1.5 拓扑空间中的点与集合

1.5.1 闭集与极限点

¶ 开集与闭集

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间。则 X 中的开集恰好是集族 $\mathscr{T}$ 里的那些集合，而 X 中的闭集则是其补集 $F^c = X\setminus F$ 是开集的那些集合 F。子集 $A\subset X$ 可以是开集，也可以是闭集，或两者都不是，或两者都是。我们称既是开集又是闭集的那些子集为 **闭开集 (clopen)**[17]

例 1.117.

(1) 在任意拓扑空间中，$\emptyset$ 和 X 总是闭开集。

(2) 对于离散拓扑 $\mathscr{T}_{discrete}$, 所有子集都是闭开集。

(3) 在实直线 $\mathbb{R}$（赋以通常的拓扑）中，

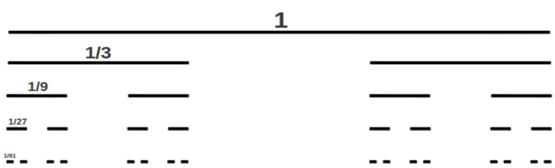
(a). 任意单点集 $\{x\}$ 是闭集。

(b). 任意开区间 (a,b) 是开集，任意闭区间 $[a,b]$ 是闭集。

(c). Cantor 集

$$C=[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1}\left(\frac{3k+1}{3^n},\frac{3k+2}{3^n}\right)$$

是一个开集的补集，因此是闭集。



注意

- 在 $\mathbb{R}$ 中，任意开集都是开区间的可数并。因为 $\mathbb{R}$ 有 $\aleph_1$ 个开区间，所以在 $\mathbb{R}$ 中有 $\aleph_1^{\aleph_0}=\aleph_1$ 个开集。
- 闭集的结构可能要复杂得多，例如，康托集不能写成闭区间的可数并集。但是，由于开集和闭集是一一对应的，所以在 $\mathbb{R}$ 中也存在 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ 个闭集。
- 由于 $\mathbb{R}$ 有 $2^{\aleph_1}=\aleph_2$ 子集，我们得出结论：

  $\mathbb{R}$ 中**几乎所有**的子集既不开也不闭！

(4) 视 $\mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{R}$ 的子空间，赋予 Q 子空间拓扑。在 $\mathbb{Q}$ 中考虑形如 $(a,b)\cap\mathbb{Q},(a<b)$ 的集合。那么对于 $a\in\mathbb{Q}$，集合 $(-\infty,a]\cap\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中不是开集，而对于 $a\in\mathbb{Q}^c$，集合 $(-\infty,a]\cap\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是开集。因此，我们有

(a). 如果 $a\in\mathbb{Q}$ 或 $b\in\mathbb{Q}$, 则 $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是开集但不是闭集.

(b). 如果 $a,b\in\mathbb{Q}^c$, 则 $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是闭开集.

---

[17]在英语中这样的词称为 **混成词 (portmanteau)**：多个词的一部分混合组合成一个新词。比较常见的混成词包括：brunch = breakfast + lunch，Microsoft = microcomputer + software 等。有趣的是，第一个在文学中创造一个混成词的人是数学家 Charles Dodgson，他可能是历史上最“有名”的数学家，不过他主要是以笔名 Lewis Carroll（即两部著名儿童小说《爱丽丝梦游仙境》和《爱丽丝镜中奇遇记》的作者）而为人所知。

¶ 闭集的刻画：一个反例

乍一看，$(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$ 这样的子集在 $\mathbb{Q}$ 中是闭集可能看起来很奇怪。然而，根据我们在欧氏拓扑中的经验，一个集合是闭集当且仅当它里面的任何收敛序列都收敛到该集合中的一个点。事实上该准则对于 $\mathbb{Q}$ 中的闭集 $(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$ 仍然成立：如果 $r_n\in(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$ 且 $r_n\to r_0\in\mathbb{Q}$，我们有 $r_0\in[\sqrt{2},\pi]\cap\mathbb{Q}$，因此 $r_0\in(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$.

