

1.4.3 商拓扑

¶ 商拓扑

余诱导拓扑的最重要的例子是所谓的**商拓扑**。因为它非常具体且“可以看见”，因此在几何和代数拓扑中被广泛使用。其定义如下：

定义 1.102. (商拓扑)

设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 是拓扑空间, Y 是集合, $p: X \rightarrow Y$ 是满射.

(1) 我们称 Y 上由 p 诱导的余诱导拓扑 $\mathcal{T}_Y$ 为 Y 上的 **商拓扑**, 称 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 为 $(X, \mathcal{T}_X)$ 的 **商空间**, 称 $p: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ 为 **商映射**.

(2) 给定商映射 p , 我们称 $p^{-1}(y)$ 为 p 在点 $y \in Y$ 上的 **纤维**.



根据定义, 在商拓扑 $\mathcal{T}_Y$ 中,

集合 $V \subset Y$ 是开集当且仅当 $p^{-1}(V)$ 在 $(X, \mathcal{T}_X)$ 中是开集。

由此易见, 两个商映射的复合也是一个商映射。

根据余诱导拓扑的泛性质即命题 1.100, 我们有

定理 1.103. (商拓扑的泛性质)

设 X, Y, Z 为拓扑空间, $p: X \rightarrow Y$ 为商映射, $f: Y \rightarrow Z$ 为映射。那么 f 是连续的当且仅当 $g = f \circ p$ 是连续的。此外, Y 上的商拓扑是唯一满足该性质的拓扑。



作为推论, 我们得到

推论 1.104

如果 $p: X \rightarrow Y$ 是一个商映射, 而 $f: X \rightarrow Z$ 是一个连续映射, 且 f 在每个纤维上都是常值的, 那么自然诱导映射

$$\bar{f}: Y \rightarrow Z, \quad \bar{f}(y) := f(p^{-1}(y))$$

是连续的。



¶ 作为等价类的商空间

下面是构建商映射/商拓扑的典型方法：从拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 开始, 先在 X 上选定一个等价关系 $\sim$. 回想一下, 这意味着

- $x \sim x$;
- $x \sim y \implies y \sim x$;
- $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$.

然后我们得到一个由所有等价类构成的抽象空间

$$Y = X / \sim$$

和一个自然的投影映射

$$p: X \rightarrow X / \sim, \quad x \mapsto [x],$$

从而可以在等价类集合 Y 上构造商拓扑。在这种情况下，每个纤维恰是一个等价类。注意“用满映射定义商空间”的描述和“用等价关系定义商空间”的描述是等价的：给定等价关系的描述，我们有一个如上所示的投影映射作为我们的商映射；反之，给定任何商映射 $f: X \rightarrow Y$ ，我们可以通过 $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ 来定义 X 上的一个等价关系，其等价类集合恰为 Y 。

例 1.105.

(1) (作为商空间的圆) 我们可以用两种不同的方式视圆 S^1 为商空间：

- (a). $S^1 \simeq [0, 1]/\{0, 1\}$: 在集合 $[0, 1]$ 上定义一个等价关系，其中唯一的非平凡等价类为 $0 \sim 1$ ，则所得的商空间为圆 S^1 。
- (b). $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ¹⁴: 在 $\mathbb{R}$ 上考虑等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z},$$

所得的商空间也是圆 S^1 。

不难证明，上面这两种方式得到的商空间，跟平面中的单位圆是同胚的。

(2) (与原拓扑相差悬殊的商拓扑) 我们可以把上面例子中的 $\mathbb{Z}$ 换成 $\mathbb{Q}$ ，在 $\mathbb{R}$ 上定义一个等价关系 $\sim$ 如下：

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

为了找到 $X = \mathbb{R}/\sim$ 上的商拓扑，我们设 $U \subset X$ 是开集，则 $p^{-1}(U)$ 在 $\mathbb{R}$ 中也是开集。特别地， U 包含某个开区间 (a, b) 。由等价关系 $\sim$ 的定义，任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 都等价于 (a, b) 中的某个数，所以 $p^{-1}(U) = \mathbb{R}$ 。所以 X 上的商拓扑是平凡拓扑。

