第 2 章 紧性、可数性与分离性

2.1 拓扑空间的各种紧性

在拓扑学中，"局部性质" 这个词往往表示 "在点的邻域内成立的性质"。在第 1.5 节的习题中我们看到了 "局部有限性" 的定义，在本章和下一章中我们将定义和研究更多的 "局部性质"。从某种意义上说，"局部性" 是拓扑的根本，这一点在拓扑学的定义中就已经明确显现出来：我们的研究对象，拓扑空间，是由邻域结构确定的；拓扑空间之间的态射，连续映射，也是由映射在每个点的邻域内的性态决定的。

另一方面，"整体性质" 才是拓扑学的灵魂，无论是拓扑学的 "分析部分" 还是 "几何部分"，都离不开对拓扑空间或其中特定子集的整体信息的刻画。例如所有的曲面在每个点的局部都跟平面圆盘在拓扑上是一样的，但整体上看曲面却是五花八门的。

在从分析到几何到数论等各个数学分支中，都存在各种从局部信息过渡到整体信息的方式，我们不妨把这些方式统称为 "局部-整体原理"，而该原理甚至在物理、生物等科学领域也多有呈现。我们在第 1.3 节和第 1.5 节的习题中已经看到了 "有限性" 是如何帮助我们从局部过渡到整体。在本章中我们将会看到，在拓扑学中，紧性（及其推广），作为一种广义的有限性，是如何让我们从局部信息中获取全局信息的。从某种意义上来说，紧性是最重要也最有用的拓扑性质。

2.1.1 紧性的定义与例子

¶ 闭区间 $[0,1]$ 紧性的表现形式

我们知道，在欧氏空间中，一个集合是紧集当且仅当它是有界闭集。为了理解 "紧性是广义的有限性" 这一论断，让我们比较一下有限集，$[0,1]$ 和看似类似却非紧的 $(0,1]$：

	$X=$ 有限集	$X=[0,1]$	$X=(0,1]$
设 $f:X\to\mathbb{R}$ 是连续函数，则	f 必有界，并达到其最大/最小值。	**(最值性质)** f 必有界，并达到其最大/最小值。	f 可以无界或有界但取不到极值。
设 $x_1,x_2,\cdots$ 是 X 中的点列，则	(x_n) 必有常值子列 $x_{n_1}=x_{n_2}=\cdots=c$。	**(Bolzano-Weierstrass 定理)** (x_n) 必有收敛子列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots\to c\in X$.	例如 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$ 没有收敛子列
设 A 是 X 的一个无限子集，则	——	A 必有一个极限点 $c\in X$.	$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$ 没有极限点
设 $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$，其中 U_α 是开集，则	必有有限个子集 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_k}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$.	**(Heine-Borel 定理)** 必存在有限个子集 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_k}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i}$.	$\bigcup_{n=1}^\infty(\frac{1}{n},1)$ 没有有限子覆盖.
设 $F_1\supset F_2\supset\cdots$ 是一列递降闭集，则	必有 $\bigcap_k F_k\neq\emptyset$	**(Cantor 闭集套定理)** 必有 $\bigcap_k F_k\neq\emptyset$.	交集可以为空，例如 $\bigcap_k(0,\frac{1}{k}]=\emptyset$.

¶ 紧性的各种定义

我们知道，对于欧氏空间而言，“紧”跟“有界闭”是等价的，而上表中 $[0,1]$ 的五种性质都是紧性的不同表现形式。然而对于拓扑空间而言，一方面我们并没有“有界闭”这样的概念[1]。下面我们将把表中紧性的五个表现形式推广到一般的拓扑空间。跟欧氏空间不同的地方在于，我们将会得到各种不同的紧性概念！

从“局部-整体原理”的角度来看，表中的 Haine-Borel 定理是最便于使用的紧性，因为它可以把一族“局部”所承载的信息化归为有限个“局部”所承载的信息，从而也最完美地诠释了“紧性是有限性的推广”这一论断。因此，人们将把 Heine-Borel 定理抽象出来，作为“标准”紧性的定义，而把别的性质抽象出来叫做“某某紧性”。[2]

我们从一些关于覆盖的定义开始：

定义 2.1.1.（覆盖）

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$ 为子集。

(1) 若子集族 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 满足 $A\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$，则称 $\mathscr{U}$ 为 A 的一个 **覆盖**.

