1.4 拓扑的构造

1.4.1 基与子基

¶ 用基定义拓扑

我们可以仔细观察一下度量拓扑 $\mathscr{T}_d$，Sorgenfrey 拓扑 $\mathscr{T}_{Sorgenfrey}$，乘积拓扑 $\mathscr{T}_{X\times Y}$ 以及逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 等拓扑的定义，

$$\mathscr{T}_d = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ 使得} B(x,r) \subset U\},$$

$$\mathscr{T}_{Sorgenfrey} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ 使得}[x, x+\varepsilon) \subset U\},$$

$$\mathscr{T}_{X\times Y} = \{W \subset X \times Y \mid \forall (x,y) \in W, \exists U \in \mathscr{T}_X \text{ 和} V \in \mathscr{T}_Y \text{ 使得}(x,y) \in U \times V \subset W\},$$

$$\mathscr{T}_{p.c.} = \{U \subset \mathcal{M} \mid \forall f_0 \in U, \exists x_1, \cdots, x_n \text{以及}\varepsilon > 0 \text{ 使得}\omega(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) \subset U\}.$$

不难发现这些拓扑之间有一个共同的性质：它们都具有如下形式

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得} x \in B \subset U\}, \tag{1.4.1}$$

其中 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是某个集族，比如，对于度量拓扑，

$$\mathcal{B} = \text{给定度量空间中的所有开球。}$$

这种多次出现的现象背后一般都有某种更一般的规律，让我们试着找到它！设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 X 的子集的集族，

问题 在 $\mathcal{B}$ 满足什么条件下，由 (1.4.1) 定义的集族 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是 X 上的一个拓扑？

- 根据构造, $\emptyset \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.
- 我们希望有 $X \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 所以我们需要

$$\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得} x \in B. \tag{B1}$$

- 假设 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 我们希望有 $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 即要求

$$\forall U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}, \forall x \in U_1 \cap U_2, \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得} B \subset U_1 \cap U_2. \tag{1.4.2}$$

然而，这个条件涉及到集族 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 中的元素 U_1, U_2，因而并不是关于集族 $\mathcal{B}$ 本身的条件。不过，根据 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 的构造，对于任意 $x \in U_1 \cap U_2$，均存在 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 使得

$$x \in B_1 \subset U_1 \quad \text{以及} \quad x \in B_2 \subset U_2.$$

因此，为了使 (1.4.2) 成立，我们可以假设

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in B \subset B_1 \cap B_2. \tag{B2}$$

注意: (B2) 不仅是 $(\star)$ 的充分条件，也是其必要条件，因为根据 (1.4.1)，必有

$$\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}.$$

- 最后，假设 $U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. 则我们自动有 $\cup_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 因为 $\forall x \in \cup_\alpha U_\alpha, \exists \alpha_0$ 使得 $x \in U_{\alpha_0}$. 所以 $\exists B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U_{\alpha_0}$, 这意味着 $x \in B \subset \cup_\alpha U_\alpha$ 即 $\cup_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.

答案 由 (1.4.1) 定义的 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是 X 上的拓扑的充要条件是集族 $\mathcal{B}$ 满足条件 (B1) 和 (B2)。

定义 1.72.（拓扑基）

若集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足条件 (B1) 和 (B2)，则我们称 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个 **拓扑基**，并称由 (1.4.1) 定义的拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 称为 **由基 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑**。 ♣

注 1.73. 不同的基可以生成相同的拓扑。例如，$\mathbb{R}^2$ 的以下三个拓扑基所生成的拓扑都是欧氏拓扑：

$$\mathcal{B}_1 = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0\},$$
$$\mathcal{B}_2 = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{Q}^2, r \in \mathbb{Q}_{>0}\},$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(a,b) \times (c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

注意，上面第二个拓扑基 $\mathcal{B}_2$ 是一个可数族！

我们再次强调一下：根据定义，$\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$，即 $\mathcal{B}$ 中的每个元素都是拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 中的一个开集。反之通常不成立。

