2.4 映射空间的拓扑

2.4.1 一致收敛拓扑

¶ 回顾：$\mathcal{M}(X,Y)$ 上已知的三种拓扑

对于任意集合 X 以及任意拓扑空间 Y，我们考虑所有从 X 到 Y 的映射构成的空间

$$\mathcal{M}(X,Y)=\{f:X\to Y\}.$$

作为集合，我们在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上可以定义离散拓扑，平凡拓扑，余有限/余可数拓扑等。下面我们研究跟 $\mathcal{M}(X,Y)$ 作为 "映射的集合" 相关的拓扑。首先，作为映射的集合，我们有 $\mathcal{M}(X,Y)=Y^X$，于是由乘积结构我们得到该空间上的两种拓扑：

(i) 乘积拓扑，即由子基

$$\mathcal{S}_{product}=\left\{\pi_x^{-1}\big(B^Y(y_x,r_x)\big)\ \Big|\ \forall x\in X,\forall y_x\in Y,\forall r_x>0\right\}$$

生成的拓扑。我们在注 1.88 中已经看到，该拓扑即 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的逐点收敛拓扑.

(ii) 箱拓扑，即由拓扑基

$$\mathcal{B}_{box}=\left\{\prod_{x\in X}\big(B^Y(y_x,r_x)\big)\ \middle|\ \forall y_x\in Y,\forall r_x>0\right\}$$

生成的拓扑。我们在注 1.93 中已经看到该拓扑在研究连续映射时并不方便。

当 Y 是度量空间时, Y 上的度量 d_Y 在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上诱导了一个度量（见第 1.1 节习题）[15]

$$d_u(f,g):=\sup_{x\in X}\frac{d_Y\big(f(x),g(x)\big)}{1+d_Y\big(f(x),g(x)\big)},$$

且 f_n 在 X 上一致收敛于 f 当且仅当 f_n 在 $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$ 中度量收敛于 f. 我们定义

定义 2.4.1. (一致度量/拓扑)

我们称 d_u 为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的 **一致度量**，而把由 d_u 诱导的度量拓扑 $\mathcal{T}_{u.c.}$ 称为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的 **一致收敛拓扑**。 ♣

于是对于度量空间 (Y,d)，映射空间 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上有第三种自然的拓扑：

(iii) 一致收敛拓扑，即由度量 d_u 诱导的度量拓扑。

注 2.4.2. (1) 类似于第 1.4 节习题，可以证明一致拓扑弱于箱拓扑，但强于乘积拓扑，且对于任何无限集 X 和 "非平凡的" Y，这三个拓扑是两两不同的。

(2) 不难验证，一致度量 d_u 强等价于如下度量：

$$\bar{d}(f,g):=\sup_{x\in X}\min\{d_Y(f(x),g(x)),1\}.$$

(3) 另外，类似于第 2.3 节习题中 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的完备性证明，我们有(留作练习)

命题 2.4.3. (一致度量的完备性)

若 Y 是完备度量空间，则 d_u 是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的一个完备度量。 ♠

[15]注意，要为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 中的映射列定义 "一致收敛"，我们仅需要 Y 上有度量结构，X 上无需任何结构。

¶ $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一致拓扑

现在假设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，而 Y 是一个度量空间，则我们可以讨论 $\mathcal{M}(X,Y)$ 中映射的连续性。特别地，我们可以研究连续映射空间，

$$\mathcal{C}(X,Y) := \{f \in \mathcal{M}(X,Y) \mid f \text{ 是连续的}\}.$$

一般来说 $\mathcal{C}(X,Y)$ 不是 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{product})$ 中的闭集（见例2.4.7）。但是在第 1.1 节习题 4(b) 中，我们证明了连续映射列的一致极限是连续的。于是我们得到

命题 2.4.4.（连续映射空间在一致拓扑下的闭性）
$\mathcal{C}(X,Y)$ 是 $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$ 的闭子集。

作为推论，

推论 2.4.5.（连续映射空间一致度量的完备性）
如果 X 是拓扑空间而 Y 是完备度量空间，则 $(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 是完备度量空间。

