- ▶ 高维负曲率流形上 Laplace 特征函数的半经典测度。

谢谢！