2.2 乘积空间的紧性：Tychonoff 定理

2.2.1 有限积的紧性

¶ 管形邻域引理

为了证明有限个紧空间的乘积空间的紧性，我们需要如下的“管形邻域引理”。请仔细体会证明中是如何利用紧性从局部过渡到整体的：

引理 2.2.1.（管形邻域引理） 设 $x_0 \in X$，B 是 Y 的紧子集。则 $\{x_0\} \times B$ 在 $X \times Y$ 中的任意开邻域 N 都包含 $\{x_0\} \times B$ 的一个“管形邻域”，即存在 $\{x_0\}$ 的开邻域 U 以及 B 的开邻域 V，使得

$$\{x_0\} \times B \subset U \times V \subset N.$$

♡

证明 对于任意 $(x_0, y) \in \{x_0\} \times B \subset N$，存在 X 中的开集 $U^y_{x_0}$ 及 Y 中的开集 V_y 使得

$$(x_0, y) \in U^y_{x_0} \times V_y \subset N.$$

因为 $B = \bigcup_{y \in B}\{y\} \subset \bigcup_{y \in B} V_y$，由 B 的紧性，存在 $y_1, \cdots, y_k \in B$ 使得

$$B \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_k} =: V.$$

设 $U = \bigcap_{i=1}^k U^{y_i}_{x_0}$, 则 U 是开集且对任意 $1 \le i \le k$，都有 $x_0 \in U \subset U^{y_i}_{x_0}$，从而

$$N \supset \bigcup_y (U^y_{x_0} \times V_y) \supset \bigcup_{1 \le i \le k} (U^{y_i}_{x_0} \times V_{y_i}) \supset \bigcup_{1 \le i \le k} (U \times V_{y_i}) = U \times V.$$

□

注意若 B 是非紧的，则很容易构造一个反例：

例 2.2.2. 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 中, 我们有

$$\{0\} \times \mathbb{R} \subset N = \{(x, y) \mid |xy| < 1\},$$

但不存在 0 的开邻域 U 使得 $U \times \mathbb{R} \subset N$.

使用“管形邻域引理”的结论以及方法，可得更一般的“方形邻域引理”：

引理 2.2.3.（方形邻域引理） 设 A 是 X 的紧子集，B 是 Y 的紧子集，则对 $A \times B$ 在 $X \times Y$ 中的任意开邻域 N，都存在 A 在 X 中的开邻域 U 以及 B 在 Y 中的开邻域 V，使得

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

♡

证明 对任意 $x_0 \in A$, 由管形邻域引理, 存在开集 U_{x_0} 和 V_{x_0} 使得

$$\{x_0\} \times B \subset U_{x_0} \times V_{x_0} \subset N.$$

因为 A 是紧的，存在 $x_1, \cdots, x_m \in A$ 使得

$$A \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m} =: U.$$

令 $V = \bigcap_{i=1}^m V_{x_i}$, 则 $B \subset V$ 且 V 是开集，而且

$$A \times B \subset U \times V \subset \bigcup_{1 \le i \le m} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subset N.$$

□

¶ 有限乘积空间的紧性

下面我们应用管形邻域引理证明

命题 2.2.4. （乘积的紧性）

设 A 是 X 的紧子集，B 是 Y 的紧子集，则 $A\times B$ 是 $X\times Y$ 的紧子集。

证明 设 $\mathscr{W}$ 是 $A\times B$ 的任意开覆盖. 对于任意 $x\in A$, 由定义易知 $\{x\}\times B$ 是紧集, 故存在 $W_1^x,\cdots,W_k^x\in\mathscr{W}$ 使得

$$\{x\}\times B\subset W_1^x\cup\cdots\cup W_k^x.$$

根据管形邻域引理，在 X 中存在包含 x 的开集 U_x 使得

$$U_x\times B\subset W_1^x\cup\cdots\cup W_k^x.$$

因为 $\{U_x\,|\,x\in A\}$ 是 A 的开覆盖，由紧性，存在 $x_1,\cdots,x_m$ 使得 $A\subset U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m}$. 根据上面的讨论，对于 $1\le i\le m$, 我们已经找到 $W_1^{x_i},\cdots,W_{k(i)}^{x_i}\in\mathscr{W}$ 使得

$$U_{x_i}\times B\subset W_1^{x_i}\cup\cdots\cup W_{k(i)}^{x_i}.$$

因此

$$A\times B\subset(U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m})\times B\subset\bigcup_{1\le i\le m,1\le j\le k(i)}W_j^{x_i},$$

即 $\{W_j^{x_i}\,|\,1\le i\le m,1\le j\le k(i)\}$ 是 $\mathscr{W}$ 的有限子覆盖。 □

由归纳法，我们立刻得到

推论 2.2.5. （有限积的紧性）

若 $A_1,\cdots,A_k$ 分别是 $X_1,\cdots,X_k$ 中的紧集，则 $A_1\times\cdots\times A_k$ 在 $X_1\times\cdots\times X_k$ 中紧。

¶ Tychonoff 定理

现在我们陈述点集拓扑学最重要、最有用的定理之一：Tychonoff 定理[4]。

定理 2.2.6. （Tychonoff 定理）

如果对任意 α，X_α 都是紧空间，则乘积空间 $(\prod_\alpha X_\alpha,\mathscr{T}_{product})$ 也是紧空间。

乍一看，Tychonoff 定理是反直觉的：紧性是一种广义的“有限性”，那么无限甚至不可数个拓扑空间的乘积怎么可能是紧的?! 仔细思考一下，会发现这件事情也并不难理解：乘积拓扑是一个很弱的拓扑（“使得投影映射连续的最弱的拓扑”），而紧拓扑也是“趋于偏弱”的拓扑。从定义上来看，生成乘积拓扑的子基元素 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 具有很好的“有限性”：仅在一个分量即 α 分量上要求元素落在集合 U_α 中，而对其它分量的元素没有任何限制。进一步地，基元素（作为子基元素的有限交）依然具有类似的“有限性”。作为