¶ 实射影空间

下面我们给出一个商空间的重要例子：实射影空间。我们给出两种描述。

例 1.106. (实射影空间)

- 在 $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上我们可以定义等价关系：

$$x \sim y \iff \exists 0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \text{ 使得 } x = \lambda y.$$

赋以商拓扑的商空间

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$$

称为实射影空间。由此我们得到实射影空间的一种几何解释：

$$\boxed{\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \text{ 中所有经过原点 } O \text{ 的直线构成的空间.}}$$

- 我们也可以从单位球 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 出发，定义等价关系

$$x \sim y \iff x = \pm y.$$

由于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中通过原点 O 的直线与 S^n 正好在两个对径点相交，因此最终得到的商空间是相同的。

¹⁴在这里，我们把 $\mathbb{Z}$ 视作加法群作用于 $\mathbb{R}$ 上，见下文的例 1.115(1)。在文献中 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 常常还表示另外一个完全不同的商空间：视 $\mathbb{Z}$ 为 $\mathbb{R}$ 的子集，而 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 表示把整个子集 $\mathbb{Z}$ 收缩到一个点（见下文的“收缩”构造），此时 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在拓扑上是可数个圆的楔和空间，见的“楔和”构造。

注意, 当 $n = 1$ 时, $\mathbb{RP}^1$ 实际上同胚于 S^1 , 因为根据第二种描述方式, 我们可以从一个半圆开始, 然后将两个端点等同起来。然而, 即使 $n = 2$ 时的实射影平面, 其几何图像也是非常复杂的: 我们可以从一个半球开始构造,

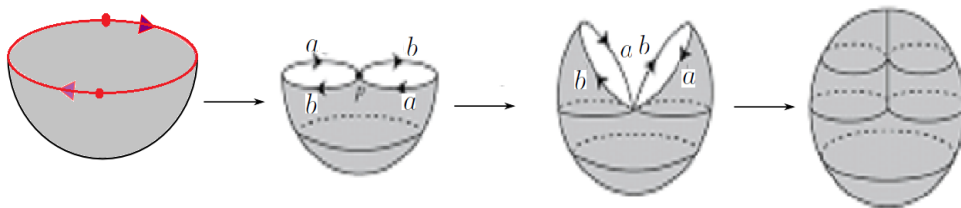


图 1.1: $\mathbb{RP}^2$ 的“图像”

可以看出, 图中有“自相交”。但是, $\mathbb{RP}^2$ 的真实“图像”中不应该存在自相交。事实上, 我们不能将 $\mathbb{RP}^2$ 嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中, 而只能将它嵌入到 $\mathbb{R}^4$ 中。此外, 跟 Möbius 带一样, 当 n 为偶数时 $\mathbb{RP}^n$ 都是不可定向的。

注 1.107. 类似地, 可以构造 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中复直线所构成的空间, 即复数射影空间 $\mathbb{CP}^n$:

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim,$$

其中

$$x \sim y \iff \exists 0 \neq \lambda \in \mathbb{C} \text{ 使得 } x = \lambda y.$$

更一般地, 可以在向量空间 V 的所有 k 维子空间构成的空间上定义合适的拓扑, 得到所谓的格拉斯曼流形 $Gr(k, V)$ ¹⁵ 注意, $\mathbb{RP}^n$ 只是一个特殊的格拉斯曼流形:

$$\mathbb{RP}^n = Gr(1, \mathbb{R}^{n+1}).$$

¶ 构造: 在同一空间中将一个点与另一个点黏合

下面我们介绍许多从已知空间出发构造商空间非常具体的几何方法。第一个是:

