1.1.3 连续性：从度量到拓扑

¶ 强等价度量

根据定义，度量空间之间的映射 $f: X \to Y$ 是否连续取决于在 X, Y 上所给定的度量。下面我们给出一个简单的例子，它表明在某些情况下，“连续性”并不那么依赖于度量：

例 1.19. 考虑函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 赋予 $\mathbb{R}^n$ 两个不同的度量，即例1.6(2) 中的 d_1 和 d_∞。我们断言：函数 $f: (\mathbb{R}^n, d_1) \to \mathbb{R}$ 是连续的当且仅当函数 $f: (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ 是连续的。

【事实上，如果 $f: (\mathbb{R}^n, d_1) \to \mathbb{R}$ 是连续的，那么根据定义，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得} \forall x \in X, d_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

因为

$$d_1(x, y) \leq n \cdot \max_i |x_i - y_i| \leq n \cdot d_\infty(x, y),$$

我们有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' = \frac{\delta}{n} > 0 \text{ 使得} \forall x \in X, d_\infty(x, x_0) < \delta' \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

换言之，$f: (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ 是连续的。

反之，由不等式

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y)$$

及同样的论证易得：如果 f 关于 d_∞ 是连续的，那么它关于 d_1 也是连续的。】

如果我们回顾上面的例子，我们可以很容易看出度量 d_1 和 d_2 之所以会诱导出相同的连续性，其主要原因在于以下事实：

$$\frac{1}{n} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_1(x, y).$$

这个事实启发我们给出如下定义：

定义 1.20.（强等价度量）

设 d_1 和 d_2 是集合 X 上的两个度量。如果存在常量 $C_1, C_2 > 0$ 使得对于任意 $x, y \in X$，均有

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y),$$

则我们称 d_1 和 d_2 是**强等价**的。♣

通过重复例1.19中的论证，可以证明强等价度量会诱导相同的连续性概念：[证明细节留作习题。]

命题 1.21.（强等价度量与连续性）

设 d_X 和 $\widetilde{d}_X$ 是 X 上的强等价度量，而 d_Y 和 $\widetilde{d}_Y$ 是 Y 上的强等价度量。则映射 $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是连续的当且仅当 $f: (X, \widetilde{d}_X) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ 是连续的。♠

¶ 更多诱导等价的连续性的度量

让我们再研究一个例子。

例 1.22. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的另一对度量，欧氏度量 $d_2(x,y)=|x-y|$ 和 d_2 诱导的有界度量

$$\bar{d}_2(x,y):=\min\{1,d_2(x,y)\}.$$

显然 $\bar{d}_2(x,y)\le d_2(x,y)$，但是 d_2 和 $\bar{d}_2$ 是 **不是强等价的**，因为给定任意常数 $C>0$，都存在 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$d_2(x,y)>C\ge C\bar{d}_2(x,y).$$

然而，在考察任意函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的连续性时，我们将再次得到相同的结论：函数 $f:(\mathbb{R}^n,d_2)\to\mathbb{R}$ 是连续的当且仅当函数 $f:(\mathbb{R}^n,\bar{d}_2)\to\mathbb{R}$ 是连续的!

【假设 $f:(\mathbb{R}^n,\bar{d}_2)\to\mathbb{R}$ 是连续的。因为 $\bar{d}_2(x,y)\le d_2(x,y)$, 所以 $f:(\mathbb{R}^n,d_2)\to\mathbb{R}$ 也是连续的，

反之，如果 $f:(\mathbb{R}^n,d_2)\to\mathbb{R}$ 是连续的，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\text{ 使得}\forall x\in X,d_2(x,x_0)<\delta\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

那我们只要取 $\delta'=\min(1/2,\delta)$，就有

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta'>0\text{ 使得}\forall x\in X,\bar{d}_2(x,x_0)<\delta'\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