¶ 例子：箱拓扑

通过拓扑基，我们可以在任意多拓扑空间的乘积空间上构造一个拓扑：

例 1.74. （**箱拓扑**）任给一族拓扑空间 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$，我们想在笛卡尔积

$$\prod_\alpha X_\alpha = \{(x_\alpha) \mid x_\alpha \in X_\alpha\}$$

上定义一个拓扑。我们可以跟定义两个拓扑空间的乘积拓扑一样，考虑集族

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_\alpha U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\right\}.$$

很容易验证 $\mathcal{B}$ 满足 (B1), (B2)，从而是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的一个拓扑基。它所生成的拓扑

$$\mathscr{T}_{Box} = \{U \subset \prod_\alpha X_\alpha \mid \forall (x_\alpha) \in U, \exists U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \text{ 使得} (x_\alpha) \in \prod_\alpha U_\alpha \subset U\}$$

被称为是 $X = \prod_\alpha X_\alpha$ 上的 **箱拓扑**。

¶ 用基定义拓扑：极小性

为了理解 $\mathcal{B}$ 和 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 之间的关系，我们给出"拓扑基 $\mathcal{B}$ 生成拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$"的另一种解释：

命题 1.75.（开集作为基元素的并）

如果 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，那么它所生成的拓扑为

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}.$$ ♠

证明 由 $\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 可知，对于任何子集族 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$，都有

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}.$$

反之，对于任意 $U \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 和任意 $x \in U$，根据定义存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$。因此 $U = \bigcup_{x \in U} B_x$，即 U 具有给定的形式。 □

作为推论，我们有

推论 1.76.（拓扑基所生成拓扑的极小性）

设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，拓扑 $\mathscr{T}'$ 满足 $\mathcal{B}\subset\mathscr{T}'$，则 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}\subset\mathscr{T}'$. ♡

因此，$\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是“最小的”使 $\mathcal{B}$ 中的所有集合都是开集的拓扑：

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}}=\bigcap_{\substack{\mathcal{B}\subset\mathscr{T}'\\ \mathscr{T}'\text{是拓扑}}}\mathscr{T}'.$$

¶ 由任意子集族生成的拓扑

事实上，上述公式可用于从任意子集族（不需要是拓扑基）构造拓扑。为了看清这一点，我们首先回忆在命题 1.41中，我们证明了 X 上任意一族拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$ 的交 $\bigcap_\alpha\mathscr{T}_\alpha$ 依然是一个拓扑。特别地，对于 X 中的任意子集族 $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$，

$$\mathscr{T}_{\mathcal{S}}:=\bigcap_{\substack{\mathcal{S}\subset\mathscr{T}'\\ \mathscr{T}'\text{是拓扑}}}\mathscr{T}' \tag{1.4.3}$$

是 X 上的一个拓扑。

定义 1.77.（任意集族生成的拓扑）

任给 X 中的子集族 $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$，我们称由 (1.4.3) 定义的拓扑为由 $\mathcal{S}$ **生成的拓扑**。♣

注意，根据定义，$\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 是使 $\mathcal{S}$ 中的所有集合都是开集的拓扑中最弱的拓扑。一个自然的问题是：$\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 是什么？

命题 1.78.（集族生成拓扑的基）

设 $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$ 为子集族，并记

$$\mathcal{B}=\{B\mid\exists S_1,\cdots,S_m\in\mathcal{S}\text{ 使得}B=S_1\cap\cdots\cap S_m\}. \tag{1.4.4}$$

则

(1) 如果 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S=X$，那么 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，且 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}=\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.

(2) 一般地，如果 $X'=\bigcup_{S\in\mathcal{S}}\subset X$，那么 $\mathcal{B}$ 是 X' 上的一个拓扑基，且 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}=\{X\}\cup\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. ♠

证明 (1) 由定义，$\mathcal{S}\subset\mathcal{B}$. 所以条件 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}}=X$ 意味着 $\bigcup_{B\in\mathcal{B}}=X$，这等价于集族 $\mathcal{B}$ 满足条件 (B1). 由构造，$\mathcal{B}$ 也满足条件 (B2). 所以 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基. 显然对于任意拓扑 $\mathscr{T}'$，

$$\mathscr{T}'\supset\mathcal{S}\iff\mathscr{T}'\supset\mathcal{B}.$$

所以 $\bigcap_{\mathcal{S}\subset\mathscr{T}'}\mathscr{T}'=\bigcap_{\mathcal{B}\subset\mathscr{T}'}\mathscr{T}'$，即由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑就是 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$.