(2) 若覆盖 $\mathscr{U}$ 是有限族，则称 $\mathscr{U}$ 为一个 **有限覆盖**。

(3) 若覆盖 $\mathscr{U}$ 中的元素 U_α 都是开集，则称 $\mathscr{U}$ 为一个 **开覆盖**.

(4) 若 $\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ 都是覆盖，且 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$，则称为覆盖 $\mathscr{V}$ 是覆盖 $\mathscr{U}$ 的 **子覆盖**.

(5) 若 $\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ 都是覆盖，且对任意 $V\in\mathscr{V}$，都存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $V\subset U$，则称覆盖 $\mathscr{V}$ 为覆盖 $\mathscr{U}$ 的**加细**.

♣

下面我们定义拓扑空间中不同的紧性概念：[3]

定义 2.1.2.（三种不同的紧性）

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间。

(1) 如果 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 都有有限子覆盖，即存在 $\mathscr{U}$ 中有限个集合 $\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots,U_{\alpha_k}\}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$，则我们称 X 是 **紧的**.

(2) 如果 X 中任意点列 $x_1,x_2\cdots\in X$ 都有收敛子列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots\to x_0\in X$，则我们称 X 是 **序列紧的**.

(3) 如果 X 中的任意无限子集 S 都有极限点，则我们称 X 是 **极限点紧的** .

(4) 设 $A\subset X$ 是一个子集，如果 $(A,\mathscr{T}_{subspace})$ 在子空间拓扑下是紧的/列紧的/极限点紧的，那么我们说 A 是 X 中的**紧集/列紧集/极限点紧集**。

♣

[1]我们将会看到，虽然在度量空间中，我们可以定义集合的“有界性”，但该性质也不是一个拓扑概念，从而在一般度量空间中“有界闭”跟“紧性”是不等价的。

[2]紧性的历史：1906 年 Fréchet 通过将 Bolzano-Weierstrass 定理推广至函数空间，首次在形式上引入了“紧”的概念。这种紧性后来被推广为“序列紧性”或者更一般的“极限点紧性”，常见于分析中的存在性定理如 Arzela-scoli 定理或者 Peano 存在性定理等，在偏微分方程等方面有广泛应用。紧性作为广义有限性的“有限开覆盖”定义，最早是由 Alexandrov 和 Urysohn 在 1929 年引入。这种紧性最初被称为“bicompactness”，但很快就因为其定义简洁（仅依赖于拓扑最本质的概念即“开集”）、适用面广（直接体现了有限性）而成为了占主导地位的“紧性”。需要注意的是，在部分分支如代数几何中，由“有限开覆盖”定义的紧性被称为“quasi-compact”，而“compact”则特指本节最后提到的“紧 Hausdorff 空间”。

[3]我们这里只给出了上表中的三个不同方面的抽象推广。剩余两个的抽象推广分别被称为“可数紧”和“伪紧”，将在习题以及后文中出现。

根据定义，我们有

命题 2.1.3. (紧子集的刻画)

拓扑空间 X 中的子集 A 是紧子集当且仅当：对 X 中的任意满足 $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ 的开集族 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$，都存在有限子族 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_k} \in \mathcal{U}$ 使得 $A \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\alpha_j}$.