注 2.4.6. 若 X 是紧拓扑空间，则 $\mathcal{C}(X,Y)\subset\mathcal{B}(X,Y)$。在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上，我们有度量

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|.$$

容易证明 d_u 和 d_∞ 在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上诱导了相同的拓扑. 特别地，在 d_u 下 $f_n\to f$ 当且仅当在 d_∞ 下 $f_n\to f$. 故如果 X 是紧拓扑空间，在考虑 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一致拓扑时，我们将使用 d_∞ 而不是 d_u，以使计算更简单一些.

¶ $\mathcal{C}(X,Y)$ 上三种拓扑的缺点

我们想研究 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中函数列的收敛性。然而，以上三种拓扑皆不如人意：

例 2.4.7. 考虑 $X=Y=\mathbb{R}$ 的情况，则

(1) 考虑乘积拓扑即逐点收敛拓扑：连续函数列 $f_n(x)=e^{-nx^2}$ 在 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 下收敛到一个坏的极限函数，即不连续函数 $f_0(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$.

根本原因: 逐点收敛拓扑太弱以至于不能保证收敛极限的连续性。

(2) 考虑一致收敛拓扑和箱拓扑：连续函数列 $f_n(x)=x^2/n$ 在 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{Box}$ 下不收敛，虽然它确实在逐点意义下收敛到一个很好的连续函数 $f_0(x)\equiv 0$.

根本原因: 一致拓扑 (和箱拓扑) 太强以至于序列难以收敛。

我们希望在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上找到一个合理的拓扑，使得“坏收敛列”在这个拓扑中不再收敛，而“好收敛列”仍然收敛。根据上面的分析，我们需要 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一个新拓扑结构，它比 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 要弱，但是收敛的连续函数列的极限在这个新拓扑下仍然是连续的。

观察 连续性是“局部”的（强于“点态”而弱于“整体”）。逐点收敛是点态的，太弱。一致收敛是整体的，太强。应该采用“局部的”一致收敛。

例如, 虽然 $f_n(x)=x^2/n$ 在 $\mathbb{R}$ 上并不一致收敛于 $f(x)=0$, 我们却有局部一致收敛性：

$$\text{对于任意}[a,b]\subset\mathbb{R},\ f_n(x)=x^2/n\text{在 }[a,b]\text{ 上}\underline{\text{一致收敛}}\text{ 于}f(x)=0.$$

2.4.2 紧收敛拓扑与紧开拓扑

¶ 紧收敛拓扑

设 X 是一个拓扑空间，(Y,d) 是一个度量空间。受上面最后一个例子的启发，我们可以尝试在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上寻找一个描述“在每个紧子集上一致收敛”的拓扑。这不难找到。我们可以类比一下 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 和 $\mathcal{T}_{u.c.}$ 的构造：

- 描述“在 X 上一致收敛”的拓扑 $\mathscr{T}_{u.c.}$，其拓扑基的组成元素为度量球，即
$$B(f;X;\varepsilon)=\{g\in\mathcal{M}(X,Y)\mid \sup_{x\in K} d(f(x),g(x))<\varepsilon\}.$$
- 描述“在 X 上逐点收敛”，即“在 X 的任意有限点集里一致收敛”的拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$，其拓扑基的组成元素为
$$B(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)=\{g\in\mathcal{M}(X,Y)\mid \sup_{1\le i\le m} d(f(x_i),g(x_i))<\varepsilon\}.$$

于是对于任意紧集 $K\subset X$ 和任意 $\varepsilon>0$, 我们自然引入集合
$$B(f;K,\varepsilon)=\{g\in\mathcal{M}(X,Y)\mid \sup_{x\in K} d(f(x),g(x))<\varepsilon\}.$$
我们有