不过我们还是得小心一点：我们从欧氏拓扑中得到的经验，对于一般拓扑空间是否依然成立呢?

定义 1.118.（序列极限点）

设 A 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的子集，x 为 X 中的一个点。如果存在序列 $a_n\in A$ 使得 $a_n\to x$，则我们称点 x 为 A 的**一个序列极限点**。 ♣

一个自然的问题是：

> 在一般的拓扑空间中，“一个集合是闭集**当且仅当**它包含其所有序列极限点”这一论断是否依然成立?

例 1.119. 考虑赋有逐点收敛拓扑的空间 $X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$。令

$$A=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid \text{仅对可数多的 } x\in[0,1] \text{ 有 } f(x)\neq 0\}.$$

那么如果 $f_n\in A$ 且 f_n 逐点收敛于 f_0, 则一定有 $f_0\in A$，因为

$$\{x\mid f_0(x)\neq 0\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\mid f_n(x)\neq 0\}$$

是可数集。

但是, A 不是 X 中的闭集, 即 $A^c=X\setminus A$ 不是开集。为了看到这一点, 我们任取 $g\in A^c$. 令 U 是 g 的任意开邻域。根据定义, $\exists x_1,\cdots,x_n,\ \varepsilon>0$, 使得$\omega(g;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)\subset U$. 现在我们定义

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x), & x\in\{x_1,\cdots,x_n\},\\ 0, & x\notin\{x_1,\cdots,x_n\}.\end{cases}$$

则 $\tilde{g}\in A\cap\omega(g;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)\subset A\cap U$. 换言之，$g\in A^c$ 的任意开邻域 U 都包含 A 中的一个元素。所以 A^c 不是开集，即 A 不是闭集。

让我们强调一下从上述例子而得到的以下事实：

警告: 在拓扑空间中, 你不能通过证明 “如果 $x_n\in A$ 且 $x_n\to x_0$, 则 $x_0\in A$” 来断言集合 A 是闭集。

¶ 度量空间中的闭集的刻画

所以在欧氏空间中我们有一个很好的判据来判断一个集合是否闭集，但是在一般拓扑空间中该判据失效了。一个自然的问题是：在中间地带，即度量空间中，会发生什么?

幸运的是，在度量空间中，这个闭性的良好判据是成立的：

命题 1.120.（度量空间中闭集的刻画）

度量空间 (X,d) 中的子集 F 是闭集当且仅当 F 包含其所有序列极限点，即 F 满足：若 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，则 $x_0 \in F$.

证明 假设 F 是 (X,d) 中的一个闭集。设 (x_n) 为 F 中的收敛序列，$x_n \to x_0 \in X$. 我们用反证法来证明 $x_0 \in F$。假设 $x_0 \notin F$，即 $x_0 \in F^c$。由于 F^c 是开集，所以存在 ε_0 使得 $B(x_0,\varepsilon_0) \subset F^c$。根据收敛的定义，存在 k 使得对于所有 $n > k$ 都有 $d(x_n,x_0) < \varepsilon_0$. 这意味着当 $n > k$ 时有 $x_n \in F^c$，跟我们的选取即 "(x_n) 为 F 中的收敛序列" 矛盾。

反之，假设 F 包含其所有序列极限点，即只要 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，就有 $x_0 \in F$. 为证明 F 是闭集我们再次用反证法。假设 F 不是闭集，即 F^c 不是开集，则存在 $x_0 \in F^c$ 使得对任意 n，开球 $B(x_0,1/n)$ 不包含于 F^c. 于是存在 $x_n \in B(x_0,1/n)$ 使得 $x_n \notin F^c$，即 $x_n \in F$。对于这样选出的 x_n，我们有 $x_n \to x_0$。所以 $x_0 \in F$，矛盾。 □

注 1.121. 在第 1.3 节，我们已经看到 $X = \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 中的逐点收敛正是关于逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 的拓扑收敛。现在通过将例 1.119 与命题 1.120 结合起来，我们得出结论：