[4]吉洪诺夫（A. N. Tychonov, 也被英译为 Tikhonov 等，1906-1993），前苏联/俄罗斯数学家、地球物理学家，在拓扑学、泛函分析、数学物理、不适定问题等领域有突出贡献。在 1930 年, Tychnoff 首次对于闭区间的乘积空间证明了这一定理，之后 1935 年他陈述了该定理的一般版本（但该定理第一个正式发表的证明是 Cech 在 1937 年给出的）。事实上，乘积拓扑的定义最早就是由 Tychonoff 在 1935 年这篇论文中引入的。

对比，很容易看出，一般情况下，无限多空间的乘积空间在赋箱拓扑时不是紧致的，主要原因在于箱拓扑的开集太多，而箱拓扑的基元素不具有类似的有限性。

为了体会到无限乘积的紧性，我们先看两个可数无限乘积空间的例子：

例 2.2.7. 回想一下，

$$X^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in X\}.$$

我们在第 1.4 节已经知道, $X^{\mathbb{N}}$ 上的乘积拓扑等同于 $\mathcal{M}(\mathbb{N}, X)$ 上的逐点收敛拓扑。

(a) 取 $X = \{0, 2\}$，即仅含两点的集合，于是 $X^{\mathbb{N}}$ 是由 0 和 2 构成的序列所组成的空间。注意到每个 0、2 序列都对应于在 Cantor 集的构造中出现的一个闭集降链，从而对应于 Cantor 集合中的一个点。（我们也可以把该 0、2 序列通过实数的三进制表示对应于 $[0, 1]$ 中的数，而这些书恰为落在 Cantor 集中的数。）可以证明（留作习题）：

命题 2.2.8.（作为乘积空间的 Cantor 集）

乘积拓扑空间 $(\{0, 2\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 同胚于 Cantor 集 C.

因此，无穷乘积拓扑空间 $(\{0, 2\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 是紧的！

(b) 取 $X = [0, 1]$，于是 $X^{\mathbb{N}}$ 中的元素是由 $[0, 1]$ 中的数所构成的数列 $a = (a_1, a_2, \cdots)$. 下面我们利用对角线技巧，证明 $X^{\mathbb{N}}$ 是列紧的：

证明 考虑 $X^{\mathbb{N}}$ 中的一列元素 $a^1, a^2, \cdots$，其中 $a^n = (a_1^n, a_2^n, \cdots)$. 因为 a_1^n 是 $[0, 1]$ 中的一个数列，由 $[0, 1]$ 的列紧性，存在点列 a^n 的子列 $a^{n(1,i)}$，使得数列 $a_1^{n(1,i)}$ 收敛于某个实数 a_1^∞. 继续对数列 $a_2^{n(2,i)}$ 用 $[0, 1]$ 的列紧性，可知存在点列 $a^{n(1,i)}$ 的子列 $a^{n(2,i)}$，使得数列 $a_2^{n(2,i)}$ 收敛于某个实数 a_2^∞. 继续这个过程，我们得到一个各元素都是点列的方阵

$$\begin{matrix} a^{n(1,1)} & a^{n(2,1)} & a^{n(3,1)} & \cdots \\ a^{n(1,2)} & a^{n(2,2)} & a^{n(3,2)} & \cdots \\ a^{n(1,3)} & a^{n(2,3)} & a^{n(3,3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

其中每一列是左边列的子列。最后，取该方阵的对角线子列 $a^{n(i,i)}$. 则由构造可知这是点列 (a^n) 在乘积拓扑（即逐点收敛拓扑）下的收敛子列。□

我们在下一节将会看到，对于度量空间而言，列紧性与紧性是等价的。另外我们在习题中将会证明，可数个紧度量空间的乘积空间，其乘积拓扑事实上是一个度量拓扑。因此，$X^{\mathbb{N}}$ 不仅是列紧的，而且是紧的。

用完全同样的论证可得

命题 2.2.9.（列紧空间的可数乘积依然列紧）

可数多个列紧空间的乘积（赋乘积拓扑）仍然是列紧的。

¶ 紧 v.s. 列紧

例 2.2.10. 作为 Tychonoff 定理的推论，我们举例说明 “紧 $\not\Leftrightarrow$ 列紧”。

(a) **[紧 $\not\Rightarrow$ 列紧]**：根据 Tychonoff 定理，$([0,1]^{[0,1]}, \mathscr{T}_{product}) = (\mathcal{M}([0,1],[0,1]), \mathscr{T}_{p.c.})$ 是紧空间。下证它不是列紧的。

证明 定义 $f_n : [0,1] \to [0,1]$ 为将 x 映射到其二进制表示中的第 n 位 [5]的映射。我们断言 f_n 没有收敛子列。事实上，对任意子列 f_{n_k}，如果取 $x_0 \in [0,1]$ 为这样的数：对每个 k，其二进制表示的第 n_{2k} 位为 0 而第 n_{2k+1} 位为 1，则有

$$f_{n_{2k}}(x_0) = 0 \quad 且 \quad f_{n_{2k+1}}(x_0) = 1.$$

因此 f_{n_k} 在 x_0 处不收敛，从而不是逐点收敛的。 □

(b) **[列紧 $\not\Rightarrow$ 紧]** 设 A 是 $(\mathcal{M}([0,1],[0,1]), \mathscr{T}_{p.c.})$ 的由仅在可数个点上非零的函数组成的子集，即

$$A = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid 仅对可数多 x \in [0,1] 有 f(x) \neq 0\}.$$

下证 A 是列紧的但不是紧的：

证明 先说明A是列紧的：给定 A 中的任意点列 (f_n)，则集合 $S = \{x \mid \exists n \text{ 使得} f_n(x) \neq 0\}$ 是可数集，而在研究函数列 f_n 的逐点收敛时，我们可以认为 $f_n \in [0,1]^S$. 但是，由命题2.2.9，$[0,1]^S$ 是列紧的。因此 f_n 具有收敛子列。

