2.3 度量空间中的紧性

2.3.1 度量空间的拓扑与非拓扑性质

¶ 度量空间的一些拓扑性质

设 (X,d) 为度量空间，其上的度量拓扑 $\mathscr{T}_d$ 由基

$$\mathcal{B}=\{B(x,r)\mid x\in X,r\in\mathbb{R}_{>0}\}.$$

生成。与一般拓扑空间相比，度量空间有许多很好的性质：

(a) 任意度量空间是 **第一可数的**, 因为对任意 $x\in X$, 都存在可数邻域基

$$\mathcal{B}_x=\{B(x,r)\mid r\in\mathbb{Q}_{>0}\}.$$

由此我们得到（参见第 1.5 节及其习题）

- $F\subset X$ 是闭集当且仅当 F 包含其所有的序列极限点，
- 对于任意拓扑空间 Y，映射 $f:X\to Y$ 是连续的当且仅当 f 是序列连续的.

(b) 任意度量空间是 **Hausdorff 的**, 因为对任意 $x\neq y\in X$, 取 $\delta=d(x,y)/2>0$, 则

$$B(x,\delta)\cap B(y,\delta)=\emptyset.$$

由此我们得到（参见第 2.1 节）

- 度量空间中的紧集都是闭集。特别地，任意单点集 $\{x\}$ 是闭集。
- 度量空间中的任意收敛点列有唯一的极限。

(c) 由第一可数性以及 Hausdorff 性质可得

命题 2.3.1.（度量空间中列紧集是闭集）
度量空间 X 中的任何列紧集都是闭集。♠

证明 设 $F\subset X$ 是一个列紧集. 则对 F 中的任意收敛点列 x_n，由 Hausdorff 性质知 X 中由唯一的 x_0 使得 $x_n\to x_0$. 由列紧性知 $x_0\in F$. 于是 F 包含其所有序列极限点。故 F 是闭集。□

注意仅由第一可数性不能推出列紧集是闭集，比如 $(X,\mathscr{T}_{trivial})$ 是第一可数的且任意子集都是列紧集，但不必是闭集。

(d) 事实上，在度量空间中，我们不仅可以通过不相交的开集“分离”不同的点，而且我们还可以通过不相交的开集“分离”不相交的闭集：

命题 2.3.2.（度量空间的正规性）
对于度量空间 X 中的闭集 A,B，若 $A\cap B=\emptyset$，则存在 X 中的开集 U,V 使得 $A\subset U,B\subset V$ 且 $U\cap V=\emptyset$. ♠

证明 根据第 1.1 节习题中所给出度量空间中的 Urysohn 引理，存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 满足在 A 上 $f=0$ 而在 B 上 $f=1$。因此，只要取 $U=f^{-1}((-\infty,1/3))$ 和 $V=f^{-1}((2/3,+\infty))$ 即可。□

这样用不交开集分离不交闭集的拓扑性质将被称为 **正规性**，后文将会对此进行更

详细的研究。

注 2.3.3. 在本课程中，我们还研究其他拓扑性质，例如紧性，第二可数性，连通性等。这些性质中大多数仅被一些度量空间满足，而不是所有拓扑空间的通有性质。(但是仿紧性是所有度量空间都满足的)

¶ 度量空间的度量方面：有界性

我们在第 1.1 节定义了度量空间 (X,d) 中子集的 **直径**（以及 **有界性**）的概念：

$$diam(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} \quad (\leq +\infty).$$

并说明了直径和有界性不是拓扑概念：如果将一个度量更改为另一个与之拓扑等价的度量，则直径可能会发生变化，有界集可能会变为无界集。然而，很容易看出，

命题 2.3.4

(X,d) 中的任何紧/列紧子集都是有界闭的。

证明 我们已经证明了度量空间中紧集/列紧集是闭集。另一方面，如果 $A \subset X$ 是无界集，则取定任意一点 $x_0 \in X$，我们有

- $\{B(x_0,n)\}_n$ 是 A 的一个开覆盖，但没有有限子覆盖，
- A 中存在一列元素 x_n 满足 $d(x_n,x_0) \to \infty$，于是该序列没有收敛子列。

故任何无界集既不是紧的，也不是列紧的。 □

反之，在度量空间中很容易找到非紧的有界闭子集：

例 2.3.5.