在 $X = \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 上不存在度量结构使得逐点收敛是度量收敛。

这从侧面说明了引入拓扑结构的必要性：仅研究度量结构是不够的。

¶ 拓扑空间中的闭集

那么在拓扑空间中会发生什么？我们应该分析命题 1.120 的证明，看看什么仍然正确，什么不再正确。在 "将度量拓扑中的证明推广到更一般的拓扑空间" 方面，我们已有丰富的经验：只需用开邻域替换度量下的开球！事实证明，这一招对于命题 1.120 证明的前半部分依然有效：

命题 1.122.（闭集总包含其序列极限点）

设 F 是拓扑空间 X 中的闭子集。如果 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，则极限 $x_0 \in F$。

证明 我们用反证法来证明 $x_0 \in F$. 设 $x_0 \notin F$，即 $x_0 \in F^c$. 由于 F^c 是开集，可以找到 x_0 的开邻域 U，使得 $U \subset F^c$。根据收敛的定义，存在 k 使得对所有 $n > N$ 都有 $x_n \in U$，即对于所有 $n > k$ 有 $x_n \in F^c$，跟命题的条件 $x_n \in F$ 矛盾。。 □

对于命题 1.120的另一半，我们试试重复相应的证明并像上面一样用开邻域替换开球：

> [错误证明] 反之，假设 F 包含其所有序列极限点，即只要 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，就有 $x_0 \in F$. 为证明 F 是闭集我们再次用反证法。假设 F 不是闭集，即 F^c 不是开集，则存在 $x_0 \in F^c$ 使得对于 x_0 的任意开邻域 U，都有 $U \not\subset F^c$，即 $U \cap F \neq \emptyset$。我们取 x_0 的一列越来越小的开邻域 U_n，则存在点列 $x_n \in U_n$ 使得 $x_n \notin F^c$，即 $x_n \in F$。由于我们选取的开邻域 U_n 越来越小，我们得出结论 $x_n \to x_0$，从而 $x_0 \in F$，这与我们选取的 $x_0 \in F$ 矛盾。

看起来是对的，但这肯定是错的，因为我们已经看到了反例 1.119。错在哪？在拓扑学这样的高尚课程中，不允许使用“越来越小的开邻域”之类的模棱两可的词！

¶ 补救措施：可数邻域基

当然，找出错误证明中的谬误之处并不是我们的目标。如果我们进一步思考，我们会发现情况没有那么坏：只要我们能给“越来越小的 x 的开邻域”一个精确的定义，上述“错误的证明”对于相应的拓扑空间其实还是成立的。这里的关键是：首先，我们需要的是一列（即可数个）开邻域，不能太多；其次，这列邻域要能够做到“要多小就可以有多小”，即可以比任何一个给定的邻域小。于是我们定义

定义 1.123.（第一可数性公理）

设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间。如果

> 对于任意 $x \in X$，都存在 x 的可数个开邻域 $\{U_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$，使得 x 的每个邻域 U^x 都包含某个 U_n^x，

则我们称 X 满足**第一可数性公理**，或者说它是 **第一可数的**，简称为 (A1)-**空间**。[a]

[a]也有书把第一可数空间简称为 (C1)-**空间**。

♣

回忆一下第 1.4 节习题 1，上述定义中的集族 $\{U_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ 构成在 x 处的一个**邻域基**。因为它是一个可数族，所以我们称它为 x 处的一个**可数邻域基**。简而言之，

> 第一可数空间是在每个点处都有可数邻域基的拓扑空间。

显然，任意度量空间是第一可数的，因为对于任何 x，$\{B(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 处的一个可数邻域基。由于命题1.122之后的“错误证明”其实是对于第一可数空间的正确证明，我们得到：[18]

命题 1.124.（第一可数空间中闭集的刻画）

在第一可数空间 $(X, \mathscr{T})$ 中，子集 F 是闭合的当且仅当对于任意序列 $\{x_n\} \subset F$ 满足 $x_n \to x_0 \in X$，都有 $x_0 \in F$。

♠

特别地，$(\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}), \mathscr{T}_{p.c.})$ 不是第一可数的。(该结论对不可数个非平凡空间的乘积拓扑均成立。注意在第 1.4 节中我们已经知道 $(\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}), \mathscr{T}_{p.c.}) \simeq (\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathscr{T}_{product})$.)