黏合: 设 X 是一个拓扑空间, **黏合** X 中的点 a 和 b 是指: 考虑从仅包含一个非平凡等价 $a \sim b$ 的等价关系获得的商空间。类似地, 我们可以通过将子集 A 中的每一点等同于 B 中的某一点来将子集 A 黏合到 X 中的子集 B 。

这广泛用于拓扑地从平面多边形构造曲面: 只需使用规定的方式黏合边界线段。

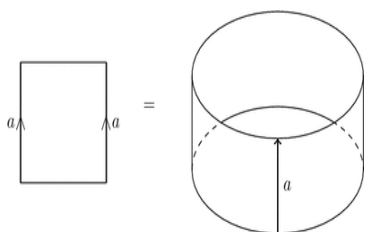


图 1.2: The cylinder

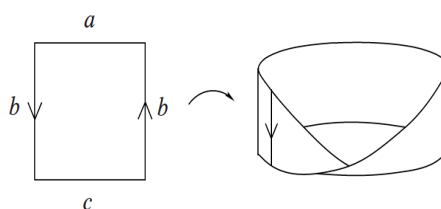


图 1.3: Möbius 带

¹⁵然而, 对于 $k > 1$, $Gr(k, V)$ 不能实现为 V 的商空间。不过, 它可以实现为更大空间 (比如 $GL(V)$) 的商空间。

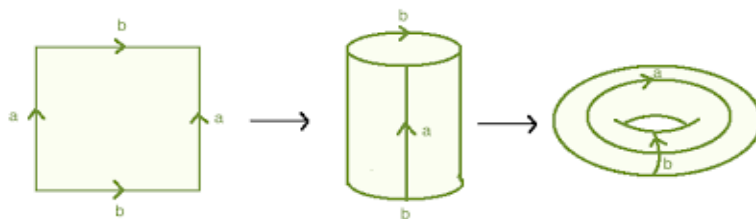


图 1.4: 环面

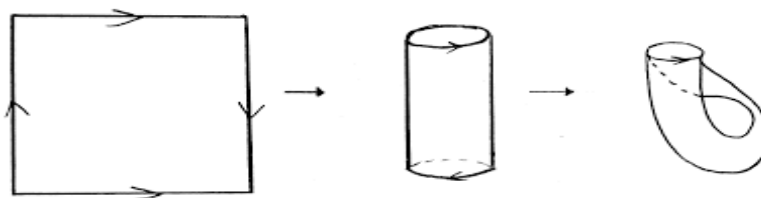


图 1.5: Klein 瓶

事实上, 任何 (紧的) 曲面都可以通过从一个合适的多边形开始并以合适的方式黏合其边界来构造。这是一个更复杂的例子:

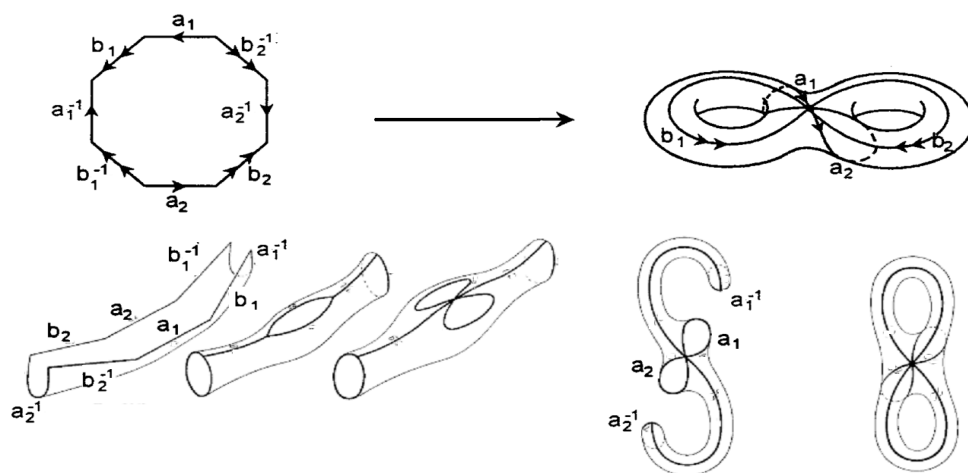


图 1.6: 2-环面

在本学期末, 我们将用这样的多边形表示来证明紧致曲面的分类定理。

¶ 构造: 附加空间 (黏着空间)