(2) 由 (1)，$\{X\}\cup\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是 X 上的一个拓扑。根据构造，它是 X 上使 $\mathcal{S}$ 中的所有集合都是开集的拓扑中最弱的拓扑。 □

¶ 用子基定义的拓扑

鉴于命题 1.78，我们自然地定义

定义 1.79.（拓扑子基）

如果集族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = X$，则我们称 $\mathcal{S}$ 是 X 的一个**拓扑子基**，而称 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 为**由子基 S 生成的拓扑**。♣

我们给出由拓扑基或拓扑子基所生成拓扑的一些例子：

例 1.80.

(1) 对于 $\mathbb{R}$ 上的标准欧氏拓扑，

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a < b\}$$

是一个拓扑基，而

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

是一个子基。

(2) 对于 $X \times Y$ 上的乘积拓扑，

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{T}_X, V \in \mathscr{T}_Y\}$$

是一个拓扑基，而

$$\mathcal{S} = \{U \times Y \mid U \in \mathscr{T}_X\} \bigcup \{X \times V \mid V \in \mathscr{T}_Y\}$$

是一个子基。

(3) 对于 $\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R})$ 上的逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$，

$$\mathcal{B} = \{\omega(f; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) \mid f \in \mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_n \in [0,1], \varepsilon > 0\}$$

是一个拓扑基，而

$$\mathcal{S} = \{\omega(f; x; \varepsilon) \mid f \in \mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}), x \in [0,1], \varepsilon > 0\}$$

是一个子基。

¶ 基和子基的判据

一个自然的问题是：给定集族 $\mathcal{B}$，我们如何判断它是否是生成给定拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基？下面是一个简单的判据：

命题 1.81.（拓扑基的判据）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，则集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是生成 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基当且仅当

(1) $\mathcal{B} \subset \mathscr{T}$,

(2) 对于任意 $U \in \mathscr{T}$ 和任意 $x \in U$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$. ♠

证明 由定义, 如果 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基，则 (1), (2) 成立。

反之，显然由 (2) 可以推出 (B1)，并且 (1)(2) 一起可以推出 (B2)。所以 $\mathcal{B}$ 是一个基。此外, 由 (2) 可知 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. 但根据最小性, $\mathscr{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathscr{T}$. 所以 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑就是 $\mathscr{T}$. □

类似地，不难证明

命题 1.82.（拓扑子基的判据）

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，则集族 $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$ 是生成 $\mathscr{T}$ 的一个子基当且仅当

(1) $\mathcal{S}\subset\mathscr{T}$,

(2) 对任意 $U\in\mathscr{T}$ 和任意 $x\in U$, 存在 $S_1,\cdots,S_n\in\mathcal{S}$ 使得 $x\in\cap_{i=1}^n S_i\subset U$.

¶ 用基和子基刻画连续性

我们已经看到，拓扑空间之间的映射 $f:X\to Y$ 是连续的当且仅当任意开集的原像依然是开集。事实上，为了判定一个映射是否连续，我们只需要验证一部分集合的原像是否开集：我们只需验证一个拓扑基或子基中的元素的原像是否开集即可。

定理 1.83.（连续映射的刻画：拓扑基与子基）

假设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_Y$ 的一个拓扑基，$\mathcal{S}$ 是 $\mathscr{T}_Y$ 的一个子基。那么

$$\begin{aligned}&\text{映射}f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)\text{是连续映射}\\ \Longleftrightarrow&\text{对于任意}B\in\mathcal{B},\text{其原像}f^{-1}(B)\text{在}X\text{中是开集}\\ \Longleftrightarrow&\text{对于任意}S\in\mathcal{S},\text{其原像}f^{-1}(S)\text{在}X\text{中是开集.}\end{aligned}$$

证明 我们只需证明

$$f^{-1}(S)\in\mathscr{T}_X,\forall S\in\mathcal{S}\Longrightarrow f^{-1}(V)\in\mathscr{T}_X,\forall V\in\mathscr{T}_Y,$$