再说明A不是紧的：对任意 $t \in [0,1]$，如果我们记

$$A_t := \{f \in A \mid f(t) = 1\},$$

则 $\{A_t\}$ 是 A 中的一族闭集（因为赋值映射是连续的，而 $A_t = \mathrm{ev}_t^{-1}(1)$），且

$$\bigcap_{t\in[0,1]} A_t = \emptyset.$$

但对于任意有限个点 $t_1, \cdots, t_k \in [0,1]$，我们有

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_{t_i} \neq \emptyset.$$

所以 A 不满足有限交性质，从而不是紧的。 □

2.2.2 Tychonoff 定理的证明

¶ Tychonoff 定理的证明

根据定义，在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是由如下子基生成的：

$$\mathcal{S} = \bigcup_\alpha \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ 是开集}\},$$

其中 $\pi_\alpha : \prod_\beta X_\beta \to X_\alpha$ 是典范投射。所以使用下述 Alexander[6]子基定理来证明 Tychonoff 定理是自然的：

定理 2.2.11.（Alexander 子基定理）

$(X, \mathscr{T})$ 是紧的当且仅当 X 的任意“子基覆盖”具有有限子覆盖。 ♡

[5]若 x 是一个有限二进制小数 $x = 0.\overline{a_1 \cdots a_n 1}$，我们取其“无限循环小数表示” $x = 0.\overline{a_1 \cdots a_n 0111 \cdots}$.

[6]亚历山大 (James Waddell Alexander II, 1888-1971)，美国拓扑学家，在同调论、上同调论、纽结理论等方面都做出了奠基性的工作。他在 1924 年发现的“Alexander 带角球”（见本书后文）揭示了高维与二维的差别。

【Tychonoff 定理的证明】

证明 设 $\mathscr{A}$ 是 $X=\prod_\alpha X_\alpha$ 的一个子基覆盖。换言之，$\mathscr{A}$ 形如

$$\mathscr{A}=\{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid U\in\mathscr{A}_\alpha\},$$

其中 $\mathscr{A}_\alpha\subset\mathscr{T}_\alpha$ 是 X_α 中的一族开集。因为 $\mathscr{A}$ 是 $X=\prod_\alpha X_\alpha$ 的覆盖，所以存在 α_0 使得 $\mathscr{A}_{\alpha_0}$ 是 X_{α_0} 的覆盖，否则

$$\begin{aligned}\forall\,\alpha, X_\alpha\setminus\bigcup\nolimits_{U\in\mathscr{A}_\alpha}U\neq\emptyset &\Longrightarrow \prod_\alpha(X_\alpha\setminus\bigcup\nolimits_{U\in\mathscr{A}_\alpha}U)\neq\emptyset\\ &\Longrightarrow \mathscr{A}\text{ 不是 }X\text{ 的覆盖!}\end{aligned}$$

于是由 X_{α_0} 的紧性, $\mathscr{A}_{\alpha_0}$ 具有有限子基覆盖 $\{U_1,\dots,U_m\}$. 因此 $\{\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_1),\cdots,\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_m)\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子基覆盖。所以由 Alexander 子基定理, X 是紧空间。 □

¶ 选择公理及其等价陈述

令人惊讶的是，Alexander 子基定理的证明非常不平凡：我们需要用到**选择公理**!

定理 2.2.12.（选择公理）

对于集合 X 的任意一个由非空子集构成的集族 $\mathscr{A}$，都存在一个映射 $f:\mathscr{A}\to X$，使得对任意 $A\in\mathscr{A}$，都有 $f(A)\in A$。这样的 f 被称为集族 $\mathscr{A}$ 的一个**选择函数**. ♡

在数学中，“选择公理”看起来像一个双面怪兽 [7]. 一方面，使用选择公理，我们可以得到很多漂亮的结果，包括

- 每个向量空间都有 Hamel 基，每个含幺环都有极大理想，每个域都有代数闭包⋯⋯
- Hahn-Banach 定理，泛函分析最核心的结果之一，广泛用于构造特定的线性泛函，
- 任意连通图都有生成树.

另一方面，选择公理也蕴含了很多违反直觉甚至匪夷所思的结果：

- $\mathbb{R}$ 中存在不可测子集，实数加法群与复数加法群同构，⋯⋯
- **Banach-Tarski 悖论**：可以将 3 维单位球 $B^3(1)\subset\mathbb{R}^3$ 分解为有限多块，然后仅使用旋转和平移，将这些块拼成两个大小和 $B^3(1)$ 一样的单位球。

选择公理有许多等价的陈述方式，其中一些看起来非常反直觉，而另一些看起来是“显然成立的”，例如我们在上面给出的 Tychonoff 定理的证明过程中已经偷偷使用过下面

[7]选择公理的最佳解释之一是由英国哲学家、数学家、逻辑学家 Russell（罗素）给出来的：

“从无数双袜子中选择一只袜子时需要选择公理，但对于鞋子来说，则不需要选择公理。”

一个广为流传的笑话来自美国数学家 Jerry Bona，

“选择公理显然是正确的，良序定理显然是错误的，至于 Zorn 引理，谁能看出对错呢?”

此外，维基百科还记载了一个让人哭笑不得的故事，

1924 年波兰与美国数学家、逻辑学家 Tarski 证明了如下定理：

选择公理和“每个无限集 A 具有与 $A\times A$ 相同的基数”是等价的。

他把文章投给数学期刊 Comptes Rendus，但两位审稿人 Fréchet 和 Lebesgue 都拒绝发表这一定理. Fréchet 的审稿意见是“两个众所周知的 [真] 命题之间的相互蕴涵并不是一个新结果”，而 Lebesgue 的意见则是“两个假命题之间的相互蕴涵是没有意义的”。最后该文章发表在了 Fundamenta Mathematicae 杂志上。

这个选择公理的等价陈述：

定理 2.2.13.（选择公理的等价陈述）

对于任意一族非空集合 X_α，其笛卡尔积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 也是非空的。♡

选择公理的另外两个广泛使用的等价陈述是**良序定理**和 **Zorn 引理**。为了叙述它们，我们需要

定义 2.2.14.（上界与极大元）

设 $(P, \preceq)$ 是一个非空偏序集.