¶ 极限点

我们将在本课程中一次又一次地看到，反例不仅仅是“反例”，它们往往可以揭示如何发展正确的理论。我们可以从上面的反例中挖掘出更多内容：在例 1.119 中我们看到，任意函数 $g \in A^c$ 都不是包含在子集 A 中的任何函数序列的极限。然而，我们仍然可以

[18]这**确实是** 命题 1.120的一个推广，因为我们将看到，存在 (A1) 空间，其拓扑不能实现为度量拓扑。

认为 g 在 X 中 “与子集 A **无比接近**”，因为对 g 的任何邻域 U，都存在元素 $\tilde{g} \neq g$ 使得 $\tilde{g} \in U \cap A$. 这启发我们给出以下定义：

定义 1.125.（极限点）

设 X 为拓扑空间，$A \subset X$ 为子集。如果对于 x 的任意邻域 U 都有

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset,$$

则我们称 $x \in X$ 是 A 的 **极限点**（或 **聚点**）。我们把 A 的所有极限点的集合称为 A 的 **导集**，并记为 A'，即

$$A' = \{x \mid x \text{ 是 } A \text{ 的一个极限点}\}.$$

♣

注意，在极限点的定义中，我们要求集合 $U \cap A$ 至少包含一个不是 x 本身的点。

注 1.126. 至此我们已经有了序列收敛、序列连续、序列极限点等概念。对于度量空间而言，序列是一个比较好的刻画度量的工具，但对于一般拓扑空间，序列则往往并不那么有效。在一般拓扑空间中，可以类似于在度量空间中使用 “序列” 那样，采用一种叫做 “**网**” 的概念来处理问题（见本节习题）。网是 “序列” 概念的推广，可以定义诸如 **收敛网** 这样的概念，并证明：

- 如果点 x 是 A 的极限点，那么在 A 中存在一个收敛到 x 的网.
- 函数 f 在 x 处是连续的当且仅当它将任意收敛到 x 的网映射到收敛到 $f(x)$ 的网。

例 1.127.

(1) 对于 $\mathbb{R}$ 的子集 $A = (0,1) \cup (1,3) \cup \{5\}$，我们有 $A' = [0,3]$. 注意 5 是 A 的序列极限点，但不是 A 的极限点。

(2) 在 $(X, \mathscr{T}_{discrete})$ 中, 对任意 $A \subset X$ 都有 $A' = \emptyset$.

(3) 考虑 $(X, \mathscr{T}_{cocountable})$，其中 X 是不可数集。则根据定义，对于任意不可数子集 $A \subset X$，我们有 $A' = X$。特别地，对于任何 $x_0 \in X$，我们有 $x_0 \in (X \setminus \{x_0\})'$。然而，我们在第 1.3 节中已经看到，$X$ 中仅有那些 “最终常值的序列” 是收敛序列（且收敛到该常值）。因此 x_0 是 $A \setminus \{x_0\}$ 的极限点，但不是 $A \setminus \{x_0\}$ 的序列极限点。【注意：这给出了另一个 “拓扑收敛 $\neq$ 度量收敛” 的例子。】

由上述例子可见，集合 A 的序列极限点和其极限点之间的关系是微妙的：序列极限点不必是极限点，极限点也不必是序列极限点。下面我们列出导集的几个性质，其证明留作习题：

命题 1.128.（导集的性质）

设 X 为拓扑空间，$A, B \subset X$。则

(1) $\emptyset' = \emptyset$.

(2) $a \in A' \Longrightarrow a \in (A \setminus \{a\})'$.

(3) $A \subset B \Longrightarrow A' \subset B'$.

(4) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(5) $(A')' \subset A \cup A'$.