而这是如下事实的直接推论：f^{-1} 保并集和交集（见注1.58），即

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha}\bigcap_{i=1}^{n(\alpha)}S_{\alpha,i}\Big)=\bigcup_{\alpha}\bigcap_{i=1}^{n(\alpha)}f^{-1}(S_{\alpha,i}).$$

□

¶ 例子：序拓扑

事实上，例1.80(1) 中的构造适用于任何全序集。我们先给出定义：

定义 1.84.（偏序集与全序集）

设 X 是一个集合。

(1) 若 X 上存在一个关系 $\le$，满足

- $x\le x$,
- 如果 $x\le y, y\le z$, 则 $x\le z$,
- 如果 $x\le y, y\le x$, 则 $x=y$.

则称 $\le$ 为 X 上的一个**偏序关系**，而称 $(X,\le)$ 为一个**偏序集**。

(2) 若 $\le$ 是 X 上的一个偏序，且对任意 x,y 都有 $x\le y$ 或 $y\le x$，则称 $\le$ 为 X 上的一个**全序关系**，而称 $(X,\le)$ 为一个**全序集**。

注意，给定任何序关系 $\leq$，我们可以定义 $<$ 如下

$$x < y \Longleftrightarrow x \leq y \text{ 且} x \neq y.$$

现在我们将例 1.80(1) 定义拓扑拓展到任意全序集：

定义 1.85.（序拓扑）

设 $(X, \leq)$ 为全序集，令

$$\mathcal{S} = \{\{x \mid x < a\}, \{x \mid x > a\} \mid a \in X\}.$$

则以 S 为子基所生成的拓扑 $\mathscr{T}_{order}$ 称为 X 的**序拓扑**。♣

不难看出，由所有形如

$$\{x \mid x < a\}, \{x \mid x > a\}, \{x \mid a < x < b\}$$

的集合构成的集族为序拓扑 $\mathscr{T}_{order}$ 的一个拓扑基。

¶ 例子：乘积拓扑

设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间。现在我们在笛卡尔积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上定义乘积拓扑。我们已经看到，通过将例 1.80(2) 中的拓扑基 $\mathcal{B}$ 推广到任意多个空间的笛卡尔积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上，我们可以在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上定义箱拓扑。现在我们将推广例 1.80(2) 中的子基 $\mathcal{S}$ 来构造 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的乘积拓扑。注意对于 $X \times Y$，如果我们记 $\pi_X : X \times Y \to X$ 为典范投影，那么 $U \times Y = \pi_X^{-1}(U)$。于是，$X \times Y$ 的乘积拓扑就是以所有形如 $\pi_X^{-1}(V)$ 以及 $\pi_Y^{-1}(U)$ 的集合为子基所生成的拓扑。

一般地，对于任意多个空间的笛卡尔积，我们记

$$\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta, \quad (x_\beta) \mapsto x_\alpha$$

为"向 α 分量的典范投影"。

定义 1.86.（乘积拓扑）

设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间。我们称 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上由子基

$$\mathcal{S} = \bigcup_\beta \{\pi_\beta^{-1}(V_\beta) \mid V_\beta \in \mathscr{T}_\beta\}$$

生成的拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 为 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的**乘积拓扑**。♣

根据定义，显然 $\mathscr{T}_{product}$ 弱于 $\mathscr{T}_{box}$。

注 1.87. 虽然乘积拓扑看起来不像箱拓扑那么自然，但事实证明乘积拓扑更重要：它具有很多很好的拓扑性质。另一方面，箱拓扑有很多不好的性质，因而在拓扑学里常常扮演反面角色，被广泛用作反例。、当然，对于有限乘积空间，这两种拓扑是一样的。

注 1.88. 事实上，例1.80(3)所描述的用子基生成逐点收敛拓扑的方式，跟上面定义任意多个拓扑空间的乘积拓扑是一致的：首先，作为集合我们有

$$\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}) (= \mathbb{R}^{[0,1]}) = \prod_{x \in [0,1]} \mathbb{R}$$