我们可以按照给定的映射将一个空间黏着到另一个空间:

黏着空间: 设 X, Y 是拓扑空间, $A \subset Y$ 是子空间, $f: A \rightarrow X$ 是连续映射. 那么黏着空间 $X \cup_f Y$ 是取 X 的 Y 无交并, 然后将 $a \in A$ 和 $f(a) \in X$ 等同起来, 即

$$X \cup_f Y = X \sqcup Y / \{a \sim f(a)\}.$$

例如，我们可以将两个单位圆盘在边界圆上黏合起来，得到一个球面：

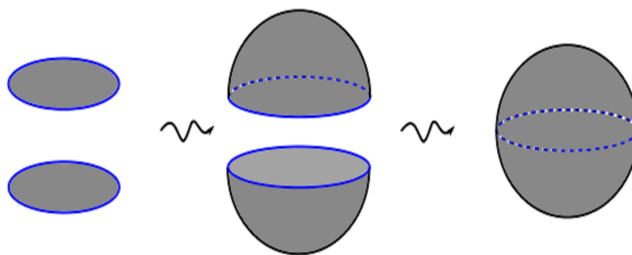


图 1.7: 从圆盘到球面

稍后我们将用到两种特殊情况：

1. (楔和) 给定两个拓扑空间 X 和 Y , X 和 Y 的**楔和** $X \vee Y$ 是将 X 中的一点和 Y 中的一点黏合起来构成的：

$$X \vee Y = X \sqcup Y / \{x_0 \sim y_0\}.$$

更一般地，给定一族空间 X_α ，并选定点 $x_\alpha \in X_\alpha$ ，我们可以通过将所有 X_α 在点 x_α 处黏合在一起构造 **楔和** $\bigvee_\alpha X_\alpha$ 。

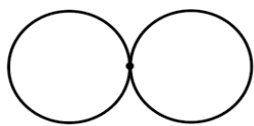


图 1.8: $S^1 \vee S^1$

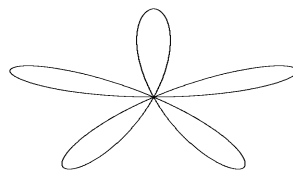


图 1.9: $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$

注 1.108. 讨论楔和时，我们实际上是在研究“带基点的空间” (X, x_0) ，即选择了一个点 x_0 的空间。 (X, y_0) 和 (Y, y_0) 的楔和也是一个带基点的空间 $(X \vee Y, \{x_0\})$ 。这样，在研究多个空间的楔和时，我们总是将基点黏合到一个点上。

2. (连通和)

给定两个局部欧几里得的几何对象 A 和 B (“流形”)，**连通和** $A \# B$ 构造如下：从每个对象中去掉一个小球（或圆盘），然后粘合边界球面（或圆），使它们“连通在一起”。¹⁶

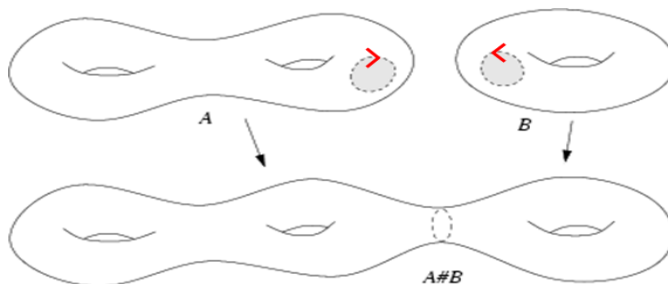


图 1.10: 连通和 $A \# B$

¹⁶这广泛用于从给定曲面构造新曲面，也多用于流形理论中从给定流形构造新流形。

换言之,

$$A \# B = (A - D_1) \cup_f (B - D_2),$$

其中 D_1, D_2 分别是 A, B 上的小圆盘, f 是黏合映射, 将 ∂D_1 和 ∂D_2 如图所示等同起来.