即 $f:(\mathbb{R}^n,\bar{d}_2)\to\mathbb{R}$ 是连续的。】

从上面的例子我们可以预期，应该有一个比度量结构更基本的结构诱导了连续性。

¶ 用邻域定义的局部连续性

为了弄清楚连续性背后的结构，让我们回到命题1.17. 直观地说，f 在点 x_0 处的连续性仅仅涉及 X 中 x_0 附近的点和 Y 中 $f(x)$ 附近的点。当然，命题1.17中的各条等价刻画都依赖于度量结构（度量 d 或度量球）。我们在定义1.1.1中给出了开集、闭集的概念。我们还可以进一步引入邻域的定义，以刻画“附近的点”这样一个概念：

定义 1.23.（邻域）

设 x 是 X 中的一个点，而 $N\subset X$ 为 X 的一个子集。如果 X 中存在一个开集 U 使得 $x\in U\subset N$，则称 N 是 x 的一个**邻域**。[a]

[a]在一些教材（包括 J. Munkres 的《拓扑学》等）中，作者要求邻域是开集。本书中不要求邻域是开集。我们将使用“x 的开邻域”一词表示一个集合既是开集又是 x 的邻域。

♣

注 1.24. 如果我们用 $\mathscr{N}(x)$ 表示 x 的所有邻域的集合，不难验证

(N1) 如果 $N\in\mathscr{N}(x)$, 那么 $x\in N$.

(N2) 如果 $M\supset N$ 且 $N\in\mathscr{N}(x)$，那么 $M\in\mathscr{N}(x)$.

(N3) 如果 $N_1,N_2\in\mathscr{N}(x)$, 那么 $N_1\cap N_2\in\mathscr{N}(x)$.

(N4) 如果 $N\in\mathscr{N}(x)$, 那么存在 $M\in\mathscr{N}(x)$ 使得 $M\subset N$ 且对于任意 $y\in M$，都有 $N\in\mathscr{N}(y)$.

事实上，我们可以利用邻域刻画映射在一点处的连续性：

命题 1.25.（邻域与单点连续性）

设 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是度量空间之间的映射，那么 f 在 $x\in X$ 处连续当且仅当 $f(x)$ 的任何邻域的原像是 x 的邻域。

证明 设 f 在 $x\in X$ 处是连续的，$M\subset Y$ 是 $f(x)$ 的一个邻域。那么根据定义，存在 Y 中的开集 V 使得 $f(x)\in V\subset M$。根据开集的定义，$\exists\varepsilon>0$ 使得开球 $B(f(x),\varepsilon)\subset V$. 由 f 在 x 处的连续性，$\exists\delta>0$ 使得

$$B(x,\delta)\subset f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)\subset f^{-1}(V)\subset f^{-1}(M).$$

所以 $f^{-1}(M)$ 是 x 的一个邻域。

反之，假设对于 $f(x)$ 的任何邻域 $M\subset Y$，$f^{-1}(M)$ 是 x 的邻域。那么，特别地，对于 $\forall\varepsilon>0$，$f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$ 是 x 的邻域，即它包含一个含有点 x 的开集 U. 由开集的定义，$\exists\delta>0$ 使得 $B(x,\delta)\subset U$, 而这意味着 $B(x,\delta)\subset f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$。所以 f 在 x 处连续. □

值得说明的是，一般而言，即使 f 在 x_0 处连续，点 $f(x_0)$ 的开邻域的原像也可能不是 X 中的开集。[读者可以尝试找到一个例子！]

¶ 用开集定义整体连续性

作为命题 1.25 的推论，我们给出如下抽象度量空间之间的（整体）连续映射的刻画：

定理 1.26.（连续映射的刻画）

一个映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是连续映射，当且仅当对于 Y 中的任何开集 V，其原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集。

证明 设 f 是连续的，$V\subset Y$ 是开集。那么 $\forall x\in f^{-1}(V)$, 由命题 1.25, $f^{-1}(V)$ 包含一个含点 x 的开集 U. 所以 $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集。