其对应方式是

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad (f(x))_{x\in[0,1]}.$$

在这个对应下，例1.80(3)中的子基元素 $\omega(f;x;\varepsilon)$ 恰好对应到乘积空间里的集合 $\pi_x^{-1}((f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon))$. 由此我们可得：逐点收敛拓扑空间 $(\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}),\mathscr{T}_{p.c.})$ 跟乘积拓扑空间 $(\prod_{x\in[0,1]}\mathbb{R},\mathscr{T}_{product})$ 是同胚的。

在命题1.62中我们证明了从两个拓扑空间的乘积空间到每个分量的典范投影映射是连续的开映射。现将该性质推广到任意多个拓扑空间的乘积上去：

命题 1.89.（投影映射是连续开映射）

设 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间。则无论赋予 $\prod_\alpha X_\alpha$ 乘积拓扑还是箱拓扑，对任意 β，典范投影映射 $\pi_\beta:\prod_\alpha X_\alpha\to X_\beta$ 都是连续的开映射。♠

证明 因为乘积拓扑弱于箱拓扑，因此只需在 $\mathscr{T}_{product}$ 下证明 π_β 是连续映射，在 $\mathscr{T}_{Box}$ 下证明 π_β 是开映射。

- 在 $\mathscr{T}_{product}$ 下，π_β 是连续映射，因为 $(X_\beta,\mathscr{T}_\beta)$ 中的任意开集 V_β 的原像 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 是 $(\prod_\alpha X_\alpha,\mathscr{T}_{product})$ 中的开集。
- 在 $\mathscr{T}_{Box}$ 下，π_β 是开映射，因为对任意开集 $W\subset\mathscr{T}_{Box}$ 和任意 $x\in W$，存在 $U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha$ 使得 $x\in\prod_\alpha U_\alpha$. 因此，$\pi_\beta(x)\in U_\beta\subset\pi_\beta(W)$.

□

事实上，乘积拓扑可以用投影映射 π_β 来刻画：

命题 1.90.（乘积拓扑的刻画）

乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上使所有典范投影映射 π_β 都连续的拓扑中最弱的拓扑。♠

证明 我们已经看到所有 π_β 关于 $\mathscr{T}_{product}$ 都是连续的。反之，如果所有 π_β 关于 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的某个拓扑 $\mathscr{T}$ 都连续，那么每个 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 在 $\mathscr{T}$ 中是开集，所以 $\mathscr{T}_{product}$ 比 $\mathscr{T}$ 弱。□

¶ 乘积拓扑的泛性质

乘积拓扑也可以通过如下泛性质来刻画：

定理 1.91.（乘积拓扑的泛性质）

设 X,X_α 是拓扑空间，$f_\alpha:X\to X_\alpha$ 是映射。赋予空间 $\prod_\alpha X_\alpha$ 乘积拓扑。则映射

$$f:X\to\prod_\alpha X_\alpha,\ x\mapsto(f_\alpha(x))$$

是连续映射当且仅当所有 $f_\alpha=\pi_\alpha\circ f$ 都是连续映射。更进一步，乘积拓扑是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上唯一一个满足这个性质的拓扑。♡

证明

- $(\Rightarrow)$ 如果 f 是连续的，则 $f_\beta=\pi_\beta\circ f$ 是连续的。

- ($\Leftarrow$) 假设 f_α 都是连续的。为了证明 f 是连续的，由命题 1.83，只需证明 $f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(V_\beta))$ 在 X 中都是开集，其中 V_β 是 X_β 中的开集。事实上我们有
$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(V_\beta)) = (\pi_\beta \circ f)^{-1}(V_\beta) = f_\beta^{-1}(V_\beta).$$
所以由 f_β 的连续性，上述集合在 X 中是开集。
- 最后我们证明乘积拓扑可以用泛性质刻画：假设 $\mathscr{T}$ 是 X 上满足泛性质的拓扑。
  - 由 $\mathscr{T}$ 的泛性质和 $\pi_\beta : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \to X_\beta$ 的连续性，恒等映射
  $$\mathrm{Id} : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \to (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T})$$
  是连续的。
  - 而且，由 $\mathscr{T}$ 的泛性质和恒等映射 $\mathrm{Id} : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T})$ 的连续性，我们发现所有投影映射 $\pi_\beta : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to X_\beta$ 也都是连续的.
  - 再由投影映射 $\pi_\beta : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to X_\beta$ 的连续性和 $\mathscr{T}_{product}$ 的泛性质，我们得出恒等映射 $\mathrm{Id} : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 是连续的。

所以 $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{product}$.