¶ 构造：将一个子集收缩到一点

接下来我们考虑

收缩: 设 X 是一个拓扑空间, $Y \subset X$. 我们可以定义 X 上的等价关系如下:
 $y_1 \sim y_2$ 当且仅当 $y_1, y_2 \in Y$. 换言之, 在商空间中, 我们将 Y 中的所有点
 “收缩” 到一个点. 为简单起见, 我们将商空间记为 X/Y .

例如, 我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的单位盘 D . 我们可以把它的边界圆收缩成一个点. 我们得到了什么? 一个球体 S^2 ! 类似地, 我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 中收缩单位球 $B(0, 1)$ 的边界球 S^{n-1} , 得到 S^n .

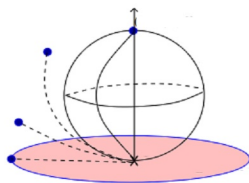


图 1.11: 收缩边界圆来得到球面

再举一个例子: 我们固定 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$. 通过将 X 等同于 $X \times \{y_0\}$, 并将 Y 等同于 $\{x_0\} \times Y$, 我们可以将楔和 $X \vee Y$ 视为 $X \times Y$ 的子空间. 在乘积空间 $X \times Y$ 中将楔和 $X \vee Y$ 收缩成一个点, 所得的空间被称为 X 和 Y 的 **smash 积**, 记为 $X \wedge Y$:

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y.$$

¶ 构造：锥空间和纬垂

给定任意拓扑空间 X , 可以构造 X 的锥空间和 (代数拓扑会用到的) 纬垂, 两者都是柱体 $X \times [0, 1]$ 的商空间:

1. X 的 **锥空间**, 记为 $C(X)$, 是将 $X \times [0, 1]$ 中的子集 $X \times \{0\}$ 收缩为一个点构成的, 即 $C(X) = X \times [0, 1] / X \times \{0\}$:

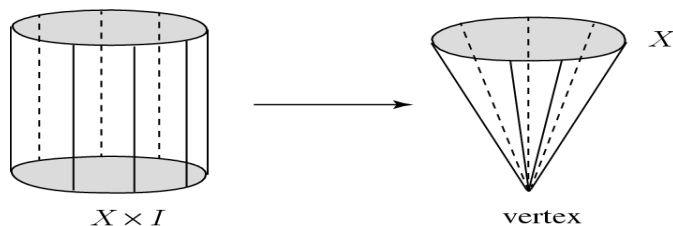
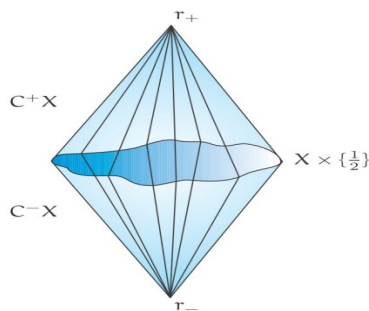


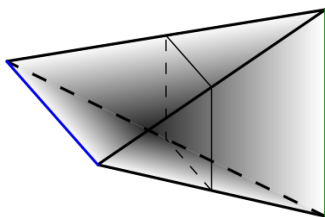
图 1.12: 锥空间 $C(X)$

2. X 的 **纬垂**, 记为 $S(X)$, 是将 $X \times \{0\}$ 收缩为一点, 同时将 $X \times \{1\}$ 收缩为另一点构成的.

图 1.13: 纬垂 $S(X)$

3. 更一般地, 给定拓扑空间 X 和 Y , X 和 Y 的 **统联 (join)**, 有时记为 $X \star Y$, 定义为 $X \star Y = X \times Y \times I / \sim$, 其中等价关系 $\sim$ 为

$$(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1), \quad \forall x, x_1, x_2 \in X; y, y_1, y_2 \in Y.$$