反之，假设 Y 中任何开集 V 的原像 $f^{-1}(V)$ 在 X 中都是开的。对于任意 $x\in X$，取 Y 中的任意包含点 $f(x)$ 的开集 V, 那么 $f^{-1}(V)$ 本身是 X 中的一个包含点 x 的开集。所以由命题 1.25，f 是连续的。 □

由此可见，度量空间之间的映射是否连续，其根本因素不在于度量 d 所给出的具体数值，在于该度量所生成的开集族。我们定义

定义 1.27.（拓扑等价度量）

设 d_1 和 d_2 是集合 X 上的两个度量。如果它们诱导的开集族是相同的，则我们称 d_1 和 d_2 是 **拓扑等价的** 。

显然，强等价的度量总是拓扑等价的，反之则不然。一般来说，如果一个概念只依赖于开集族，我们就称这个概念为“拓扑概念”（这点后面会讲清楚）。所以“邻域”是一个拓扑概念，即它只依赖于开集族；“连续性”也是拓扑概念。在习题中我们将看到，“一

致连续性”不是拓扑概念。

由定理 1.26，我们得到

推论 1.28

设 $\widetilde{d}_X$ 和 $\widetilde{d}_Y$ 分别是拓扑等价于 d_X 和 d_Y 的度量，那么映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 连续映射，当且仅当映射 $f:(X,\widetilde{d}_X)\to(Y,\widetilde{d}_Y)$ 是连续映射。♡

这就是为什么 $\mathbb{R}^n$ 上的三个不同度量 d_1,d_2 和 $\bar{d}_2$ 给出了完全相同的连续函数集，而离散度量则给出了不同的连续函数集的原因：从上面例子的论证中不难看出，由 $d_1,d_2,\bar{d}_2$ 确定的开集族都相同，而由离散度量确定的开集族是与之不同的！

1.2 拓扑空间：定义与基本例子

在上一节中我们看到，虽然我们通过度量结构定义了映射的连续性，但连续性实际上只依赖于度量所诱导的邻域族或者开集族。在本节中，我们将通过公理化的方式引入邻域以及开集的概念，从而定义一般的拓扑空间。

1.2.1 拓扑的定义

¶ 邻域结构

为了将连续性和收敛性的概念扩展到更一般的“空间”，直观上我们需要首先公理化“邻域”的概念。任给一个点 x，哪些集合可以被视为 x 的邻域呢？不同点的邻域之间有什么关联呢？受注记1.24启发，我们可以对于任何 $x \in X$，都为其指定一个非空的子集族

$$\mathscr{N}(x) \subset \mathcal{P}(X)$$[5]

$\mathscr{N}(x)$ 中的每个元素都视为 x 的一个邻域，这些子集族 $\mathscr{N}(x)$ 要满足的公理如下：

(N1) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$，那么 $x \in N$.

(N2) 如果 $M \supset N$ 且 $N \in \mathscr{N}(x)$，那么 $M \in \mathscr{N}(x)$.

(N3) 如果 $N_1, N_2 \in \mathscr{N}(x)$，那么 $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{N}(x)$.

(N4) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$, 那么存在 $M \in \mathscr{N}(x)$ 使得 $M \subset N$，且对于任意 $y \in M$，都有 $N \in \mathscr{N}(y)$.

邻域的前三条公理具有较为明确的意义，而第四条 (N4) 给出了不同点的邻域之间的关系，可以看作是度量结构的三角不等式的某种替代。

以上邻域概念的公理化是 1912 年由德国数学家 Hausdorff [6]完成的。[7] 他的目标是定义一个非常一般的空间概念，这样的抽象空间会包括 $\mathbb{R}^n$、黎曼曲面、无限维空间或由曲线和函数组成的空间为特例。他给出了引入这样一个一般性概念的两个好处：简化理论，以及防止我们错误地使用直觉。

定义 1.29.（邻域结构）

我们把集合 X 上的一个满足公理 (N1)-(N4) 的映射

$$\mathscr{N}: X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \setminus \{\emptyset\}$$