(1) 对于 P 的非空子集 Q，若 $c \in P$ 满足"对于 Q 中的任意元素 a，都有 $a \preceq c$ 成立"，则我们称 c 是 Q 的一个 **上界**. 类似地，我们可以定义**下界**的概念。

(2) 如果 $c \in P$ 且不存在 P 中的元素 $b \neq c$ 使得 $b \preceq c$，则我们称 c 是 P 中的**极大元**. 类似地，我们可以定义**极小元**的概念。♣

定理 2.2.15.（Zorn 引理）

设非空偏序集 $(\mathcal{P}, \preceq)$ 的每个全序子集在 $\mathcal{P}$ 中都有一个上界，则 $\mathcal{P}$ 必有极大元。♡

从某种意义上说，Zorn 引理是"打包的超限归纳法"：为了证明某个偏序集中极大元的存在性，一种做法是假设极大元不存在，然后用超限归纳法推出矛盾。而 Zorn 引理则将这个繁琐的过程（及其所需要的条件）打包在一起，成为一个便于使用的工具。[8]

最后我们叙述良序定理：

定义 2.2.16.（良序集）

设 $(P, \preceq)$ 是一个全序集.

(1) 若 Q 是 P 的子集，c 是 Q 的一个上界，且 $c \in Q$，则我们称 c 是 Q 的**最大元**. 类似地，我们可以定义**最小元**的概念。

(2) 若 P 的任意非空子集都有最小元，则我们称 P 是 **良序集**。♣

根据定义，$\mathbb{N}$（在标准序下）是良序集，但 $\mathbb{Z}$ 在标准序下不是良序集。当然，不难在 $\mathbb{Z}$ 上定义一个良序。但是，要想在实数集 $\mathbb{R}$ 构造良序则是很困难的。事实上，选择公理最初是 1904 年由德国数学家、逻辑学家 Zermelo 引入的，其目的就是用选择公理这个"无可非议的逻辑原理"来证明任何集合都存在良序：

定理 2.2.17.（良序定理）

任意集合上都存在一个全序关系，使之成为一个良序集。♡

[8]菲尔兹奖获得者，英国数学家 Gowers 在"如何使用 Zorn 引理"一文中总结道：

"当你在一步步构造某个数学对象，但发现

- 即使归纳性地重复了无穷多次构造，你的构造过程依然未结束，
- 看似没有什么可以让你停止继续构造，

那么 Zorn 引理可能可以帮到你。"

¶ Alexander 子基定理的证明

证明 定理的一半是显然的。我们只需要证明：**如果 X 的任意子基覆盖具有有限子覆盖，那么 X 是紧的**。我们采用反证法。假设 X 不是紧的，但任意子基覆盖都具有有限子覆盖. 下面我们通过 Zorn 引理构造一个没有有限子覆盖的子集覆盖。为此，我们令

$$\boxed{\text{科}}^{9} = \{\mathscr{A} \subset \mathscr{T} \mid \mathscr{A} \text{ 是 } X \text{ 的开覆盖但没有有限子覆盖}\} \in 2^{2^{2^X}}.$$

那么

- 因为 X 不是紧的，$\boxed{\text{科}} \neq \emptyset$.
- "集合间的包含关系 $\subset$" 是$\boxed{\text{科}}$上的一个偏序。

于是 $(\boxed{\text{科}}, \subset)$ 是一个非空偏序集。取 $\boxed{\text{科}}$ 的任意一个非空全序子集 ㊖[10]，那么

(1) $\mathscr{E} = \bigcup_{\mathscr{A} \in ㊖} \mathscr{A} \subset \mathscr{T}$,

(2) $\mathscr{E}$ 是 X 的开覆盖，

(3) $\mathscr{E}$ 是 ㊖ 的一个上界。

下证 $\mathscr{E} \in \boxed{\text{科}}$：如若不然，则存在 $\mathscr{E}$ 的有限子覆盖 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$. 根据构造，$\exists \mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n \in$ ㊖ 使得 $A_i \in \mathscr{A}_i$. 因为㊖ 是全序集，$\exists k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得

$$\mathscr{A}_i \preceq \mathscr{A}_k, \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

因此 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{A}_k$, 即 $\mathscr{A}_k$ 具有有限子覆盖，矛盾！

所以由 Zorn 引理，$\boxed{\text{科}}$ 有最大元 $\mathscr{A}$.

现在考虑子基 $\mathcal{S}$. 我们断言

断言 2.2.18

$\mathcal{S} \cap \mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖。 ♡

让我们暂且假设断言成立。换句话说，我们得到了 X 的覆盖 $\mathcal{S} \cap \mathscr{A}$。一方面，因为 $\mathscr{A}$ 没有有限的子覆盖，这个覆盖不可能有有限的子覆盖。但另一方面，因为它是一个子基覆盖，所以它一定有有限的子覆盖。矛盾！这样就完成了证明。 □