图 1.14: 统联 $X \star Y$

¶ 构造: 映射柱, 映射锥和映射环面

我们也可以研究与映射相关的空间, 这些空间在代数拓扑中是常见的:

- (1) 给定连续映射 $f: X \rightarrow Y$, f 的 **映射柱**, 是指

$$M_f = (X \times [0, 1]) \sqcup_{\tilde{f}} Y,$$

是 $X \times [0, 1]$ 和 Y 按映射 $\tilde{f}: X \times \{0\} \rightarrow Y, f(x, 0) := f(x)$ 黏合得到的空间。

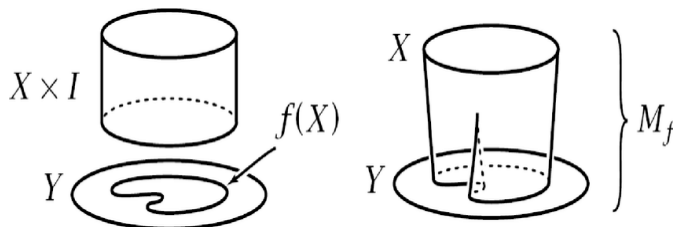


图 1.15: 映射柱

- (2) 给定连续映射 $f: X \rightarrow Y$, f 的 **映射锥**, 记为 C_f , 是指商空间

$$C_f = (X \times [0, 1]) \sqcup_{\tilde{f}} Y / \sim,$$

即映射锥 M_f 在等价关系下

$$(x_1, 1) \sim (x_2, 1), (x, 0) \sim f(x), \quad \forall x, x_1, x_2 \in X.$$

的商空间。

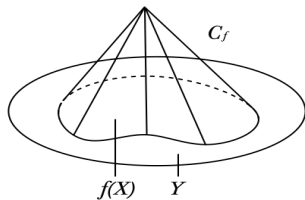


图 1.16: 映射锥

(3) 给定同胚 $f: X \rightarrow X$, f 的 **映射环面** 是指

$$T_f := X \times [0, 1] / (1, x) \sim (0, f(x)).$$

曲面同胚的映射环面在 3 维流形理论中起着关键作用, 并得到了深入的研究。

1.4.4 群作用的商

¶ 同胚群

我们知道, 对称性在数学的所有分支中都起着至关重要的作用, 而描述对称的数学语言是群。在拓扑学里面, 任给一个拓扑空间, 我们都可以得到一个描述该空间自身“拓扑对称性”的群:

命题 1.109. (自同胚构成一个群)

设 X 是拓扑空间, 令

$$\text{Hom}(X) = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ 是同胚}\}.$$

那么在通常的“映射复合”运算下, $\text{Hom}(X)$ 是一个群。



证明 很容易验证 $\text{Hom}(X)$ 中“映射复合”运算是群运算:

- 给定 X 的两个同胚 f 和 g , 复合映射 $g \circ f$ 也是 X 的同胚, 并且根据定义, 结合性也是成立的,
- 恒等映射 Id 是群中的单位元,
- 同胚映射 f 的逆映射 f^{-1} 依然是同胚, 并且是“映射复合”运算下元素 f 的逆。

□

我们给这个描述拓扑空间自身“拓扑对称性”的群一个名字:

定义 1.110. (同胚群)

我们称 $\text{Hom}(X)$ 为拓扑空间 X 的 **同胚群**。



注意, 对于任意元素 $f \in \text{Hom}(X)$, 我们说 f “作用”在空间 X 上是指将元素 $x \in X$ 映射到像 $f(x) \in X$ 。

群作用

我们定义

定义 1.111. (群作用)