¶ 紧集的例子

例 2.1.4. 我们给出紧集的一些例子:

(1) 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，我们有

$$\text{有界闭} \iff \text{紧} \iff \text{列紧} \iff \text{极限点紧}.$$

(2) 考虑赋以余有限拓扑的拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{\text{cofinite}})$，则

- X 是紧的:

  设 $X \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. 任取 α_1. 根据定义，U_{α_1} 是开集，因此它的补集 $X \setminus A_{\alpha_1}$ 是有限集，于是可以在 $\mathscr{U}$ 中选取有限多个集合来覆盖它。

- X 也是列紧的:

  由例1.3.2，若序列 $x_1, x_2, \cdots$ 中没有点出现无限次，那么整个序列会收敛到任意一点；若该序列中至少有一个点出现无限次，那么我们就得到一个由该点组成的“常值”子序列。

- X 也是极限点紧的:

  若 $S \subset X$ 是无限集，则对 X 中任意开集 U 都有 $U \cap S \neq \emptyset$，故 $S' = X$.

(3) 考虑乘积拓扑空间 $X = (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{discrete}}) \times (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{trivial}})$.

- X 不是紧的:

  取 $U_n = \{n\} \times \mathbb{N}$. 则 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X 的开覆盖，但没有有限子覆盖。

- X 也不是列紧的:

  令 $x_n = (n, 1)$，则序列 $\{x_n\}$ 没有收敛子列。

- 但是，X 是极限点紧的:

  事实上，对于任意 $S \neq \emptyset$，我们都有 $S' \neq \emptyset$，因为只要 $(m_0, n_0) \in S$ 且 $n_1 \neq n_0$，就有 $(m_0, n_1) \in \{(m_0, n_0)\}' \subset S'$。

¶ 各种紧性的关系

不难看出“极限点紧”是三者中最弱的:

命题 2.1.5. (紧，序列紧 $\Longrightarrow$ 极限点紧)

设 X 为任意拓扑空间。若 X 是紧的或是列紧的，则 X 是极限点紧的.

证明 先设 X 是紧集。若 $S \subset X$ 且 S 没有极限点，则 S 是闭集，因为 $S' = \emptyset \subset S$. 对于任意 $a \in S$，因为 $a \notin S'$，故存在开集 $U_a \subset X$ 使得 $S \cap U_a = \{a\}$. 于是 $\{S^c, U_a \mid a \in S\}$

是 X 的一个开覆盖. 根据紧性，存在 $a_1,\cdots,a_k \in S$ 使得

$$X = S^c \cup (\bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}).$$

由此可知

$$S = S \cap X = (\bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}) \cap S = \{a_1,\cdots,a_k\}$$

是一个有限子集。

再设 X 是列紧的且 $S \subset X$ 是任意无限集. 任取无限序列 $\{x_1,x_2,\cdots\} \subset S$ 使得对任意 $i \neq j$，都有 $x_i \neq x_j$. 由列紧的定义，存在子列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots \to x_0 \in X$. 于是

$$x_0 \in \{x_{n_1},x_{n_2},\cdots\}' \subset \{x_1,x_2,\cdots\}' \subset S'.$$

所以 $S' \neq \emptyset$. □

我们在后文中将会举例说明，对于拓扑空间而言，“紧”与“列紧”互不蕴含。在下一节我们还将证明，对于度量空间，“紧”、“列紧”、“极限点紧”都是等价的，但它们并不等价于“有界闭”。

¶ 用闭集刻画紧性

应用“开闭对偶”，我们可以将“紧集的开覆盖定义”转换为用闭集给出的等价定义：

$X=\bigcup_\alpha U_\alpha$, U_α 为开集 $\Longrightarrow \exists U_{\alpha_i}, X=\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$.	$\Leftrightarrow$	$\emptyset=\bigcap_\alpha F_\alpha$, F_α 为闭集 $\Longrightarrow \exists F_{\alpha_i}, \emptyset=\bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i}$.	$\Leftrightarrow$	对任意有限族 $\{F_{\alpha_1},\cdots,F_{\alpha_k}\}$ 都有 $\bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i} \neq \emptyset$ $\Longrightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$.