证明 [断言2.2.18的证明] 对任意 $x \in X$, $\exists A \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in A$. 根据子基的定义，$\exists S_1, \cdots, S_m \in \mathcal{S}$ 使得 $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_m \subset A$. 下面我们证明

$$\exists 1 \leq k \leq m \ \text{ 使得} S_k \in \mathscr{A}.$$

这意味着 $S_k \in \mathcal{S} \cap \mathscr{A}$ 且 $x \in S_k$, 从而完成了证明。

再次应用反证法。如若不然，则对 $\forall 1 \leq k \leq m$,

$$\mathscr{A} \prec \mathscr{A}_k := \mathscr{A} \cup \{S_k\}.$$

---

[9]这是一个新字符，读音为 *wǒ kē*. 在本课程中，我们
- 用 a, b, x 等小写字母来表示 X 中的元素；
- 用 A, B, U 等大写字母表示 X 中的子集，即 2^X 中的元素；
- 用花体大写字母 $\mathscr{A}, \mathscr{T}$ 等来表示 X 中的子集族，即 2^{2^X} 中的元素；
- 创造字符来表示 X 中子集族的集合, 即 $2^{2^{2^X}}$ 中的元素。

[10]读音：*nǐ kē*

因为 $\mathscr{A}$ 是$\boxed{科}$的最大元，我们有 $\mathscr{A}_k \notin \boxed{科}$，即 $\mathscr{A}_k$ 有有限子覆盖 $\{S_k, A_{k,1}, \cdots, A_{k,j(k)}\}$，其中每个 $A_{k,i} \in \mathscr{A}$. 因此

$$X = \bigcap_{k=1}^{m}(S_k \cup A_{k,1} \cup \cdots \cup A_{k,j(k)}) = (S_1 \cap \cdots \cap S_m) \cup (\bigcup_{k,j} A_{k,j}),$$

这里我们用到如下事实：$(A \cup B) \cap (C \cup D) \subset (A \cap C) \cup B \cup D$. 因此

$$\{A, A_{k,j} \mid 1 \le k \le m, 1 \le j \le j(k)\}$$

是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖。矛盾！ □

¶ Tychonoff 定理 $\Longrightarrow$ 选择公理

在证明 Tychonoff 定理时，选择公理起到了重要作用。可能有人会问：是否可以不使用选择公理来证明 Tychonoff 定理？答案是否定的。事实上，不难证明 Tychonoff 定理蕴含了选择公理的等价陈述，定理2.2.13，从而 Tychonoff 定理等价于选择公理：

命题 2.2.19.（Kelley: Tychonoff 定理 $\Longrightarrow$ 选择公理）

假设 Tychonoff 定理成立，则定理2.2.13成立，即

$$X_\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \Longrightarrow \prod_\alpha X_\alpha \neq \emptyset.$$

证明 令 $\widetilde{X_\alpha} := X_\alpha \cup \{\infty_\alpha\}$，并赋予拓扑 $\widetilde{\mathscr{T}_\alpha} = \{\emptyset, X_\alpha, \{\infty_\alpha\}, \widetilde{X_\alpha}\}$，则 $\widetilde{X_\alpha}$ 是紧的. 由 Tychonoff 定理，$X = \prod_\alpha \widetilde{X_\alpha}$ 在乘积拓扑下是紧的. 注意到 $\{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)\}$ 是 X 中的一族闭集，且任意有限交

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(X_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(X_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(X_{\alpha_k}) \supset X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_k} \{\infty_\alpha\},$$

即 $\{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)\}$ 满足有限交性质。于是由 X 的紧性得

$$\bigcap_\alpha \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) \neq \emptyset.$$

根据定义，$\cap_\alpha \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$ 中的任意元素都是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的一个元素。 □

2.2.3 阅读材料：Tychonoff 定理的一些应用

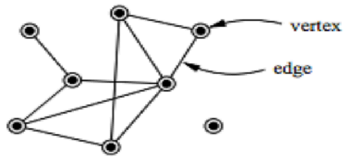
我们在这里给出 Tychonoff 定理的几个“非拓扑”应用。

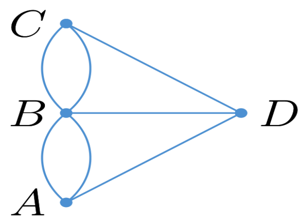
¶ 应用 1: 图染色

定义 2.2.20.（图）

在图论中，**图** G 是指一个有序对 $G = (V, E)$，其中

- V 是一个集合，其中的元素被称为 **顶点**，
- $E \subset V \times V$，其中的元素被称为 **边** (可以是“多重集”).





定义 2.2.21.（子图与染色）

设 $G=(V,E)$ 是一个图。

(1) 若图 $\widetilde{G}=(\widetilde{V},\widetilde{E})$ 满足 $\widetilde{V}=V$, $\widetilde{E}\subset E$，则称 $\widetilde{G}$ 是 G 的一个 **子图**.[a]

(2) 若子图 $\widetilde{G}$ 的边集 $\widetilde{E}$ 是有限集，则称之为一个 **有限子图**。

(3) 设 $k\in\mathbb{N}$. 若映射 $f:V\to[k]:=\{1,2,\cdots,k\}$ 满足

$$\text{对任意边}\,\overline{ab}\in E,\ \text{都有}\, f(a)\neq f(b),$$

则称 f 为图 G 的一个 **k-染色**.

[a] 在子图的定义中，通常仅要求 $\widetilde{V}\subset V$ 而不是 $\widetilde{V}=V$. 但就我们下面要讨论的内容而言，这两者是等价的，而且要求 $\widetilde{V}=V$ 会更方便.

♣

图的着色问题是图论里面最经典也最重要的问题之一。1951 年，荷兰数学家 N. de Bruijn 和匈牙利数学家 P. Erdös [11] 应用超限归纳法证明了无限图的着色问题可以被化归为其有限子图的着色问题。我们这里给出由美国数学家 Gottschalk 发现的用 Tychonoff 定理的简单证明:

定理 2.2.22.（de Bruijn-Erdös 定理）

设 G 是任意图 (其中 V 可以是无限集), $k\in\mathbb{N}$. 如果 G 的任意有限子图是 k-可染色的, 则 G 是 k-可染色的.