□

作为推论，我们有

推论 1.92.（嵌入映射的连续性） 固定一个指标 α，并对任意 $\beta \neq \alpha$，取定 $x_\beta \in X_\beta$。设
$$g_\alpha : X_\alpha \to \prod_\beta X_\beta$$
为从 X_α 到 $\prod_\beta X_\beta$ 的由这些 x_β 所确定的“嵌入映射”，即满足
$$\pi_\beta(g_\alpha(x)) = \begin{cases} x_\beta, & \beta \neq \alpha \\ x, & \beta = \alpha \end{cases}$$
的映射，则 g_α 是连续映射。

注 1.93. 箱拓扑不满足泛性质。例如，我们令
$$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R},$$
并考虑映射
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ t \mapsto (t, t, t, \cdots).$$
则 f 的每个分量都是 $\mathbb{R}$ 到自身的恒等映射，从而 f 的每个分量都连续。但是如果我们赋 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 箱拓扑，那么 f 不是连续的。这是因为笛卡尔积
$$(-1, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots$$
在箱拓扑中是开集，但
$$f^{-1}\left((-1, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots\right) = \{0\}$$
在 $\mathbb{R}$ 中不是开集.

1.4.2 由映射定义的拓扑

¶ 诱导拓扑

我们比较一下命题1.90以及命题1.60，

- 乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上使所有典范投影 $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to (X_\beta, \mathscr{T}_\beta)$ 都连续的拓扑中最弱的拓扑。
- 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的子集 A 上的子空间拓扑 $\mathscr{T}_A$ 是 A 上所有使得包含映射 $\iota : A \hookrightarrow X$ 连续的拓扑中最弱的拓扑。

一般地，我们可以用“使得给定映射都连续的最弱拓扑”来在原像空间上构造拓扑：

定义 1.94.（诱导拓扑）

设 $(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，设

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}$$

是一族映射。则 X 上使所有 f_α 都是连续映射的拓扑中最弱的拓扑 $\mathscr{T}_\mathcal{F}$ 称为 X 的 **$\mathcal{F}$-诱导拓扑** (也称 **始拓扑** 或 **弱拓扑** 或 **极限拓扑**)。♣

注 1.95. 我们需要稍微解释一下定义。

- 首先，我们在例 1.59中已经看到，如果我们赋予 X 最强的拓扑，即离散拓扑，那么任何 f_α 都是连续的。这并不有趣。
- 如果在 X 上的一族拓扑 $\mathscr{T}_\beta$ 使得每个 f_α 关于每个 $\mathscr{T}_\beta$ 都是连续的，那么根据命题 1.41，$\mathscr{T} := \cap_\beta \mathscr{T}_\beta$ 是一个 X 上的拓扑，而且根据定义，f_α 关于 $\mathscr{T}$ 是连续的。因此，在 X 上存在唯一一个最弱拓扑使得每个 f_α 都是连续的。

我们不难找出这个拓扑。根据定义，$\mathscr{T}_\mathscr{F}$ 恰好是由子基

$$\mathcal{S}_\mathscr{F} = \bigcup_\alpha \{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \mid V_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\}.$$

所生成的拓扑。注意，在只有一个目标空间 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 和一个映射 $f : X \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ 的特殊情况下，子基

$$\mathcal{S}_f = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{T}_Y\}.$$

本身就是 X 上的一个拓扑。所以此时

$$\mathscr{T}_f = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{T}_Y\}.$$

重复定理 1.91 的证明过程，我们可以证明

命题 1.96.（诱导拓扑的泛性质）

设 $(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}$ 为一族映射。赋予 X 由 $\mathcal{F}$ 诱导的拓扑。那么对于任意拓扑空间 Z，映射 $f : Z \to X$ 连续当且仅当所有 $f_\alpha \circ f : Z \to Y_\alpha$ 都是连续的。更进一步，$\mathcal{F}$ 所诱导的拓扑是 X 上唯一满足该性质的拓扑。♠

¶ 诱导拓扑的更多例子

我们已经看到子空间拓扑和乘积拓扑都可以解释为诱导拓扑。下面给出更多例子:

例 1.97.