所以我们得到

命题 2.1.6. (用闭集刻画紧性：有限交性质)

一个拓扑空间 X 是紧的当且仅当它满足以下性质：

[有限交性质] 如果 $\mathscr{F}=\{F_\alpha\}$ 是任意一族闭集，且任意有限交集

$$F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_k} \neq \emptyset,$$

则 $\cap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$. ♠

作为推论，我们得到

推论 2.1.7. (闭集套定理)

设 X 是紧的，且

$$X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

是非空闭集的降链，则 $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. ♡

¶ 用基和子基刻画紧性

因为开集可以由基里的元素生成，所以很自然地，可以通过“基覆盖”来刻画紧性：

命题 2.1.8.（用拓扑基刻画紧性）

设 $\mathcal{B}$ 是 $(X,\mathcal{T})$ 的一个拓扑基，则 X 是紧的当且仅当 X 的任意基覆盖 $\mathcal{U}\subset\mathcal{B}$ 都存在有限子覆盖。

证明 设 X 是紧的，且 $\mathcal{U}\subset\mathcal{B}$ 是 X 的一个基覆盖，则 $\mathcal{U}$ 也是 X 的一个开覆盖，从而存在有限子覆盖。

反之，设 X 的任意基覆盖都存在有限子覆盖，而 $\mathcal{U}$ 是 X 的任意开覆盖。由拓扑基的定义，对于任何 $x\in X$, 都存在 $U^x\in\mathcal{U}$ 和 $U_x\in\mathcal{B}$ 使得

$$x\in U_x\subset U^x.$$

由于 $\{U_x\}$ 是 X 的基覆盖，所以存在 $U_{x_1},\cdots,U_{x_m}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. 因此对于 $U^{x_1},\cdots,U^{x_n}\in\mathcal{U}$，我们有 $X=\bigcup_{i=1}^n U^{x_i}$, 即 X 是紧的。 □

一个自然的问题是：可否把“基覆盖”进一步减弱为“子基覆盖”？答案是肯定的：

定理 2.1.9.（Alexander 子基定理）

设 $\mathcal{S}$ 是 $(X,\mathcal{T})$ 的一个子基. 则 X 是紧的当且仅当 X 的任意子基覆盖 $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}$ 都存在有限子覆盖。

然而，令人惊讶的是，这个定理的证明要困难得多，而且它等价于选择公理！我们将在第 2.3 节证明这个定理。

2.1.2 紧集的性质

¶ 紧性和连续映射

在三种不同的紧性中，紧性和列紧性更为重要，原因之一在于

命题 2.1.10.（紧与列紧的不变性）

设 $f:X\to Y$ 是连续映射。

(1) 如果 $A\subset X$ 是紧集，则 $f(A)$ 在 Y 中也是紧集。

(2) 如果 $A\subset X$ 是列紧集，则 $f(A)$ 在 Y 中也是列紧集。

证明 (1) 设 A 是紧集. 给定 $f(A)$ 的任意开覆盖 $\mathcal{V}=\{V_\alpha\}$，其原像 $\mathcal{U}=\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ 是 A 的一个开覆盖。根据 A 的紧性，存在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^k f^{-1}(V_{\alpha_i})$. 因此 $f(A)\subset\bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i}$, 即 $f(A)$ 也是紧集。

(2) 对 $f(A)$ 中的任意点列 $y_1,y_2,\cdots$，存在 A 中的点列 $x_1,x_2,\cdots$ 使得 $f(x_i)=y_i$. 因此 A 是列紧的，所以存在收敛子列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots\to x_0\in A$. 又因为 f 是连续映射，所以 $y_{n_1},y_{n_2},\cdots\to f(x_0)\in f(A)$. 所以 $f(A)$ 是列紧集。 □

然而，极限点紧的空间在连续映射下的的像集不一定是极限点紧的：

例 2.1.11. 我们刚刚看到的，乘积空间 $X=(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{discrete}})\times(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 是极限点紧的. 我们也知道投影映射

$$\pi_1:(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{discrete}})\times(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{trivial}})\to(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{discrete}})$$