(1) $(\mathbb{N}, d_{\text{discrete}})$ 在 $(\mathbb{N}, d_{\text{discrete}})$ 中是有界闭的，但不是紧的.

(2) $(\mathbb{R}, \frac{d}{d+1})$ 在 $(\mathbb{R}, \frac{d}{d+1})$ 中是有界闭的，但不是紧的.

(3) $((0,1], d_{Euclidian})$ 在 $((0,+\infty), d_{Euclidian})$ 中是有界闭的，但不是紧的.

因此，“有界闭”不是刻画度量空间紧性的等价条件。

¶ 度量空间的度量方面：完全有界性

在仔细研究了上面例子 2.3.5 中的 (1) 和 (2) 之后，你会发现它们是“坏”的有界空间：我们可以用少量半径较大的度量球（比如一个半径为 2 的球）来覆盖它们；但是我们不能用有限多个半径较小的度量球（比如半径为 $\frac{1}{2}$ 的球）来覆盖它们。例如，在 (2) 中，每个区间 $(n,n+1)$ 相对于度量 $d/(d+1)$ 的长度为 $\frac{1}{2}$。换句话说，当你用长的尺子测量这些“坏”空间时，它们是有界的，但当你用短的尺子测量它们时，它们是无界的！

定义 2.3.6.（完全有界性）

设 (X,d) 是度量空间。如果对任意 $\varepsilon > 0$，都存在有限多个半径为 ε 的球覆盖 X，则我们称 X 是 **完全有界的**。

显然，任何完全有界的空间都是有界的，但反之则不然。

注 2.3.7. 根据定义，度量空间 (X,d) 是完全有界的当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限集 $\{x_1, \cdots, x_{n(\varepsilon)}\}$ 满足

$$\forall y \in X, \text{ 存在 } 1 \le i \le n(\varepsilon) \text{ 使得 } d(x_i, y) < \varepsilon.$$

定义 2.3.8.（ε-网）

设 N 是度量空间 (X,d) 中的一个点集。如果它满足

$$\forall y \in X, \text{ 存在 } x \in N \text{ 使得 } d(x,y) < \varepsilon,$$

则我们称 N 为一个 **ε-网**。如果一个 ε-网是有限集，则我们称之为一个 **有限 ε-网**。♣

所以根据定义，我们有

命题 2.3.9.（完全有界 $\iff$ 有限 ε-网）

一个度量空间 X 是完全有界的当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$，X 中都存在有限 ε-网。♠

事实上，对于度量空间，紧性蕴含完全有界性：

命题 2.3.10.（紧性 $\Longrightarrow$ 完全有界性）

如果度量空间 (X,d) 是紧的/列紧的，那么它是完全有界的。♠

证明 若度量空间 (X,d) 是紧的，那么它必然也是完全有界的，因为对于任意 $\varepsilon > 0$，集族 $\{B(x,\varepsilon) \mid x \in X\}$ 是 X 的开覆盖，必有一个有限的子覆盖。

若 (X,d) 是列紧的，反设存在 $\varepsilon > 0$ 使得 X 不能被有限多个 ε-球覆盖。任取 $x_1 \in X$. 由于 $X \setminus B(x_1,\varepsilon) \neq \emptyset$, 可以取到 $x_2 \in X \setminus B(x_1,\varepsilon)$. 归纳地我们可以找到 $x_1, x_2, \cdots$ 使得

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\varepsilon), \quad \forall n.$$