称为 X 的一个**邻域结构**，把 $\mathscr{N}(x)$ 称为 x 的**邻域系**，而把 $\mathscr{N}(x)$ 里的每个元素均称为 x 的一个 **邻域**。 ♣

给定集合 X 上的一个邻域结构 $\mathscr{N}$，我们称 $(X, \mathscr{N})$ 为一个 **（邻域结构）拓扑空间**。

---

[5]我们使用符号 $\mathcal{P}(X)$，有时也使用符号 2^X，来表示 X 的幂集，即 X 的所有子集的集合。

[6]豪斯道夫（Felix Hausdorff，1868-1942），德国数学家，现代拓扑学的奠基人之一，在集合论、测度论、泛函分析等领域也有重要贡献。1914 年，他出版了《集合论原理》一书，在 Frechét 等人工作的基础上，创立了拓扑空间的理论。

[7]然而，Hausdorff 给出的公理体系与上面的公理稍有不同，即他额外要求一个分离公理：对于任意两点 $x \neq y$，存在 $N \in \mathscr{N}(x)$ 和 $M \in \mathscr{N}(y)$ 使得 $N \cap M = \emptyset$. 这样的分离公理称为 **Hausdorff 性质**，我们将在下一章对其进行更深入地研究。

¶ 从邻域结构到内部结构

相比于接下来要引入的（也是大部分教材中不加说明而直接引入的）开集公理，邻域公理显得更加直观，但其缺点在于用起来比较复杂。接下来我们阐述如何从邻域结构出发，逐步引入“内部结构”、“开集结构”、“闭集结构”等其他相互等价的拓扑空间公理体系。给定一个邻域结构拓扑空间 $(X, \mathscr{N})$，我们如何得到 X 中开集的概念呢？回想一下，在数学分析中，一个集合是开集当且仅当该集合中的每个点都是其内点，所以开集跟“内部”这个概念是紧密相连的。什么是内点呢？点 x 是集合 A 的内点当且仅当 A 包含一个以 x 为中心的开球。换而言之，点 x 是集合 A 的内点当且仅当集合 A 是点 x 的邻域！于是在邻域结构拓扑空间可以定义任意集合的“内部”：

定义 1.30.（内部）

设 $(X, \mathscr{N})$ 是一个邻域结构拓扑空间。对于任意子集 $A \subset X$，其 **内部** 定义为

$$\mathrm{Int}(A) := \{x \in A \mid A \in \mathscr{N}(x)\}. \tag{1.2.1}$$

♣

根据定义和公理 (N1)-(N4)，不难验证映射

$$\mathrm{Int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad A \mapsto \mathrm{Int}(A)$$

满足

(I1) $\mathrm{Int}(A) \subset A$.

(I2) $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$.

(I3) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$.

(I4) $\mathrm{Int}(X) = X$.

定义 1.31.（内部结构）

设 X 是一个集合。我们称满足公理 (I1)-(I4) 的映射 $\mathrm{Int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ 为 X 上的一个“内部结构”。

♣

给定 X 上的一个内部结构 Int，我们称 (X, Int) 为一个 **（内部结构）拓扑空间**。可以验证，（邻域结构）拓扑空间和（内部结构）拓扑空间是相互等价的：给定 X 上的一个邻域结构，我们上面构造了 X 上的一个内部结构；反之，给定集合 X 上的一个内部结构 Int，也不难定义出 X 上的一个邻域结构，

$$\mathscr{N}(x) = \{A \subset X \mid x \in \mathrm{Int}(A)\}. \tag{1.2.2}$$

我们有（证明留作习题）：

命题 1.32.（邻域结构与内部结构的等价性）

任给集合 X 上的一个邻域结构 $\mathscr{N}$，由 (1.2.1) 所定义的映射 $\mathrm{Int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ 为 X 上的一个内部结构；反之，任给集合 X 上的一个内部结构 Int，由 (1.2.2) 所定义的子集族 $\mathscr{N}$ 是 X 上的一个邻域结构。更进一步，上述从“邻域结构”到“内部结构”以及从“内部结构”到“邻域结构”的两个过程互为逆过程。