是连续的。然而，像集 $(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{discrete}})$ 不是极限点紧的，因为对于任何具有离散拓扑的空间中的任何子集，都有 $A'=\emptyset$。

由于 $\mathbb{R}$ 中的子集（在通常的拓扑下）是紧的当且仅当它是列紧的，也当且仅当它是有界闭的，我们立即得到

推论 2.1.12.（最值性质）

设 $f:X\to\mathbb{R}$ 为任意连续映射。如果 $A\subset X$ 在 X 中是紧的或列紧的，则 $f(A)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界，且存在 $a_1,a_2\in A$ 使得 $f(a_1)\le f(x)\le f(a_2)$ 对于所有 $x\in A$ 都成立。♡

因为商映射都是连续的，我们有

推论 2.1.13

任何紧/列紧空间的商空间仍然是紧/列紧的。♡

所以，特别地，$\mathbb{RP}^n$ 和 Klein 瓶是紧的。

¶ 逆紧映射

一般来说，紧集在连续映射下的原像不再是紧集。这样的例子很容易构造。

定义 2.1.14.（逆紧映射）

设 X,Y 为拓扑空间。对于映射 $f:X\to Y$，如果 Y 中任意紧集 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 在 X 中是紧集，则称 f 为 **逆紧**映射。♣

注 2.1.15. 我们为什么要研究逆紧映射？这里给出一个原因：回想一下，拓扑空间之间的态射是连续映射，因为它们将开集拉回到开集。另一方面，通常紧集的拓扑性质更容易研究（因为我们有“局部到全局”原则）。因此，一些拓扑不变量只对紧的或“紧支的”对象定义。对于后一种情况，正确的“态射”应该是连续的逆紧映射，因为逆紧映射可以将紧支的对象拉回到紧支的对象。例如，在研究非紧空间的紧支的上同调群时，就要考虑逆紧映射。

¶ 紧空间的子空间

像往常一样，我们想从已有的紧空间甚至非紧空间构造新的紧空间。容易想到的第一个备选操作是考虑紧空间的子空间。然后，很容易看出紧空间的子空间有可能是非紧的，例如 $(0,1)$ 是 $[0,1]$ 的非紧子空间。

我们可以仔细考虑这个问题：$[0,1]$ 的哪些子集仍然是紧的？我们知道 $\mathbb{R}$ 中一个集合是紧的当且仅当它是有界且闭的。如果 A 是 $[0,1]$ 的子集，则它自动是有界的。因此，要使子集 $A\subset[0,1]$ 是紧集，只需要 A 是闭集就足够了。

事实证明，对于更一般的紧拓扑空间，子集的闭性也足够保证其紧集：

命题 2.1.16. （紧集的闭遗传性）

设 A 是拓扑空间 X 的闭子集。

(1) 如果 X 是紧集，则 A 也是紧集。

(2) 如果 X 是列紧集，则 A 也是列紧集。

(3) 如果 X 是极限点紧集，则 A 也是极限点紧集。

证明 (1) 设 $\mathscr{U}$ 是 A 的开覆盖，则 $\mathscr{U}\cup\{A^c\}$ 是 X 的开覆盖，故存在有限子覆盖 $U_1,\cdots,U_m,A^c$. 于是

$$A\subset U_1\cup\cdots\cup U_m,$$

即 $\{U_1,\cdots,U_m\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的有限子覆盖。

(2) A 中的任意点列 $x_1,x_2,\cdots$ 也是 X 中的点列，因此存在收敛子列 $x_{n_k}\to x_0\in X$. 因为 A 是闭集所以 $x_0\in A$.