♠

与极限点的概念相反，我们也可以定义 **孤立点**:

定义 1.129.（孤立点）

设 A 是拓扑空间 X 的子集。对于点 $x \in A$, 如果存在开集 $U \ni x$ 使得 $U \cap A = \{x\}$, 则我们称 x 是 A 的**孤立点**。♣

由定义，点 x 是 A 的孤立点当且仅当 $x \in A$ 但 $x \notin A'$.

¶ 用极限点刻画闭集

借助极限点的概念，我们可以给出一般拓扑空间中闭集的刻画:

定理 1.130.（拓扑空间中闭集的刻画）

拓扑空间 X 中的子集 A 是闭集当且仅当 $A' \subset A$. ♡

证明 如果 A 是闭集，且 $x \in A^c$，则存在 x 的开邻域 U 使得 $U \subset A^c$ 即 $U \cap A = \emptyset$. 所以根据定义，$x \notin A'$。因此 $A' \subset A$.

反之，假设 $A' \subset A$, 且 $x \in A^c$。则 $x \in (A')^c$，即存在 x 的邻域 U 使得

$$U \cap A = U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

所以 $U \subset A^c$。于是由定义，A^c 是开集，即 A 是闭集。 □

换句话说，

$$\boxed{\text{一个集合是闭集当且仅当它包含其所有极限点。}}$$

这就是我们用定义1.125来定义极限点，而不是把序列极限点叫做极限点的原因。

1.5.2 闭包，内点与边界点

¶ 子集的闭包

闭集包含它的所有极限点。如果 A 不是闭集呢？通过仔细观察定理 1.130 证明的后半部分，我们可以证明

定理 1.131.（闭包是闭集）

对于拓扑空间 X 的任意子集 A，并集 $A \cup A'$ 都是闭集。 ♡

证明 （我们重复定理 1.130 证明的后半部分）对任意 $x \in (A \cup A')^c = A^c \cap (A')^c$, 存在 x 的邻域 U 使得

$$U \cap A = U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

这意味着

- $U \subset A^c$.
- $U \subset (A')^c$: 对任意 $y \in U$, 我们必有 $y \notin A'$，因为

$$U \cap (A \setminus \{y\}) \subset U \cap A = \emptyset.$$

所以 $U \subset A^c \cap (A')^c = (A \cup A')^c$，即 $(A \cup A')^c$ 是开集。所以 $A \cup A'$ 是闭集。 □

事实上, $A \cup A'$ 是包含 A 的最小闭集：如果 F 是一个闭集并且 $F \supset A$, 那么

$$F \supset A \cup F' \supset A \cup A'.$$

于是我们得到

推论 1.132.（闭包的最小性）

$A \cup A'$ 是包含 A 的 **最小的闭集**:

$$A \cup A' = \bigcap_{\substack{F\text{是闭集} \\ F \supset A}} F.$$

♡

定义 1.133.（闭包）

对于拓扑空间 X 的子集 A，我们称

$$\overline{A} := \mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$$

为 A 的**闭包**.

♣

¶ 闭包的性质

以下性质比较直观，其证明留作习题:

命题 1.134.（闭包的性质）

设 X 为拓扑空间，$A, B \subset X$. 则

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(5) A 是闭集 $\iff A = \overline{A}$.

(6) 如果 $A \subset B$, 则 $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(7) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(8) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. (该性质对 $A \subset X, B \subset Y$ 也成立.)

♠

注意 (7) 的反包含关系并不成立：不难构造出满足 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ 的例子。

我们给出闭包 $\overline{A}$ 的另一种刻画，它在应用中非常有用。【请将它与 A' 的定义加以比较。】

命题 1.135.（闭包的刻画）

$x \in \overline{A} \iff$ 对任意开集 $U \ni x$, 有 $U \cap A \neq \emptyset$.