于是我们得到一个点列 $\{x_n\}$，满足

$$d(x_n, x_m) > \varepsilon, \quad \forall n \neq m.$$

所以 $\{x_n\}$ 没有收敛子列。矛盾。□

¶ 度量空间的度量方面: Lebesgue 数引理

另一个非常有用的度量性质是所谓的 Lebesgue 数引理。对于欧氏空间中的紧集，我们在数学分析中已经学过该引理。现在我们将其推广到度量空间：

命题 2.3.11.（Lebesgue 数引理）

如果 (X,d) 是列紧的，那么对于 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$，存在 $\delta > 0$（取决于 $\mathscr{U}$）[a]，使得对于任意满足 $diam(A) < \delta$ 的子集 $A \subset X$，都存在 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $A \subset U$.

[a]这样的正实数 δ 被称为覆盖 $\mathscr{U}$ 的 **Lebesgue 数**. ♠

证明 反证法。设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，且对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $C_n \subset X$ 满足 $diam(C_n) < \frac{1}{n}$ 但 C_n 不包含在任何 $U \in \mathscr{U}$ 中. 我们在每个 C_n 中取一个点 x_n，从而得到 X 中的一个点

列 $\{x_n\}$. 由于 (X,d) 是列紧的，存在一个子列 $x_{n_k}\to x_0\in X$. 又因为 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，所以可以找到 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $x_0\in U$。现在我们选取 $\varepsilon_0>0$ 使得 $B(x_0,\varepsilon_0)\subset U$，然后选取 n_k 使得

$$\frac{1}{n_k}<\frac{\varepsilon_0}{2}\quad 且\quad d(x_{n_k},x_0)<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

由此可得

$$C_{n_k}\subset B(x_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(x_0,\varepsilon_0)\subset U,$$

矛盾！ □

注 2.3.12. 设 $\gamma:[0,1]\to X$ 是一个连续映射，$X=\bigcup_\alpha U_\alpha$ 是 X 的一个开覆盖。那么 $\gamma^{-1}(U_\alpha)$ 是 $[0,1]$ 的开覆盖。根据 Lebesgue 数引理，存在 $\delta>0$ 使得每个区间 $[t,t+\delta]$ 都包含在某个 $\gamma^{-1}(U_\alpha)$ 中。这个简单的事实将在第三章研究基本群的性质时发挥重要作用。

¶ 度量空间的度量方面：完备性

度量空间中，另一个非常有用的度量但非拓扑的概念是 **完备性**。我们需要定义

定义 2.3.13.（Cauchy 列）

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的序列. 如果对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,\quad \forall n,m>N,$$

则我们称 $\{x_n\}$ 为一个 **Cauchy 列**。 ♣

就像欧氏空间的情况一样，用三角不等式很容易证明

引理 2.3.14.（收敛列都是 Cauchy 列）

度量空间 (X,d) 中的任意收敛列 (x_n) 都是 (X,d) 中的 Cauchy 列. ♡

但是，Cauchy 列可能不收敛：例如在 $(0,1)$ 中 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$ 是一个 Cauchy 列。

定义 2.3.15.（完备性）

如果度量空间 (X,d) 中的任意 Cauchy 列都是收敛的，则我们称 (X,d) 是**完备的**。 ♣

例 2.3.16.

(1) $\mathbb{R}$ 和 $[0,1]$ 关于 $d_{\text{Euclidean}}$ 是完备的，而 $\mathbb{Q}$ 和 $(0,1)$ 不是完备的。例 2.3.5 中的 (1) 和 (2) 是完备的，而 (3) 则不是。

(2) 泛函分析分析中那些最重要的度量空间，包括 Banach 空间、Hilbert 空间、Frechét 空间等，都是完备的，因为完备性是发展分析理论的基石。

(3) 考虑从集合 X 到完备度量空间 (Y,d_Y) 的全体有界映射构成的空间

$$\mathcal{B}(X,Y)=\{f:X\to Y\mid f(X)\text{ 在 }Y\text{ 中是有界的.}\}$$

赋予 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上确界度量

$$d_\infty(f,g)=\sup\{d_Y(f(x),g(x))\mid x\in X\},$$

则 $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty(f,g))$ 是完备度量空间。细节留作练习。