(1) **(作为诱导拓扑的度量拓扑)** 对于任意度量空间 (X,d),度量拓扑是由所有度量球 $\{B(x,r)\mid x\in X, r>0\}$ 生成的。换言之,度量拓扑是由映射族 $\{d_x\mid x\in X\}$ 生成的诱导拓扑,其中 $d_x: X\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_{usual})$ 是距离函数 $d_x(y):=d(x,y)$.

(2) **(作为诱导拓扑的逐点收敛拓扑)** 设 $X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 是 $[0,1]$ 上所有实值函数构成的空间。对任意 $x\in[0,1]$, 令 $ev_x: X\to\mathbb{R}$ 为赋值映射

$$ev_x(f):=f(x).$$

注意这里的赋值映射就是把 $\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 视作乘积空间时的投影映射。于是我们得到:在 X 上由 $\{ev_x\mid x\in[0,1]\}$ 生成的诱导拓扑是逐点收敛拓扑。

(3) **(弱拓扑和弱 * 拓扑)** 设 X 是拓扑向量空间,X^* 为其对偶空间,即

$$\begin{aligned} X^* &= X \text{ 上所有连续线性泛函构成的空间} \\ &= \{f: X\to\mathbb{K}\mid f\text{线性且(关于 } X \text{ 的原拓扑)连续}\}. \end{aligned}$$

然后我们可以在 X 上定义一个新的拓扑,并在 X^* 上定义一个自然的拓扑:

- X 上的**弱拓扑**是 X^* 生成的诱导拓扑, 即 X 上使所有 $f\in X^*$ 连续的拓扑中最弱的拓扑。[因此,X 上的弱拓扑比 X 上的原始拓扑更弱。]
- X^* 上的**弱 $*$ 拓扑**是由 $\{ev_x\mid x\in X\}$ 生成的诱导拓扑,即 X^* 上使所有赋值映射

$$ev_x: X^*\to\mathbb{R},\quad l\mapsto l(x)$$

都连续的拓扑中最弱的拓扑。

弱拓扑和弱 $*$ 拓扑是泛函分析和偏微分方程中非常重要的拓扑。

¶ 余诱导拓扑

映射不仅可以用来将拓扑从映射的像空间“拉回”到原像空间,还可以用于将拓扑从映射的原像空间“推出”到像空间。更准确地说,设 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间,Y 是一个集合,$f_\alpha: X_\alpha\to Y$ 是一族映射。我们可以赋予 Y 一个拓扑,使得每个 f_α 都是连续的。当然,为了这个目的,我们不能在 Y 中定义太多的开集。另一方面,我们也不想使用 Y 中的平凡拓扑,因为它太弱了以至于从任何拓扑空间到 Y 的任何映射都是连续的。所以这里问题是要在 Y 上找到一个尽可能强的拓扑结构,而且使得每个 f_α 都是连续的。因此我们自然地定义

定义 1.98. (余诱导拓扑)

设 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间, Y 是一个集合,$\mathcal{F}=\{f_\alpha: X_\alpha\to Y\}$ 是一族映射。在 Y 上使得所有 f_α 都连续的拓扑中最强的拓扑 $\mathscr{T}$ 被称为是由 $\mathcal{F}$ 诱导的 **余诱导拓扑** (也称为 **终拓扑** 或 **强拓扑** 或 **余极限拓扑**) ♣

我们必须要小心一点：是否存在这种最强的拓扑结构？请注意，在定义由映射族 $\mathcal{F}$ 诱导的弱拓扑时，我们使用了这样一个事实，即 X 上的一族拓扑的交集仍然是 X 上的拓扑（参见命题 1.41 ）。通常，X 上的一族拓扑的并集并不是 X 上的拓扑。（找出一个例子！）但是，如果认真思考这个问题，你会发现我们其实处于比弱拓扑更简单的情况：