♠

证明 $(\Longleftarrow)$ 用反证法。设 $x \notin \overline{A}$，即 $x \in (\overline{A})^c$. 因为 $\overline{A}$ 是闭集, 故存在 x 的开邻域 U 使得 $U \subset (\overline{A})^c$，即 $U \cap \overline{A} = \emptyset$. 特别地，$U \cap A = \emptyset$，矛盾。

$(\Longrightarrow)$ 反之，设存在开集 $U \ni x$, 使得 $U \cap A = \emptyset$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin A'$. 所以 $x \notin \overline{A}$. □

¶ 用闭包刻画连续性

我们也可以使用闭包来刻画映射的连续性。

命题 1.136.（用闭包刻画连续性）

设 X, Y 为拓扑空间。那么映射 $f: X \to Y$ 是连续的当且仅当对于任意 $A \subset X$,

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

证明 假设 $f: X \to Y$ 是连续的，$A \subset X$ 是一个子集。则由连续性，$f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是一个包含 A 的闭集。所以 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$，即 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$。

反之，假设 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ 对任何 $A \subset X$ 成立。要证明 f 是连续的，只需证明 f^{-1}(闭集) = 闭集。我们取任意闭集 $B \subset Y$. 则

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B.$$

所以 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$，即 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ 是闭集。 □

¶ 集合的内部

在第 1.2 节中，我们定义了拓扑空间中一个集合的 **内部** 的概念。我们重述一下：

定义 1.137.（内部）

拓扑空间 X 中的集合 A 的 **内部** 定义为

$$\mathring{A} := \mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid \text{存在开集 } U \ni x \text{ 使得 } U \subset A\}.$$

注意 $\mathring{A}$ 总是一个开集：如果 $x \in \mathring{A}$，那么我们可以找到一个开集 $U \ni x$ 使得 $U \subset A$。根据定义，对于任意 $y \in U$，我们也有 $y \in \mathring{A}$。所以 $U \subset \mathring{A}$，即 $\mathring{A}$ 是开集。

事实上，内部的概念与闭包的概念是对偶的。首先我们有

命题 1.138.（内部的刻画）

设 A 是拓扑空间 X 的子集，则 A 的内部 $\mathring{A}$ 是包含在 A 中的最大开集[a]：

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U\text{是开集}\\ U \subset A}} U.$$

[a] 我们永远不会说出“含于给定集合中的最大闭集”或“包含给定集合的最小开集”这样的说法，因为它们通常不存在。

证明 根据定义，$\mathring{A}$ 是开集并且 $\mathring{A} \subset A$。所以只需证明：如果 $U \subset A$ 是开集，那么 $U \subset \mathring{A}$。但这是显然的：对于任意 $x \in U$ 且 $U \subset A$，根据定义我们有 $x \in \mathring{A}$。所以 $U \subset \mathring{A}$. □

应用第 1.2 节的“开-闭”对偶，我们得到 $\mathring{A}$ 的另一种描述：

命题 1.139.（内部-闭包对偶）

对于拓扑空间 X 中的任意子集 A，都有

$$\mathring{A} = \overline{A^c}^c.$$

证明 作为闭集的补集，$\overline{A^c}^c$ 是开集. 另一方面，对 $A^c \subset \overline{A^c}$ 取补集，我们得到 $\overline{A^c}^c \subset A$. 所以 $\overline{A^c}^c \subset \mathring{A}$.

反之, 如果 $x \in \mathring{A}$, 则存在开集 $U \ni x$ 使得 $U \subset \mathring{A} \subset A$. 所以 $U \cap A^c = \emptyset$, 由此推出 $x \notin \overline{A^c}$, 即 $x \in \overline{A^c}^c$. □

当然我们也可以在等式 $\mathring{A} = \overline{A^c}^c$ 两边的取补集，得到

$$(\mathring{A})^c = \overline{A^c}.$$

¶ 内部的性质

作为内部-闭包对偶性的推论，我们可以将关于闭包 $\overline{A}$ 的命题 1.134 “翻译”为关于内部 $\mathring{A}$ 的以下命题:

命题 1.140.（内部的性质）

设 A, B 是拓扑空间 X 的子集。则

(1) $\mathring{A} \subset A$.