♠

¶ 从内部结构到开集结构

如上所述，欧氏空间（或者一般度量空间中）一个集合是开集当且仅当该集合中的每个点都是其内点。受此启发，由“内部”的概念出发，不难给出如下（邻域结构或者内部结构）拓扑空间中开集的定义：

定义 1.33.（开集）

在邻域结构（或内部结构）拓扑空间中，我们称集合 U 是一个 **开集**，如果它满足：对于任意 $x \in U$，均有 $U \in \mathscr{N}(x)$. ♣

由邻域结构与内部结构的等价性，马上可得如下等价刻画：

命题 1.34. 开集与内部

邻域结构（或内部结构）拓扑空间中的集合 U 是一个开集当且仅当 $\mathrm{Int}(U) = U$. ♠

给定 $(X, \mathscr{N})$，如果我们记

$$\mathscr{T} = \{U \subset X \mid U\text{是开集}\} \tag{1.2.3}$$

为 $(X, \mathscr{N})$ 中所有开集构成的集族，则可以验证：

(O1) $\emptyset \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$.

(O2) 如果 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}$, 那么 $U_1 \cap U_2$ 亦然.

(O3) 如果 $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset \mathscr{T}$, 那么 $\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathscr{T}$.

1935 年，Alexandrov [8]和 Hopf[9] 在他们撰写的《拓扑学 (I)》[10]一书中，将开集公理作为拓扑空间的定义。相比于邻域公理 (N1)-(N4) 或者内部公理 (I1)-(I4)，开集公理 (O1)-(O3) 更简洁而且易于使用，因而得到了广泛的采纳，成为拓扑空间的标准定义：

定义 1.35.（拓扑）

集合 X 上的满足 (O1) (O2) 和 (O3) 的子集族 $\mathscr{T} \subset \mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的一个**拓扑结构**，或者简称为 X 上的一个**拓扑**。 ♣

给定 X 上的一个拓扑结构 $\mathscr{T}$，我们称 $(X, \mathscr{T})$ 为一个 **拓扑空间**。

前文阐述了如何由邻域结构公理 (N1)-(N4) 出发，构造满足开集公理 (O1)-(O3) 的过程。反之，给点拓扑结构，即满足 (O1)-(O3) 的集族 $\mathscr{T}$，我们定义

定义 1.36.（拓扑空间里的邻域）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$x \in X$ 为一个元素，而 $N \subset X$ 为一个子集。如果存在开集 $U \in \mathscr{T}$ 使得 $x \in U \subset N$，则称集合 N 为 x 的一个 **邻域**。 ♣

[8]亚历山大洛夫（Pavel Alexandrov，1896-1932），前苏联数学家，莫斯科拓扑学派的奠基人之一，在拓扑学、集合论等方面做出了杰出工作。

[9]霍普夫（Heinz Hopf，1894-1971），德国数学家，在拓扑与整体微分几何方面有卓越建树。

[10]该书是拓扑学方面最早的著作之一，原计划写三卷，但最终只完成了第一卷。

于是，给定拓扑结构 $\mathscr{T}$ 后，点 x 的邻域系为

$$\mathscr{N}(x) = \{N \subset X : \exists U \in \mathscr{T} \text{ 使得} x \in U \text{ 且} U \subset N\}. \tag{1.2.4}$$

可以验证开集公理体系和邻域公理体系的等价性（证明依然留作习题）：

命题 1.37.（开集公理体系与邻域公理体系的等价性）

任给集合 X 上的一个邻域结构 $\mathscr{N}$，由 (1.2.3) 所给出的开集族 $\mathscr{T}$ 为 X 上的一个拓扑结构；反之，任给集合 X 上的一个拓扑结构 $\mathscr{T}$，由 (1.2.4) 所定义的子集族 $\mathscr{N}$ 是 X 上的一个邻域结构。更进一步，上述从"邻域结构"到"拓扑结构"以及从"拓扑结构"到"邻域结构"的两个过程互为逆过程。♠