(3) 设 S 是 A 的无限子集，则在 X 中有 $S'\neq\emptyset$. 又 $S'\subset A'\subset A$, 所以在 A 同样有 $S'\neq\emptyset$. □

¶ 紧性和 Hausdorff 性质

需要指出的是，一个紧集的紧子集不一定是闭集。例如，根据定义 $(X,\mathscr{T}_{trivial})$ 是紧空间，而且它的任意子集都是紧集，但除了 X 和 $\emptyset$ 外其它子集都不是闭集。

定义 2.1.17. （Hausdorff 性质）

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间。如果对于任意 $x_1\neq x_2\in X$, 都存在开集 $U_1\ni x_1$ 和 $U_2\ni x_2$ 使得 $U_1\cap U_2=\emptyset$，则我们称 X 是 **Hausdorff 空间**。

Hausdorff 性质是应用最广泛的分离性质之一。例如，可以很容易地证明

命题 2.1.18

在 Hausdorff 空间中，任何收敛序列的极限是唯一的。

尽管紧性和 Hausdorff 性质看起来完全不同，但它们在以下的意义下彼此"对偶"：

命题 2.1.19. （紧性与 Hausdorff 性的对偶）

(1) 如果 $(X,\mathscr{T})$ 是紧空间，则

  (a) X 中的闭子集都是紧集。

  (b) 如果 $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$, 则 $(X,\mathscr{T}')$ 是紧空间。

  (c) $(X,\mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 总是紧空间。

(2) 如果 $(X,\mathscr{T})$ 是 Hausdorff 空间, 则

  (a) X 中的每个紧子集都是闭集。

  (b) 如果 $\mathscr{T}'\supset\mathscr{T}$, 则 $(X,\mathscr{T}')$ 是 Hausdorff 空间.

  (c) $(X,\mathscr{T}_{\text{discrete}})$ 总是 Hausdorff 空间.

证明 我们已经证明了 (1)(a)。验证 (1)(b)、(1)(c) 和 (2)(b)、(2)(c) 是很简单的。

所以还有待证明 (2)(a): 设 $A \subset X$ 是紧集, $x_0 \in X \setminus A$. 由 Hausdorff 性质，对任意 $y \in A$, 存在开集 $U_y \ni x_0$ 和 $V_y \ni y$ 使得 $U_y \cap V_y = \emptyset$. 因为 $A \subset \cup_{y \in A} V_y$, 所以由紧性，存在 $y_1, \cdots, y_m$ 使得 $A \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. 于是

$$U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m} \subset X \setminus (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}) \subset X \setminus A,$$

从而 $X \setminus A$ 是开集，即 A 是闭集。 □

于是紧拓扑“趋于偏弱”，Hausdorff 拓扑“趋于偏强”。因此，从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射往往具有很好的性质。比如，我们有下面几个性质，其证明均留作习题:

引理 2.1.20.（闭映射引理）

设拓扑空间 X 是紧的，Y 是 Hausdorff 的. 则任意连续映射 $f : X \to Y$ 既是闭映射，也是逆紧映射。 ♡

闭映射引理有一个非常有用的推论，常被用于判定同胚:

推论 2.1.21.（一个有用的同胚判据）

设拓扑空间 X 是紧的，Y 是 Hausdorff 的. 则任意连续双射 $f : X \to Y$ 是同胚。 ♡

特别地，紧 Hausdorff 空间形成了一类非常特殊的拓扑空间:

命题 2.1.22.（紧 Hausdorff 拓扑之间不可比较）

如果 $\mathscr{T}$ 是 X 上的紧 Hausdorff 拓扑，且 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑，满足 $\mathscr{T}_1 \subsetneqq \mathscr{T} \subsetneqq \mathscr{T}_2$，则 $(X, \mathscr{T}_1)$ 不是 Hausdorff 的，而 $(X, \mathscr{T}_2)$ 不是紧的。 ♠

换而言之，紧 Hausdorff 拓扑是一种恰到好处的拓扑，如同宋玉的邻人东家之子那般，“增一个开集则太强，减一个开集则太弱”！（注意同一个集合上可能有很多不同的、两两不可比较的紧 Hausdorff 拓扑。）