(4) 对于任意度量空间 (X,d)，考虑 X 中所有 Cauchy 列组成的空间

$$\mathcal{C} = \{(a_n) \mid (a_n)\text{是}(X,d)\text{中的 Cauchy 列}\}.$$

在 $\mathcal{C}$ 定义一个伪度量

$$d_{\mathcal{C}}((a_n),(b_n)) := \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n).$$

根据第 1.1 节习题，伪度量空间 $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ 模去等价关系

$$(a_n) \sim (b_n) \iff d_{\mathcal{C}}((a_n),(b_n)) = 0$$

后得到一个度量空间。可以验证：该空间是完备度量空间。

由于度量空间中的闭集都包含其所有序列极限点，而子度量空间中的任意 Cauchy 列自动是原空间中的 Cauchy 列，我们得出结论

命题 2.3.17.（完备度量空间的闭子集完备）

如果度量空间 (X,d) 是完备的，$F \subset X$ 是闭集，则子度量空间 (F,d) 也是完备的。♠

注 2.3.18. 若 (X,d) 是完备度量空间，A 是 X 的子集，则 A 中的任意 Cauchy 列在 X 中有极限。上述性质告诉我们，可以把 X 缩小到 $\overline{A}$，而同样性质依然成立。易见 $\overline{A}$ 是 X 中“最小的”满足该性质的子空间，因为它是 X 子空间中最小的包含 A 是完备度量空间. 于是我们定义

定义 2.3.19.（完备化）

设 (X,d) 是度量空间，$(\widehat{X},\hat{d})$ 是完备度量空间。如果存在等距嵌入 $f: X \to \widehat{X}$ 使得 $\overline{f(X)} = \widehat{X}$，则我们称 $(\widehat{X},\hat{d})$ 是 (X,d) 的一个 **完备化**. ♣

可以证明，任意度量空间都有（在等距同构意义下）唯一的完备化：

定理 2.3.20.（任意度量空间都有唯一的完备化）

任意度量空间 (X,d) 都有完备化 $(\widehat{X},\hat{d})$，且在等距同构的意义下完备化是唯一的。♡

事实上，例2.3.16的 (3) 和 (4) 给了我们两种不同的构造给定度量空间完备化的方法：我们可以把任意度量空间 (X,d_X) 都等距嵌入到完备度量空间 $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}),d_\infty)$，或者等距嵌入到由 X 中 Cauchy 列组成的完备度量空间中。

我们将看到，紧度量空间都是完备的。我们先证明

命题 2.3.21.（列紧度量空间完备）

若度量空间 (X,d) 是列紧的，则它是完备的。♠

证明 设 (X,d) 是一个列紧度量空间。给定 X 中的任意 Cauchy 列 $\{x_n\}$，由列紧性，可以找到 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。不妨设它收敛到 $x_0 \in X$. 再根据 Cauchy 列的定义和三角不等式，易证 $x_n \to x_0$。 □

¶ 完备 = 绝对闭

我们知道，完备性是度量概念，但不是拓扑概念，因为 $(0,1)$ 不完备而 $\mathbb{R}$ 完备。但是，我们依然可以从拓扑的角度来理解完备性。我们仔细审视一下例 2.3.5 中的 (3)。度量空间 $((0,1],d)$ 是完全有界的，$(0,1]$ 在 $(0,+\infty)$ 中是闭集。但是，如果我们将 $(0,1]$ 等距嵌入到另一个度量空间，比如 $\mathbb{R}$, 那么 $(0,1]$ 不再是闭集。