¶ 用闭集定义拓扑

有了开集的概念，我们自然可以定义闭集：

定义 1.38.（闭集）

设 F 为拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个子集。如果 F 的补集 $F^c = X \setminus F$ 是开集，则称 F 是一个 **闭集**。♣

将"开集公理"转换为"闭集公理"是平凡的：

(C1) $\emptyset$ 和 X 都是闭集。

(C2) 如果 U_1, U_2 是闭集，那么 $U_1 \cup U_2$ 亦然。

(C3) 如果对任意 $\alpha \in \Lambda$, U_α 都是闭集，那么 $\cap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ 也是闭集。

在某些特定问题里，闭集公理更适用。

1.2.2 拓扑空间举例

¶ 一些简单的拓扑空间

例 1.39. 下面我们给出一些拓扑的例子。

(1) **(度量拓扑)** 设 (X, d) 是任意度量空间。令

$$\mathscr{T}_{metric} = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ 使得} B(x, r) \subset U\}.$$

那么 $\mathscr{T}_{metric}$ 是 X 上的一个拓扑，称为度量拓扑。

(2) **(离散拓扑)** 设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{discrete} = \mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}.$$

显然它是 X 上的一个拓扑，且不难发现它是关于 X 上的离散度量的度量拓扑。

(3) **(平凡拓扑)**[11] 设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{trivial} = \{\emptyset, X\}.$$

易见它是 X 上的一个拓扑。但只要 X 的元素个数大于 1，那么它就**不是**一个度量拓扑。

[11] 该拓扑也被称为"非离散拓扑"。

(4) (**余有限拓扑**) 设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{cofinite} = \{A \subset X \mid 要么 A = \emptyset, 要么 A^c = X \setminus A 是一个有限集\}.$$

它是 X 上的一个拓扑，验证如下：

- $\emptyset \in \mathscr{T}; X \in \mathscr{T}$ 因为 $X^c = \emptyset$ 是有限的。
- 如果 $A, B \in \mathscr{T}$, $A, B \neq \emptyset$. 那么 A^c, B^c 是有限的，所以 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 是有限的。
- 如果 $A_\alpha \in \mathscr{T}$ 而且至少有一个 $A_{\alpha_1} \neq \emptyset$, 那么 $(\cup_\alpha A_\alpha)^c = \cap_\alpha A_\alpha^c \subset A_{\alpha_1}^c$ 是有限的。

(5) (**余可数拓扑**) 设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{cocountable} = \{A \subset X \mid 要么 A = \emptyset, 要么 A^c 是至多可数的\}.$$

读者可自行验证它是 X 上的一个拓扑。

(6) (**Zariski 拓扑**) 设 $X = \mathbb{C}^n$, $R = \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$，即具有复系数的 n 元多项式环。定义

$$\mathscr{T}_{Zariski} = \{U \subset \mathbb{C}^n \mid \exists f_1, \cdots, f_m \in R 使得 U^c 为 f_1, \cdots, f_m 的公共零点集\}.$$

可以证明这是一个拓扑。(注意：此处验证闭集公理更方便。) 更一般地，可以在任意交换环上定义 Zariski 拓扑。该拓扑主要用于代数几何的研究。

(7) (**Sorgenfrey 拓扑**) 设 $X = \mathbb{R}$，定义

$$\mathscr{T}_{Sorgenfrey} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 使得 [x, x+\varepsilon) \subset U\}.$$

可以验证这是一个拓扑。该拓扑将是我们理解不同拓扑性质之间关系的一个重要例子。

¶ 不同拓扑的比较

所以任何一个集合上都有很多不同的拓扑，其中某些拓扑是度量拓扑，而另一些拓扑不是度量拓扑。注意对于 X 上的任意拓扑 $\mathscr{T}$，我们总是有

$$\mathscr{T}_{trivial} \subset \mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{discrete}.$$

一般地，我们定义

定义 1.40.（拓扑的比较）

设 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑。我们称 $\mathscr{T}_1$ 是 **弱于**[a] $\mathscr{T}_2$, 或者等价地，称 $\mathscr{T}_2$ is **强于** $\mathscr{T}_1$, 如果有 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$.