♡

证明 赋予 $[k]=\{1,2,\cdots,k\}$ 离散拓扑并考虑乘积空间

$$X:=\prod_V[k]=\{f:V\to[k]\}.$$

因为 $[k]$ 是紧的, 由 Tychonoff 定理知 X 也是紧的。对任意子集 $F\subset E$, 我们定义

$$X_F:=\{f:V\to[k]\mid f\ \text{是}(V,F)\ \text{的}\ k\text{-染色}\}.$$

[11] 埃尔德什（Paul Erdös, 1913-1996），20 世纪最多产的数学家，最著名的“问题解决者”，同时也是提出最多数学猜想的人之一，1983/1984 年 Wolf 奖获得者（同年的另一个获奖者是陈省身先生）。他的研究领域包括离散数学，图论，数论，数值分析，逼近论，集合论和概率论等。虽然他并不算一名拓扑学家，但依然对拓扑学做出过重要贡献：他在 1940 年首次给出了完全不连通的非零维空间的例子，这类空间后来被称为 Erdös 空间。他一生发表了大约 1,525 篇数学论文（对比一下：Euler 发表了大约 800 篇论文），有 511 名不同的合作者。数学家可以通过“合作距离”形成一个度量空间：如果两位数学家是研究论文的共同作者，则他们的合作距离为 1；如果他们不是任何研究论文的共同作者，但有另一个数学家是两者的合著者，则两位数学家的协作距离为 2；等等。任何数学家都有一个 **Erdös 数**：他与 P. Erdös 的合作距离。

我们首先注意到，如果 $F=\{\overline{ab}\}$，即仅仅含一条边的集合，则 X_F 是闭的，因为此时

$$\begin{aligned} X_{\{\overline{ab}\}} &= \{f : V \to [k] \mid f(a) \neq f(b)\} \\ &= \bigcup_{1\le i\ne j\le k} \{f : V \to [k] \mid f(a)=i, f(b)=j\} \\ &= \bigcup_{1\le i\ne j\le k} (\pi_a^{-1}(i) \cap \pi_b^{-1}(j)) \end{aligned}$$

是闭集的有限并。进一步，由 $X_{F_1} \cap X_{F_2} = X_{F_1 \cup F_2}$ 可知对于任意 $F \subset E$,

$$X_F = \bigcap_{\overline{ab}\in F} X_{\overline{ab}}$$

是一族闭集的交集，从而依然是闭集。

下面考虑闭集族

$$\mathscr{F} = \{X_F \mid F \subset E \text{ 是有限集}\}.$$

对于任意有限子族 $F_1,\cdots,F_m$，因为 $F_1\cup\cdots\cup F_m$ 是有限集，我们有

$$X_{F_1} \cap X_{F_2} \cap \cdots \cap X_{F_n} = X_{F_1\cup\cdots\cup F_m} \neq \emptyset.$$

于是 $\mathscr{F}$ 满足“任意有限交均非空”这一性质。因为 X 是紧的，由紧集的有限交刻画，

$$\bigcap_{X_F\in\mathscr{F}} X_F \neq \emptyset.$$

根据定义，$\cap_{X_F\in\mathscr{F}} X_F$ 中的任意元素 f 都是 G 的一个 k-染色。 □

由证明过程不难发现，该定理可以被推广到“每个顶点都有一个有限色集”的情形。

¶ 应用 2: $\mathbb{Z}$ 的子集中的等差数列

拓扑学也可以被用来研究组合数论中的问题。

定义 2.2.23.（划分）

设 S 是一个集合，我们称 S 的一个无交并分解

$$S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_c$$

为它的一个 c-**划分**. ♣

换而言之，S 的一个 c-划分就是视 S 为一个边集为空集的图时，图 $(S,\emptyset)$ 的一个 c-着色.

1927 年，荷兰数学家 Van der Waerden 证明了如下结果：

定理 2.2.24.（Van der Waerden 定理）

对于任意正整数 c 和 k，存在 $N=N(c,k)$[a]使得 $[N]=\{1,\cdots,N\}$ 的每个 c-划分

$$[N] = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_c$$

中，都有一个子集 S_i 包含了一个长度为 k 的等差数列.

[a] Ramsey 理论中的一个重要问题就是确定最小的 $N(c,k)$. 目前对一般情形所知的最佳上界是前文中提到的英国数学家 Gowers 在 2001 年给出来的：$N(c,k) \le 2^{2^{c^{2^{2^{k+9}}}}}$. ♡

利用紧性，人们往往可以建立与“有限系统的定量结果”等价的“相应的无限系统的定性结果”。比如，我们有

定理 2.2.25.（Van der Waerden 定理, 无限定性版本）

对于自然数集的任意划分

$$\mathbb{N} = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_c,$$

一定存在某个 S_j，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$，S_j 都包含一个长度为 k 的等差数列。♡

我们来利用紧性证明定理2.2.24与定理2.2.25是等价的：

【定理2.2.24⟹ 定理2.2.25】这是显然的。

【定理2.2.25⟹ 定理2.2.24】

证明 假设定理2.2.25成立但定理2.2.24不成立。换言之，存在 k, c，使得任意 $[n]$ 都有划分

$$[n] = S_{n,1} \sqcup \cdots \sqcup S_{n,c},$$

其中每个 $S_{i,j}$ 都不包含长度为 k 的等差数列。我们定义一列映射 $f_n : \mathbb{Z} \to [c]$,

$$f_n(i) = \begin{cases} j, & 若 1 \le i \le n 且 i \in S_{n,j}, \\ 1, & 若 i > n. \end{cases}$$

根据命题2.2.9，f_n 有逐点收敛子列 $f_{n_l} \to f_\infty$. 由映射 $f_\infty : \mathbb{N} \to [c]$ 可得 $\mathbb{N}$ 的一个 c-划分

$$\mathbb{N} = S_{\infty,1} \sqcup \cdots \sqcup S_{\infty,c}.$$

根据定理2.2.25，一定有某个 $S_{\infty,j}$ 包含一个长度为 k 的等差数列，$a_1, \cdots, a_k$.