设 G 为一个群，其单位元记为 e . 设 X 为一个集合。

(1) 群 G 在集合 X 上的一个 (左) 作用^a 是指映射

$$\alpha : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

使得

- 对任意 $x \in X$, 都有 $e \cdot x = x$,
- 对任意 $g, h \in G$ 和 $x \in X$, 都有 $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

(2) 若 X 是拓扑空间, 且群 G 在 X 上的 (左) 作用跟拓扑结构相容, 即: 对任意 $g \in G$, 映射

$$\tau_g : X \rightarrow X, \quad x \mapsto \tau_g(x) := g \cdot x$$

是连续映射, 则称该作用为 **群 G 在拓扑空间 X 上的 (左) 作用**

(3) 若 X 是拓扑空间, G 是拓扑群, 且群 G 在 X 上的作用映射 α 是连续映射, 则我们称该群作用是一个 **连续作用**。

^a跟左作用类似, 我们也可以定义**右作用**的概念: 对于右作用, 一般记为 $x \cdot g$, 只要把定义中的第二个条件改为 $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ 即可。右作用的理论与左作用相似。



注 1.112. 根据定义, 若群 G 作用在拓扑空间 X 上, 则每个映射 τ_g 都是一个 X 到自身的同胚, 因为根据定义, 我们有 $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$, 从而 τ_g 不仅可逆而且其逆映射也是连续的。于是, 群 G 的每个元素 g 都关联一个同胚 $\tau_g : X \rightarrow X$, 且这些同胚满足

$$\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

换言之, 群 G 在拓扑空间 X 上的作用实际上是一个群同态

$$\tau : G \rightarrow \text{Hom}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ 是同胚}\}.$$

请注意, 我们将 (总是) 假设 τ 是单射: 若 G 不是单射, 我们可以将 G 替换为商群 $G/\ker(\tau)$, 它在 X 上的作用是显然的。这样的群作用称为**忠实作用**。

轨道和轨道空间

定义 1.113. (轨道)

给定 G 在集合 X 上的群作用, 对于任意 $x \in X$, 我们称集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

为 x 在该群作用下的 **轨道**。



我们可以在 X 上定义一个等价关系 $\sim$ 如下:

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G \text{ 使得 } x_1 = g \cdot x_2.$$

换言之, X 中的两个元素等价当且仅当它们落在同一轨道上。易验证这是一个等价关系。

定义 1.114. (轨道空间)

给定拓扑空间 X 上的群作用 G , 我们称按照以上等价关系所得的商空间

$$X/G = X/\sim$$

为该群作用的**轨道空间**。



所以根据定义, 轨道空间是“由轨道构成的空间”, 并赋以商拓扑。

¶ 例子

例 1.115. 我们列出几个简单的轨道空间的例子, 我们将在本学期晚些时候学习覆盖空间时用到这些例子。

- (1) $G = \mathbb{Z}$ 在 $X = \mathbb{R}$ 上的群作用

$$\tau(n)(x) = n + x. \quad (\text{平移})$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1.$$

- (2) $G = \mathbb{Z}_n$ 在 $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ 上的群作用

$$\tau(k)(z) = e^{2\pi i k/n} z. \quad (\text{旋转})$$

$$\rightsquigarrow S^1/\mathbb{Z}_n \simeq S^1.$$

- (3) $G = \mathbb{Z}_2$ 在 $\tilde{X} = S^n$ 上的群作用

$$\tau(1)(x) = x \quad \text{以及} \quad \tau(-1)(x) = -x. \quad (\text{对径点})$$

$$\rightsquigarrow S^n/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{RP}^n.$$

- (4) $G = \mathbb{Z}^n$ 在 $X = \mathbb{R}^n$ 上的群作用

$$\tau(m_1, \dots, m_n)(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n).$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{T}^n \simeq S^1 \times \dots \times S^1.$$