引理 2.4.8.（紧收敛拓扑的基）

设 X 为拓扑空间，Y 为度量空间，则集族
$$\mathcal{B}_{c.c.}=\{B(f;K,\varepsilon)\mid f\in\mathcal{M}(X,Y),K\text{是}X\text{ 的紧子集},\varepsilon>0\}$$
是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 的一个拓扑基，且它所生成的拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 满足以下性质：
$$\boxed{f_n\text{ 在 }X\text{ 的所有紧子集上一致收敛于 }f\iff f_n\text{ 关于 }\mathscr{T}_{c.c.}\text{ 收敛于 }f.}$$
♡

证明 集族 $\mathcal{B}_{c.c.}$ 是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 的一个拓扑基，因为对于任意 $g\in B(f_1;K_1,\varepsilon_1)\cap B(f_2;K_2,\varepsilon_2)$，如果我们取
$$\varepsilon_0=\min(\varepsilon_1-\sup_{x\in K_1} d(f_1(x),g(x)),\ \varepsilon_2-\sup_{x\in K_2} d(f_2(x),g(x))),$$
则有
$$B(g;K_1\cup K_2,\varepsilon_0)\subset B(f_1;K_1,\varepsilon_1)\cap B(f_2;K_2,\varepsilon_2).$$

拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 满足上面所述的性质，因为
$$\begin{aligned}
&f_n\text{ 在每个紧子集}K\subset X\text{ 上一致收敛于}f\\
\iff&\forall\varepsilon>0,\forall\text{ 紧集}K\subset X,\exists N\text{ 使得}\forall n>N,\text{ 都有 }\sup_{x\in K} d(f_n(x),f(x))<\varepsilon\\
\iff&\forall\varepsilon>0,\forall\text{ 紧集}K\subset X,\exists N\text{ 使得}\forall n>N,\text{ 都有}f_n\in B(f;K,\varepsilon)\\
\iff&f_n\text{ 关于}(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})\text{收敛于}f.
\end{aligned}$$
□

定义 2.4.9.（紧收敛拓扑）

我们称由拓扑基 $\mathcal{B}_{c.c.}$ 生成的拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的 **紧收敛拓扑**。♣

根据定义，在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上我们总是有

$$\mathscr{T}_{product} = \mathscr{T}_{p.c.} \subset \mathscr{T}_{c.c.} \subset \mathscr{T}_{u.c.}.$$

如果 X 是紧的，则 $\mathscr{T}_{c.c.} = \mathscr{T}_{u.c.}$.

对于任意子集 $A \subset X$，又定义易知限制映射

$$r_A : \mathcal{M}(X,Y) \to \mathcal{M}(A,Y), \quad f \mapsto f|_A$$

关于 $\mathscr{T}_{p.c.}, \mathscr{T}_{c.c.}, \mathscr{T}_{u.c.}$ 都连续。由此可得

命题 2.4.10.（"限制" 的连续性）

限制映射

$$r_A : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(A,Y), \quad f \mapsto f|_A$$

关于 $\mathscr{T}_{p.c.}, \mathscr{T}_{c.c.}, \mathscr{T}_{u.c.}$ 都是连续的.

证明 对 r_A 使用推论 1.61(1) 即 "连续映射限制在子集上仍然连续"，我们得到

$$r_A : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{M}(A,Y), \quad f \mapsto f|_A$$

是连续的. 再次对 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ 应用推论 1.61(1)，我们得到 $r_A(f) \in \mathcal{C}(A,Y)$. 最后应用推论 1.61(2) 即得欲证. □

¶ 局部紧 Hausdorff 空间

回到我们原来的问题。假设 $f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ 且在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 下 $f_n \to f_0$ 。由引理 2.4.8，在每个紧子集 $K \subset X$ 上，f_n 一致收敛于 f_0，从而 f_0 在 K 上是连续的。我们能否就断言 f_0 是连续的呢？换而言之，

"函数 f 在 X 的每个紧子集上连续" 是否意味着 "f 在 X 上连续"?