另一方面，因为在 $[c]$ 上的拓扑是离散拓扑，对任意 i，存在 $m(i)$ 使得当 $l > m(i)$ 时有 $f_{n_l}(i) = f_\infty(i)$. 取 $l = \max(m(a_1), \cdots, m(a_k), a_1 + \cdots + a_k)$，我们有

$$f_{n_l}(i) = f_\infty(i), \quad 1 \le i \le a_1 + \cdots + a_k.$$

根据映射 f_{n_l} 的定义，这意味着对于 n_l 的划分 $[n_l] = S_{n_l,1} \sqcup \cdots \sqcup S_{n_l,c}$ 中，$S_{n_l,j}$ 里面含有一个长度为 k 的等差数列，矛盾。 □

1977 年，Furstenberg[12] 开创性地应用拓扑（遍历论）方法证明了 van der Waerden 定理的推广，Szemerédi 定理[13]，并进一步用该方法给出了 Szemeredi 定理的多维推广。Furstenberg 的方法被总结为“Furstenberg 对应原理”，即组合数论里面“关于整数集合的‘大子集’的结果”与拓扑动力系统里面“关于保测动力系统的‘大子集’的结果”之间的对应。下面我们陈述 van der Waerden 定理的对应的拓扑版本，并证明它跟上述数论版本的等价性。

[12] 弗斯腾伯格（Hillel Fursterberg，1935-），美籍以色列数学家，沃尔夫奖 (2006/7 年) 和阿贝尔奖 (2020 年) 得主，主要贡献是“在群论、数论和组合学中开创性地使用概率和动力系统方法”。我们在第 1.2 节习题中已经看过他的对于素数无限的拓扑证明：该证明发表于 1955 年，当时他还是 Yeshiva 大学的一名本科生。

[13] 该定理最早是 Erdös 和 Turán 于 1936 年提出的猜想，最终在 1975 年被 Szemerédi 证明：

Szemerédi 定理: 若 $\mathbb{N}$ 的子集 A 具有正密度，即

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \cdots, n\}|}{n} > 0,$$

则对任意正整数 k，A 包含无限多个长度为 k 的算术级数。

定理 2.2.26.（van der Waerden 定理，拓扑动力系统版本）

设 X 是紧拓扑空间，$T: X \to X$ 是同胚，而 $\{V_1, \cdots, V_c\}$ 是 X 的一个开覆盖. 则 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ 和开集 $V \in \{V_1, \cdots, V_c\}$ 使得

$$V \cap T^{-n}V \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}V \neq \emptyset.$$

下面我们证明定理2.2.26与定理2.2.25是等价的。不难看出，定理2.2.25等价于如下的[14]

定理 2.2.27.（Van der Waerden 定理，无限定性 $\mathbb{Z}$ 版本）

对于整数集的任意划分

$$\mathbb{Z} = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_c,$$

一定存在某个 S_j，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$，S_j 都包含一个长度为 k 的等差数列。

下面证明

【定理2.2.27$\Longrightarrow$ 定理2.2.26】

证明 取定一个点 $x_0 \in X$. 定义映射 $f: \mathbb{Z} \to [c]$ 如下：若 $T^n(x_0) \in V_i$ 且对于任意 $j < i$，都有 $T^n(x_0) \notin T_j$，则令

$$f(n) = i.$$

由定理2.2.27, 存在 j 使得 $S_j = f^{-1}(j)$ 包含长度为 k 的算术级数 $m, m+n, m+2n, \cdots, m+(k-1)n$，即 $f(m+in) = j, 0 \leq i \leq k-1$. 于是

$$T^{m+in}(x_0) \in V_j, \qquad 0 \leq i \leq k-1,$$

从而

$$T^m(x_0) \in V_j \cap T^{-n}V_j \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}V_j.$$

□

【定理2.2.26$\Longrightarrow$ 定理2.2.27】

证明 再次赋予 $[c]$ 离散拓扑. 由 Tychonoff 定理, 空间

$$\widetilde{X} = \prod_{\mathbb{Z}} [c] = \{f: \mathbb{Z} \to [c]\}$$

是紧空间. 注意到 $\mathbb{Z}$ 的任意 c-划分都对于 $\widetilde{X}$ 中的一个元素。

考虑 $\widetilde{X}$ 上的“右移”映射

$$T: \widetilde{X} \to \widetilde{X}, \qquad T(f)(n) = f(n-1).$$

则 T 是连续映射，因为我们有

$$T^{-1}(\pi_n^{-1}(i)) = \pi_{n-1}^{-1}(i),$$

而 $\{\pi_n^{-1}(i)\}$ 是 $\widetilde{X}$ 上的乘积拓扑的一个子基. 类似地可以验证“左移”映射 T^{-1} 也是连续的。所以 T 是同胚。

[14]定理2.2.25与定理2.2.27的等价性：显然，若定理2.2.25成立则定理2.2.27自动成立。反之，若定理2.2.25不成立，即存在 $\mathbb{N}$ 的一个划分，其中每个子集里都没有长度为 k 的等差数列，则不难构造 $\mathbb{Z}$ 的一个划分，其中每个子集都没有长度为 $2k+1$ 的等差数列。

设 $f\in\widetilde{X}$ 是与定理 2.2.27中的划分所对应的映射. 考虑 $\widetilde{X}$ 的闭子集

$$X=\overline{\{T^nf\mid n\in\mathbb{Z}\}}=\overline{\{\cdots,T^{-2}f,T^{-1}f,f,Tf,T^2f,\cdots\}}.$$