- (5) 设 p, q 是互素的。我们定义 $G = \mathbb{Z}_p = \{1, e^{2\pi i/p}, \dots, e^{2\pi i(p-1)/p}\}$ 在 $X = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ 上的群作用

$$\tau(e^{2\pi i k/p})(z_1, z_2) = (e^{2\pi i k/p} z_1, e^{2\pi i k q/p} z_2).$$

$$\rightsquigarrow L(p; q) := S^3/\mathbb{Z}_p \text{ 称为 } \textbf{透镜空间}.$$

例 1.116. 接下来我们举两个具有轨道空间具有较坏拓扑的例子。

- (1) 考虑 $\mathbb{R}_{>0}$ (作为乘法群) 在 $\mathbb{R}$ 上的乘法作用, 即

$$a \cdot x := ax.$$

那么存在三个轨道: $\mathbb{R}_{>0}$ 、 $\{0\}$ 、 $\mathbb{R}_{<0}$ 。因此, 轨道空间由 $\{+, 0, -\}$ 三个元素组成, 轨道空间上的拓扑为

$$\{\emptyset, \{+\}, \{-\}, \{+, -\}, \{+, 0, -\}\}.$$

(2) 任给正实数 r , 考虑实数加法群 $\mathbb{R}$ 在 $S^1 \times S^1$ 上的群作用

$$t \cdot (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) := (e^{i(\theta_1+t)}, e^{i(\theta_2+rt)}).$$

那么

- (a). 若 $r = p/q$, 其中 p, q 互素, 则此时 $\mathbb{R}$ 作用不是忠实作用 (见注记 1.112), 且它诱导了一个 $\mathbb{R}/\{2kq\pi\} = S^1$ 作用, 其每条轨道都是一个绕环面很多圈的圆, 而轨道空间同胚于 S^1 .
- (b). 若 r 是无理数, 则每条轨道都是环面 $S^1 \times S^1$ 上的一条“稠密曲线”, 而且类似于例 1.105(2), 其轨道空间的拓扑则是平凡拓扑。

¶ 阅读材料: Hopf 纤维化

下面这个例子在几何与拓扑中有着重要作用。我们考虑群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 在三维球面

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

上的群作用

$$z \cdot (z_1, z_2) := (zz_1, zz_2). \quad (1.4.6)$$

可以验证这是一个连续群作用, 且每条轨道 $S^1 \cdot (z_1, z_2)$ 都是 S^3 里面的一个大圆。我们有: 轨道空间 S^3/S^1 同胚于 S^2 。

证明概要: 我们令

$$X = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| \leq |z_2|\},$$

$$Y = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| \geq |z_2|\}.$$

注意到 X 在 S^1 -作用下不变的, 即若一个点落在 X 里面, 则整条轨道都落在 X 里面。同理 Y 和 $X \cap Y$ 也是在 S^1 -作用下不变的。所以 S^3/S^1 可以通过如下构造得到: 将 X/S^1 和 Y/S^1 沿着“边界” $X \cap Y/S^1$ 黏合。

- 根据定义,

$$X \cap Y = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| = |z_2|\}.$$

是一个环面, 于是 $X \cap Y/S^1$ 是该环面在 S^1 作用 (1.4.6) 下的商空间, 不难验证该作用对应于例 1.116(2) 中有理数情形, 从而商空间是一个圆 S^1 。

- 现在考虑 X/S^1 . 我们可以定义映射

$$f: D^2 \rightarrow X, z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(z, 1)$$

并证明 f 是一个同胚, 它将 D^2 的边界圆映射到边界圆 $X \cap Y/S^1$ 。

- 类似地, Y/S^1 同胚于一个圆盘, 其边界映射到 $X \cap Y/S^1$ 。

因此, 商 S^3/S^1 同胚于两个单位圆盘沿边界圆黏合得到的空间, 即球面 S^2 !

商映射 $p: S^3 \rightarrow S^2$ 被称为 **Hopf 纤维化**, 它的每个纤维都是 S^3 里面的大圆。【我们将会证明, S^3 在拓扑上与 $S^2 \times S^1$ 不同胚。】