很遗憾，答案是否定的：

例 2.4.11. 考虑拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$. 则 X 中仅有有限集是紧集，因为对于任意无限集合 A，取可数无穷点集 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset A$，则集族

$$A \setminus \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

是 A 的开覆盖但没有有限子覆盖。显然，对于 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 中的任意有限集，其子空间拓扑是离散拓扑。于是，定义 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 上的任意映射限制在 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 的任意紧子集上都是连续映射，但这样的映射在 $\mathbb{R}$ 上不必连续。

因为连续性是局部的，只要对于每个点，f 在该点的某个邻域里面连续，那么 f 就是连续映射（见第 1.3 节习题）. 于是我们很自然地引入如下概念：

定义 2.4.12.（局部紧）

如果拓扑空间 X 的每个点 $x \in X$ 都有一个紧邻域，即存在一个开集 U 和一个紧集 K 使得 $x \in U \subset K$，则我们称 X 是 **局部紧空间**。

由定义以及引理2.4.8，我们马上得到

命题 2.4.13.（局部紧 + 紧收敛 $\Longrightarrow$ 极限函数连续）
若局部紧空间 X 上的连续函数列 f_n 在紧收敛拓扑下收敛于 f，则 f 是连续的。

在绝大部分应用中，局部紧空间也是 Hausdorff 的。注意如果 X 是 Hausdorff 空间，那么 X 是局部紧的当且仅当 X 中的每个点存在一个开邻域 U 使得 $\overline{U}$ 是紧致的. 我们把局部紧 Hausdorff 空间简称为 **LCH 空间**.

例 2.4.14. 以下是 LCH 空间和非 LCH 空间的一些例子：

(1) 任意紧 Hausdorff 空间是 LCH 空间.

(2) $\mathbb{R}^n$ 是 LCH 空间. 更一般地，若 Hausdorff 拓扑空间 X 中任意一个点都有一个同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的开邻域，则 X 是 LCH 空间。

定义 2.4.15.（局部欧氏空间）
设 X 是拓扑空间. 如果对于任意 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U 同胚于欧氏空间中的开球，则我们称 X 是一个**局部欧氏空间**.

(3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 和 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 都不是 LCH 空间. [留作习题]

LCH 空间在分析中起着重要作用。例如，

- $\mathbb{R}^n$ 上的实分析（测度理论和积分）可以扩展到一般的 LCH 空间。[16]
- 可以证明空间 $\mathbb{Q}_p$，即 p 进度量下 $\mathbb{Q}$ 的完备化，是一个 LCH 空间。因此，LCH 空间上的分析在 p 进分析中非常有用。

在 LCH 空间上处理分析问题时，我们往往需要以下命题：

命题 2.4.16.（LCH 中紧集与闭集的分离）
设 X 是 LCH 空间，K 是 X 中的紧集，U 是 X 中包含 K 的开集. 那么存在开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧的，并且

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

证明 先证明特殊情况：$K = \{x\}$ 为单点集。由局部紧性，存在 x 的开邻域 W 使得 $\overline{W}$ 是 X 中的紧子集。令

$$U_1 = U \cap W,$$

则 $\overline{U}_1 \subset \overline{W}$ 是紧集的闭子集，从而是紧集. 若 $\overline{U}_1 = U_1$，则令 $V = U_1$ 即可。下设 $\overline{U}_1 \setminus U_1 \neq \emptyset$，则由 Hausdorff 性质，对于任意 $y \in \overline{U}_1 \setminus U_1$，存在开集 $V_y \ni x$ 以及开集 $U_y \ni y$ 使得 $V_y \cap U_y = \emptyset$. 我们不妨假设 $V_y \subset U_1$，否则我们将 V_y 替换为 $Y_y \cap U_1$. 因为 $\overline{U}_1 \setminus U_1$ 作为紧集 $\overline{U}_1$ 的闭子集，也是紧集，所以存在 $y_1, \cdots, y_k \in \overline{U}_1 \setminus U_1$ 使得 $U_{y_1}, \cdots, U_{y_k}$ 覆盖 $\overline{U}_1 \setminus U_1$. 令

$$V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_k}.$$

则 V 是 x 的开邻域，且

$$\overline{V} \subset \overline{V_{y_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{y_k}} \subset \overline{U}_1$$

[16]参考 G. Folland, *Real analysis*, 第 7 章, 或 T. Tao, *An Epsilon of Room I: Real Analysis*, 第 1.10 节.