由定义，X 是紧拓扑空间 $\widetilde{X}$ 中的一个闭集，从而也是紧的。注意到 $T(X)$，作为闭集在同胚映射下的像，是 $\widetilde{X}$ 的闭子集，而

$$T(X)\supset\{T^nf\mid n\in\mathbb{Z}\},$$

于是我们得到 $T(X)\supset X$. 将 T 替换为 T^{-1}, 同理可得 $T^{-1}(X)\supset X$. 于是我们证明了

$$T(X)=X.$$

由推论 1.61 知 $T:X\to X$，作为同胚映射 $T:\widetilde{X}\to\widetilde{X}$ 在子空间 X 上的限制，是连续映射。同理 $T^{-1}:X\to X$ 连续，故 $T:X\to X$ 是同胚。

最后，对于每个 $i\in[c]$, 我们令

$$V_i=\{f\in\widetilde{X}\mid f(0)=i\}=\pi_0^{-1}(i).$$

则 V_i 在 $\widetilde{X}$ 中是开集，且构成 X 的开覆盖。由定理 2.2.26, $\forall k\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}$ 和 $V_j\in\{V_i\mid 1\le i\le c\}$ 使得

$$(V_j\cap T^{-n}V_j\cap\cdots\cap T^{-(k-1)n}V_j)\cap X\neq\emptyset.$$

由于 $V_j\cap T^{-n}V_j\cap\cdots\cap T^{-(k-1)n}V_j$ 在 $\widetilde{X}$ 中是开集，而 $X=\overline{\{T^{-n}f\mid n\in\mathbb{Z}\}}$. 所以存在 m 使得

$$T^{-m}f\in V_j\cap T^{-n}V_j\cap\cdots\cap T^{-(k-1)n}V_j,$$

即

$$f\in T^mV_j\cap T^{m-n}V_j\cap\cdots\cap T^{m-(k-1)n}V_j.$$

因此

$$f(m)=f(m-n)=\cdots=f(m-(k-1)n)=j.$$

换言之,S_j 包含长为 k 的等差数列 $m,m-n,\cdots,m-(k-1)n$. □

¶ 应用 3: Banach-Alaoglu 定理

第三个应用是泛函分析。回想一下，**赋范向量空间**是指向量空间 X 同时被赋予了范数结构，即函数 $\|\cdot\|:X\to[0,+\infty)$ 使得对任意 $x,y\in X$ 和任意 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有

- $\|x\|\ge 0$, 且$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;
- $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$;
- $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$.

在任意赋范向量空间 $(X,\|\cdot\|)$ 上, 容易验证 $d(x,y):=\|x-y\|$ 定义了一个度量结构。所以我们总可以赋予 X 度量拓扑，并讨论连续映射。特别地，我们记

$$X^*:=\{l:X\to\mathbb{C}\mid l\text{ 是连续的（复）线性映射}\}.$$

空间 X^* 也是线性空间，并且在 X^* 上面我们可以定义范数

$$\|l\| := \sup_{\|x\|=1} |l(x)|.$$

新的赋范向量空间 $(X^*, \|\cdot\|)$ 称为 $(X, \|\cdot\|)$ 的 **对偶空间**. 它又是一个度量空间，所以我们可以讨论像闭单位球这样的概念

$$\overline{B^*} := \{l \in X^* \mid \|l\| \le 1\}.$$

不幸的是，在大多数应用中，赋范向量空间及其对偶空间是无限维的，因此闭单位球相对于通常的度量拓扑不是紧的。

当然，不紧的原因是度量拓扑太强，即包含太多的开集。在例 1.97 中，我们分别在 X 和 X^* 上引入了两种更弱的拓扑：X 上的弱拓扑和 X^* 上的弱-$*$ 拓扑。X 上的弱拓扑是使所有线性泛函 $l \in X^*$ 连续的最弱拓扑，而 X^* 上的弱 $*$ 拓扑是使所有赋值映射 ev_x 连续的最弱拓扑。从定义很容易看出，如果我们将 X^* 视为 $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ 的子集，则弱-$*$ 拓扑是逐点收敛拓扑。由于 $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ 上的逐点收敛拓扑可以等同于 $\mathbb{C}^X$ 上的乘积拓扑，因此不难猜到闭单元球 $\overline{B^*}$ 在弱-$*$ 拓扑下是紧的：

定理 2.2.28.（Banach-Alaoglu 定理）

设 X 是赋范向量空间，则对偶空间 X^* 中的闭单位球 $\overline{B^*}$ 在弱-$*$ 拓扑下是紧的。♡

证明 基本想法是将 X^* 中的闭单位球 $\overline{B^*}$ 与

$$Z = \prod_{x \in X} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \|x\|\} \subset \mathbb{C}^X,$$

中的闭子集等同起来，这里我们赋 Z 乘积拓扑，所以 Z 是紧空间。

如同我们上面所解释的，我们可以视 X^* 为 $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ 的子空间，因此只要 $l \in X^*$ 满足 $\|l\| \le 1$，就可以等同于 Z 中的一个元素. 反之，Z 中的一个元素 f 属于 X^* 中的闭单位球 $\overline{B^*}$ 当且仅当它是线性的，即对任意 $x, y \in X$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad 且 \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

换言之，Z 中的元素 $f \in \overline{B^*}$ 当且仅当它属于集合

$$\begin{aligned} D &= \{f \in Z \mid \mathrm{ev}_{x+y}(f) = \mathrm{ev}_x(f) + \mathrm{ev}_y(f), \quad \mathrm{ev}_{\alpha x}(f) = \alpha \mathrm{ev}_x(f), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{x,y,\alpha} (\mathrm{ev}_{x+y} - \mathrm{ev}_x - \mathrm{ev}_y)^{-1}(0) \cap (\mathrm{ev}_{\alpha x} - \alpha \mathrm{ev}_x)^{-1}(0). \end{aligned}$$

由赋值映射的连续性，D 是 Z 中的一个闭子集。由于 Z 是紧的，所以 D 也是紧的。可以详细验证上面的等同是 $(\overline{B^*}, \mathscr{T}_{\text{weak}*})$ 和 $(D, \mathscr{T}_{product})$ 之间的同胚。所以 $\overline{B^*}$ 在弱-$*$ 拓扑下是紧的。 □