- 在只有一个映射 $f:(X,\mathcal{T}_X)\to Y$ 的情况下，Y 上的余诱导拓扑可以直接给出：

  $$\mathcal{T}=\{V\subset Y\mid f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X\}.$$

  不难验证它是 Y 上的一个拓扑。
- 在余诱导拓扑是由一族映射 $\mathcal{F}=\{f_\alpha\}$ 诱导的情况下，我们有一系列约束需要要同时满足。为此，我们要做的并不是把 Y 上相应的一族拓扑并起来，而是应该取 Y 上相应的拓扑族的交集，从而我们依然可以显式地给出该拓扑：

定理 1.99.（余诱导拓扑的显式表达）

设 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，$f_\alpha:X_\alpha\to Y$ 是一族映射. 那么由 $\{f_\alpha\}$ 诱导的 Y 上的余诱导拓扑为

$$\mathcal{T}=\bigcap_\alpha\{V\subset Y\mid f_\alpha^{-1}(V)\in\mathcal{T}_\alpha\}.$$

♡

证明 根据定义容易验证 $\mathcal{T}$ 是 Y 上的一个拓扑，并且每个 f_α 关于这个拓扑是连续的。另一方面，如果我们再加入任何其他集合 V_0，则根据构造，存在 α 使得 $f_\alpha^{-1}(V_0)\notin\mathcal{T}_\alpha$，所以 f_α 不连续。 □

与诱导拓扑一样，余诱导拓扑也可以通过以下泛性质来刻画：

命题 1.100.（余诱导拓扑的泛性质）

设 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，$\mathcal{F}=\{f_\alpha:X_\alpha\to Y\}$ 是一族映射。赋予 Y 以 $\mathcal{F}$ 诱导的拓扑。那么对于任意拓扑空间 X，映射 $f:Y\to Z$ 连续当且仅当每个 $f\circ f_\alpha:X_\alpha\to Z$ 都是连续的。此外，由 $\mathcal{F}$ 诱导的 Y 上的余诱导拓扑是唯一满足该性质的拓扑。

♠

最后我们再给出诱导拓扑与余诱导拓扑的几个例子：

例 1.101.

(1)（**拓扑的交集**）设 $\mathcal{T}_\alpha$ 是 X 上的一族拓扑。现在我们有一种不同的方式来考察拓扑 $\mathcal{T}=\bigcap_\alpha\mathcal{T}_\alpha$，其中 $\mathcal{T}_\alpha$ 是 X 上的一族拓扑。设 $\mathrm{Id}_\alpha:(X,\mathcal{T}_\alpha)\to X$ 是恒等映射. 则 $\mathcal{T}$ 是 X 上由 $\{\mathrm{Id}_\alpha\}$ 诱导的余诱导拓扑。

(2)（**拓扑的并 (join)**）设 $\mathcal{T}_\alpha$ 是 X 上的一族拓扑。一般而言，$\bigcup_\alpha\mathcal{T}_\alpha$ 不再是 X 上的拓扑。但是我们可以考虑由恒等映射族 $\{\widetilde{\mathrm{Id}_\alpha}:X\to(X,\mathcal{T}_\alpha)\}$ 在 X 上诱导的拓扑，该拓扑被称为 X 上给定拓扑族的**并拓扑**。由定义，它就是 $\bigcup_\alpha\mathcal{T}_\alpha$ 生成的最弱拓扑。

(3)（**拓扑并**）设 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，且交集 $X_\alpha\cap X_\beta$ 上由 X_α 所确定的子空间拓扑与由 X_β 所确定的子空间拓扑是一致的，那么我们可以在并集 $X=\cup X_\alpha$ 上定义拓扑 $\mathcal{T}$ 为使所有 $\iota_\alpha:X_\alpha\hookrightarrow X$ 都连续的拓扑中最强的拓扑。换言之，$\mathcal{T}$ 是包含映射族 $\{\iota_\alpha\}$ 诱导的余诱导拓扑。拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 称为 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 的 **拓扑并**。