(2) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

(3) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

(4) $\mathring{X} = X$.

(5) A 是开集 $\Leftrightarrow$ $A = \mathring{A}$.

(6) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

(7) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \overset{\circ}{\cup} B)$.

(8) $\mathring{A} \times \mathring{B} = A \overset{\circ}{\times} B$. (对 $A \subset X, B \subset Y$ 成立.) ♠

注 1.141. 你可能已经注意到，命题 1.140 中的 (1) - (4) 正是第 1.2 节中的“内部公理”(I 1)-(I 4)。因此，根据对偶性，我们可以称命题 1.134 中的 (1) - (4) 为“闭包公理”。Kuratowski 首先将它们用作一组替代公理来定义集合上的拓扑结构。[19]让我们再次列出它们:

(K1) $A \subset \overline{A}$.

(K2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(K3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(K4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

¶ 稠密集和疏集

使用闭包和内部，可以定义

定义 1.142.（稠密集和疏集）

设 A 是拓扑空间 X 中的一个子集。

(1) 如果 $\overline{A} = X$，我们称 A 是 X 中的 **稠密集**。

(2) 如果 $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$，我们称 A 是 **疏集**（或 **无处稠密的**）。 ♣

[19]你可能会怀疑 Kuratowski 公理是否真的被数学家用来定义合理的拓扑。答案是肯定的，比如人们用这组公理来定义 C^*-代数的谱上的 Jacobson 拓扑，有兴趣的同学可以自行查阅相关资料。

例 1.143. (稠密集)

(1) 在欧氏拓扑下，$\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

(2) 在 $(X,\mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 中， $A\neq\emptyset\implies\overline{A}=X$.

(3) 可数点集 $\{(n,e^n)\,|n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{C}^2$ 在 $(\mathbb{C}^2,\mathscr{T}_{Zariski})$ 中是稠密的。

(4) (Weierstrass) 全体多项式构成的集合在 $[0,1]$ 上的全体连续函数构成的空间中 (赋以一致度量拓扑) 是稠密的。

(5) 在例 1.119中，我们实际上证明了子集 A 在 X 中是稠密的。

例 1.144. (疏集)

(1) $\mathbb{N}$ 在 $(\mathbb{R},d_{Euclidian})$ 中是疏集。.

(2) Cantor 集在 $[0,1]$ 中是疏集。

¶ 集合的边界

有了闭包和内部的概念，我们还可以定义集合的边界。

定义 1.145.（集合的边界）

拓扑空间 X 中集合 A 的 **边界** ∂A 是

$$\partial A:=\overline{A}\setminus\mathring{A}.$$

根据定义，我们可以将全空间 X 分解为不交并

$$X=\mathring{A}\dot{\bigcup}\partial A\dot{\bigcup}\overline{A}^c.$$

请注意，根据命题 1.139，

$$\partial A=\overline{A}\setminus\mathring{A}=\overline{A}\cap(\mathring{A})^c=\overline{A}\cap\overline{A^c}.$$

所以由命题 1.135，我们有

命题 1.146.（边界点的刻画）

点 x 位于集合 A 的边界 ∂A 上当且仅当对任意包含 x 的开集 U，我们有

$$U\cap A\neq\emptyset\qquad\text{且}\quad U\cap A^c\neq\emptyset.$$

下面我们列出拓扑空间中集合边界的一些性质：（尝试证明它们!）

命题 1.147.（边界的性质）

对于拓扑空间 X 中的子集 A,B，有

(1) ∂A 总是闭集。

(2) $\partial A=\partial A^c$.

(3) $\partial\mathring{A}\subset\partial A,\partial\overline{A}\subset\partial A$.

(4) $\partial\partial A\subset\partial A$.

(5) 如果 A 是开集或者闭集，则 $\partial\partial A=\partial A$.

(6) 如果 A 是开集或者闭集，则 $\mathring{\partial A}=\emptyset$. (从而对于开集或闭集，$\partial A$ 是疏集.)