定义 2.3.22.（绝对闭）

我们称度量空间 (X,d_0) 是 **绝对闭的**，如果它满足以下更强的闭性条件：

$$\begin{aligned}&\text{对于任意度量空间}(Y,d),\text{若}f:(X,d_0)\to(Y,d)\text{ 是一个}\\&\text{等距嵌入, 则}f(X)\text{ 在}Y\text{ 中是闭集.}\end{aligned}\tag{AC}$$

♣

事实上，绝对闭并不是一个新概念：

命题 2.3.23.（绝对闭 = 完备）

一个度量空间是绝对闭的当且仅当它是完备。♠

证明 如果 (X,d_0) 满足绝对闭条件 (AC)，并且 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的 Cauchy 列。则通过将 (X,d_0) 嵌入到其完备化 $(\widehat{X},\hat{d})$ 中并将像点与原像 $x\in X$ 等同起来，我们得出 $\{x_n\}$ 是 $(\widehat{X},\hat{d})$ 中的一个 Cauchy 列。由于 $(\widehat{X},\hat{d})$ 是完备的，x_n 收敛到唯一的 $\tilde{x}\in(\widehat{X},\hat{d})$。但 (X,d) 在 $(\widehat{X},\hat{d})$ 中是闭的，故 $\tilde{x}\in X$. 所以 (X,d) 是完备的。

反之假设 (X,d) 是完备的，并且 (X,d) 可以等距嵌入到 (Y,d_Y)。则作为 (Y,d_Y) 的子集，X 包含其所有序列极限点，因此在 (Y,d_Y) 中是闭的。 □

所以我们对度量空间的完备性有了新的解释：

$$\text{“完备”}=\text{“作为子空间总是闭的”}$$

注意到

- 任意等距嵌入一定是连续的映射，
- 在连续映射下，紧/列紧集的像是紧/列紧的，
- 度量空间中则紧/列紧集都是闭集。

因此我们得出结论：任意紧/列紧的度量空间都是绝对闭的，即完备的。于是我们（再次）证明了

命题 2.3.24.（紧/列紧度量空间完备）

若度量空间 (X,d) 是紧的或列紧的，则它是完备的。♠

2.3.2 度量空间中各种紧性的等价性

¶ 度量空间中极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧

我们已经看到，对于一般拓扑空间而言，

$$\text{紧}\Longrightarrow\text{极限点紧}\Longleftarrow\text{列紧}$$

对于度量空间，我们的第一个观察是

命题 2.3.25.（度量空间：极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧）

度量空间 (X,d) 是极限点紧的当且仅当它是列紧的。

证明 只需证明若 (X,d) 是极限点紧，则它是列紧的。设 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的任意点列。如果集合 $A=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ 是有限集，那么由鸽笼原理，$\{x_n\}$ 有一个常值子列

$$x_{n_1}=x_{n_2}=\cdots=x_0,$$

这是我们正在需要的收敛子列。

现在假设集合 $A=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ 是一个无限集，那么由极限点紧性，$A'\neq\emptyset$. 取任意 $x_0\in A'$。根据定义，对于任意 $k\in\mathbb{N}$, 我们有

$$B(x_0,1/k)\cap(A\setminus\{x_0\})\neq\emptyset.$$

事实上每个 $B(x_0,1/k)\cap(A\setminus\{x_0\})$ 都是一个无限集。否则，如果存在 k 使得

$$B(x_0,1/k)\cap(A\setminus\{x_0\})=\{x_{m_1},\cdots,x_{m_k}\}$$

则我们取 N 足够大使得 $1/N<\min(d(x_0,x_{m_k}))$。那么

$$B(x_0,1/N)\cap(A\setminus\{x_0\})=\emptyset,$$

矛盾。所以我们可以找到 $n_1<n_2<\cdots$ 使得 $x_{n_k}\in B(x_0,1/k)$。显然子列 $x_{n_k}\to x_0$. $\square$

