

几何学基础习题3-1
交作业时间：2022年9月29日课前
(注：9月27日停课一次，结课时间将顺延一次课)

(1) (向量空间的例子) 验证下列空间是向量空间：

(a) 区间 $[0, 1]$ 上所有有界函数的集合¹，(用通常的方法定义函数的加法与数乘)

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{存在 } c \text{ 使得 } |f(x)| < c, \forall x \in [0, 1]\}.$$

(b) 下述方程组的所有解 (x_1, \dots, x_{2022}) 的集合(用通常的方法定义数组的加法与数乘)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 2022x_{2022} = 0, \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + \dots + 2022^2x_{2022} = 0, \\ \vdots \\ x_1 + 2^9x_2 + 3^9x_3 + \dots + 2022^9x_{2022} = 0. \end{cases}$$

(c) 写出一个你认为比较抽象但依然是向量空间的例子，以及一个不是向量空间的例子。(不用验证)

(2) (内积 \Rightarrow 范数 \Rightarrow 距离)

(a) 设 $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 是向量空间 V 上的一个内积，即满足定理2.2.4的(1)(2)(3)。令

$$|u|^2 := \langle u, u \rangle$$

(i) 证明 $|\cdot|$ 是 V 上的一个范数，即满足命题2.2.1的(1)(2)(3)。

(ii) 习题2第4题。(特别地，这说明 $|\cdot|$ 满足平行四边形法则)

(b) 习题2第5题(b)。

(3) 习题2第6题。

¹不同的函数可以有不同的界 c 。