(7) $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$.

¶ 拓扑空间“范畴”：不同的描述

最后我们从宏观的角度重新认识我们在过去几节中所做的事情，以此来结束本章。

定义 1.148.（范畴）

一个**范畴** $\mathcal{C}$ 包含

1. 一个类 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，其中的元素称为 **对象**，
2. 一个类 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$，其中的元素称为对象间的 **态射**，满足
   - 每个态射 f 都有一个 **始对象** $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和一个 **终对象** $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
     - 我们记 $f : X \to Y$ 并称“f 是从 X 到 Y 的态射”.
     - 我们将从 X 到 Y 的态射全体记为 $\mathrm{Mor}(X, Y)$. [a]
   - 态射 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 的复合是态射 $g \circ f : X \to Z$，且满足
     (a). (结合性) 设 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ 和 $h : Z \to W$, 则
     $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$
     (b). (单位元) 对 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 存在 **单位态射** $\mathrm{Id}_X : X \to X$, 使得对于任意态射 $f : Z \to X$ 和 $g : X \to Y$，都有
     $$\mathrm{Id}_X \circ f = f \quad 且 \quad g \circ \mathrm{Id}_X = g.$$

[a] 对于一些对象 X 和 Y, 可能并不存在从 X 到 Y 的态射, 此时 $\mathrm{Mor}(X, Y) = \emptyset$.

♣

例 1.149.

(1) 拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{TOP})$ = 所有的拓扑空间,
- 态射是拓扑空间之间的连续映射。

(2) 向量空间范畴 $\mathcal{VECT}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{VECT})$ = 所有的向量空间,
- 态射是向量空间之间的线性映射。

(3) 群范畴 $\mathcal{GROUP}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{GROUP})$ = 所有的群,
- 态射是群同态。

(4) 集合范畴 $\mathcal{SET}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET})$ = 所有集合，（“所有集合”不是集合，所以我们用“类”这个词）
- 态射是“关系”[20]

(5) 单独一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 也是一个范畴:[21]
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET})$ = X 中的所有开子集,
- 态射是“包含映射”。

[20] 我们称 $A \times B$ 的任意子集为从 A 到 B 的一个“关系”，记为 $A \Rightarrow B$；两个关系 $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow C$ 的复合关系是集合 $\{(a, c) \mid 存在 b \in B 使得 (a, b) \in “A \Rightarrow B” 且 (b, c) \in “B \Rightarrow C”\}$.

[21] 这是定义 **Grothendieck 拓扑**的第一步。Grothendieck 拓扑是拓扑概念的扩展。它不是我们在本课程中所定义和研究的在 **集合** 上的结构，而是通过公理化“开覆盖”的概念而得到的在 **范畴**上的结构。

我们在第 1.2 节中提到，有多个不同的公理体系，都可以被用来“定义”拓扑空间。事实上，至今为止我们不仅列出了至少五种不同的“定义”拓扑结构的方法，而且在每种公理体系里，我们都给出了映射连续性的刻画。换句话说，我们至少有五种方式来构建拓扑空间的“范畴”！我们把这些方式列在下面表格里：

	对象：拓扑空间	态射：连续映射
描述拓扑的方式	集合满足的公理	映射满足的条件
开集	(O1) - (O3)	f^{-1}(开集) = 开集.
闭集	(C1) - (C3)	f^{-1}(闭集) = 闭集.
邻域	(N1) - (N4)	$f^{-1}(f(x)$ 的邻域$)$ = x 的邻域.
闭包	(K1) - (K4)	$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
内部	(I 1) - (I 4)	习题：找条件

注 1.150. 除了以上五种方式外，其它可能描述拓扑的方式还有

- 用网的收敛来刻画拓扑和连续性（参见注记1.126以及习题），
- 用“导集运算”将一个集合 A 映为其导集 A'（该运算要满足 5 个公理，见命题 1.128），
- 用“边界运算”将一个集合 A 映为其边界 ∂A（需要哪些公理呢?）。