[a]一些作者使用“**粗糙于**”的说法代替“弱于”，用“**精细于**”的说法代替“强于”

♣

因此，在任意集合 X 上，$\mathscr{T}_{trivial}$ 是最弱/最粗糙的拓扑，而 $\mathscr{T}_{discrete}$ 是最强/最精细的拓扑。当然，并不是 X 上的任意两个不同的拓扑都可以比较。例如，$\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑和余可数拓扑是无法比较的，即存在欧氏开集不是余可数拓扑下的开集，也存在余可数拓扑下的开集不是欧氏开集。

一般而言，同一个集合上两个不同拓扑的并不再是拓扑。但是，

命题 1.41.（拓扑的交）

给定 X 上的任意一族拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$，则 $\bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$ 是 X 上的一个拓扑。

证明 验证如下：

- $\emptyset, X \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ \emptyset, X \in \cap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$.
- $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ U_1 \cap U_2 \in \cap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$.
- $U_\beta \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ \cup_\beta U_\beta \in \mathscr{T}_\alpha \ \Rightarrow\ \cup_\beta U_\beta \in \cap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$.

□

¶ 从已有的拓扑空间构造新空间

和抽象度量空间的情况一样，我们可以通过已有的拓扑空间构造新的拓扑空间，而最常见的构造是“子集继承原空间拓扑”而得到的子空间拓扑，以及在乘积空间上通过合适的方法定义的乘积空间拓扑。

命题 1.42.（子空间拓扑）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$Y \subset X$ 是一个子集，则集族

$$\mathscr{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathscr{T}\}$$

是 Y 上一个拓扑，称为 **子空间拓扑**。

其验证是平凡的，故而略去。

注 1.43. 如果 (X, d_X) 是一个度量空间且 $Y \subset X$，那么“由 X 上的度量拓扑所诱导的 Y 上的子空间拓扑”与“(Y, d_Y)（作为 (X, d_X) 的子空间度量）上的度量拓扑”是一致的。证明留作习题。

下面我们解释如何在两个拓扑空间的笛卡尔积上构造合理的拓扑。在数学分析中，我们知道：一个集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开集，当且仅当 U 中的任意点 (x, y) 均为 U 的内点，也当且仅当对于 U 中的任意点 (x, y)，可以找到 $\varepsilon_x > 0$ 和 $\varepsilon_y > 0$ 使得 U 包含 (x, y) 的“方形邻域”$(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \times (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$. 后者，作为笛卡尔积，可以轻易推广到一般的拓扑空间：

命题 1.44.（乘积拓扑）

设 $(X, \mathscr{T}_X)$ 和 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 是拓扑空间。则

$$\mathscr{T}_{X\times Y} := \{W \subset X \times Y \mid \forall (x, y) \in W, \exists U \in \mathscr{T}_X \text{ 和} V \in \mathscr{T}_Y \text{ 使得} (x, y) \in U \times V \subset W\}$$

是 $X \times Y$ 上的一个拓扑，称为 **乘积拓扑**。

证明留作习题。

注 1.45. 对于度量空间，在注记1.9中我们指出，可以在 $X \times Y$ 定义各种不同的 l^p 型乘积度量。可以证明，这些不同的乘积度量是拓扑等价的，且它们所诱导的度量拓扑都跟由命题1.8给出的“每个分量空间上的度量拓扑的乘积拓扑”一致！