在证明中，我们实际上只使用了度量空间的第一可数性和 Hausdorff 性质。[用在哪里？找出来！] 稍微修改一下上面的证明，可以得到（留作习题）

命题 2.3.26.（T2+A1: 极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧）

如果拓扑空间 X 是 Hausdorff 并且第一可数的，那么在 X 中的子集是极限点紧的当且仅当它是列紧的。

¶ 列紧 $\Longleftrightarrow$ "完全有界且绝对闭"

现在我们给出"在 $\mathbb{R}^m$ 中紧 $\Longleftrightarrow$ 有界闭"的正确推广：对于一般的度量空间，我们需要将"闭"替换为"绝对闭"并将"有界"替换为"完全有界"，即

命题 2.3.27. 度量空间：列紧 $\Longleftrightarrow$ "完全有界且绝对闭"

度量空间 (X,d) 是列紧的当且仅当它是完备的且完全有界的。

证明 我们已经证明，列紧的度量空间都是完备且完全有界的。现在假设 (X,d) 是完备且完全有界的，设 $\{x_n\}\subset X$ 是一个点列。因为 X 是完全有界的，我们可以用有限个半径为 1 的开球覆盖 X。那么在这个有限覆盖中存在一个球 B_1 使得指标集

$$J_1:=\{n\in\mathbb{N}\mid x_n\in B_1\}$$

是一个无限集。接着我们用有限多个半径为 $\frac{1}{2}$ 的开球覆盖 X。在这个新的有限覆盖中再次存在一个球 B_2，使得指标集

$$J_2:=\{n\in J_1\mid x_n\in B_2\}$$

是一个无限集。继续这个构造，我们得到一个递降的指标序列

$$\mathbb{N} \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots,$$

其中每个 J_k 是一个无限集，并且

$$i, j \in J_k \implies d(x_i, x_j) < \frac{2}{k}.$$

最后我们取 $n_i \in J_i$ 使得 $n_1 < n_2 < \cdots$，则 $\{x_{n_i}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个子列，且是一个 Cauchy 列。由 (X, d) 的完备性，$\{x_{n_i}\}$ 收敛到某个点 $x_0 \in X$. 所以 (X, d) 是列紧的。 □

¶ 度量空间中紧性的不同刻画的等价性

最后我们将上面所有的“拼图小块”凑在一起，得到：

定理 2.3.28.（度量空间中各种紧性的等价性）

在度量空间 (X, d) 中，以下“紧性”都是等价的：

(1) A 是紧的。

(2) A 是列紧的。

(3) A 是极限点紧的。

(4) A 是完全有界且完备的。

(5) A 是可数紧的。

♡

证明 我们已经看到 (1) $\implies$ (3) $\iff$ (2) $\iff$ (4). 由第 2.1 节的习题，(2) $\implies$ (5) $\implies$ (3).

下面证明在度量空间中 (2) $\implies$ (1)。假设 $A \subset (X, d)$ 是列紧的，并且设 $\mathscr{U}$ 是 A 的任意开覆盖。一方面，根据 Lebesgue 数引理，存在一个 Lebesgue 数 $\delta > 0$，使得任何半径小于 δ 的集合都可以被 $\mathscr{U}$ 中的开集所覆盖。另一方面，根据命题 2.3.10，A 是完全有界的，因此可以被有限多个 $\delta/2$-球覆盖。由此可见 $\mathscr{U}$ 有一个有限的子覆盖。 □

注 2.3.29. 我们将在后文中应用 Tietz 延拓定理给出度量空间中子集 A 的紧性的第 6 个等价刻画：（读者可以试试给出这个结果的直接证明）

(6) A 是伪紧的，即任意连续映射 $f : A \to \mathbb{R}$ 是有界的。

于是，对于度量空间而言，第 2.1 节开头的表格中列出的各种紧性都是等价的，且等价于“完全有界且一致闭”。