是紧集的闭子集，从而是紧集。但根据构造，我们有

$$\begin{aligned} & V \subset (U_{y_1} \cup \cdots U_{y_k})^c \\ \Longrightarrow & \overline{V} \cap (U_{y_1} \cup \cdots U_{y_k}) = \emptyset \\ \Longrightarrow & \overline{V} \cap (\overline{U}_1 \setminus U_1) = \emptyset. \end{aligned}$$

于是我们得到 $\overline{V} \subset U_1 \subset U$. 于是 V 即为所求的集合.

对于一般的紧集 K，我们采用标准的紧性论证：由上面所证，对于每个 $x \in K$，均可找到开集 V_x 使得 $\overline{V_x}$ 是紧集，且

$$\{x\} \subset V_x \subset \overline{V_x} \subset U.$$

由紧性，存在 $x_1, \cdots, x_m$ 使得 $V_{x_1}, \cdots, V_{x_m}$ 覆盖 K. 于是 $V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$ 满足条件. □

¶ 阅读材料：紧生成空间

局部紧条件保证了

“函数 f 在 X 的每个紧子集上连续” $\Longrightarrow$ “f 在 X 上连续”.

但是局部紧条件不是最一般的条件。现在我们考虑

问题 X 满足什么条件时，“函数 f 在 X 的每个紧子集上连续” 意味着 “f 在 X 上连续”?

设 V 是 Y 中的任何开集。那么我们想要的是 “$f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集”，而我们已知的是 “对于 X 的每个紧子集 K，$f^{-1}(V) \cap K$ 在 K 中是开集”。所以我们需要的条件是

子集 $A \subset X$ 是开集当且仅当对于每个紧子集 K，$A \cap K$ 在 K 中是开集. $(\star)$

定义 2.4.17.（紧生成空间）

如果拓扑空间 X 满足条件 $(\star)$，则我们称 X 是 **紧生成空间**。 ♣

显然，在条件 $(\star)$ 中，我们可以将“开集”替换为“闭集”。

注 2.4.18. 使用例 1.101 的语言，我们得到

> X 是紧生成的 $\Longleftrightarrow$ X 是所有紧子空间 $K \subset X$ 的 **拓扑并**，其中每个紧子空间都带有子空间拓扑。

这解释了“紧生成”的名称：X 上的拓扑是由其所有紧子空间上的拓扑生成的。

通过以上分析以及引理2.4.8，我们可以把命题2.4.13推广为

命题 2.4.19.（紧收敛 + 紧收敛 $\Longrightarrow$ 极限函数连续）

如果 X 是紧生成的，$f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ 且 f_n 在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 下收敛到 f_0，则 $f_0 \in \mathcal{C}(X,Y)$. ♠

显然，任何紧拓扑空间都是紧生成的。事实上，很多拓扑空间是紧生成的，例如

- 所有第一可数空间 (因此所有度量空间) 都是紧生成的. (留作习题)
- 所有局部紧空间都是紧生成的. (留作习题)
- 所有 CW 复形 (代数拓扑中重要的拓扑空间 [17]) 都是紧生成的.

[17] 参见 A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Appendix.

¶ 紧开拓扑

紧收敛拓扑的定义中要求 Y 是度量空间。当 Y 只是拓扑空间时，$\mathcal{M}(X,Y)$ 上无法定义紧收敛拓扑. 但只要用标准的手段，即将度量球替换为开集，就不难定义如下 “拓扑空间版本的紧收敛拓扑”:

定义 2.4.20. (紧开拓扑)

设 X, Y 为拓扑空间。对于任意紧的 $K \subset X$ 和开集 $V \subset Y$，我们记

$$S(K,V) = \{f \in \mathcal{M}(X,Y) \mid f(K) \subset V\}.$$

我们称 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的由子基

$$\mathcal{S}_{c.o.} = \{S(K,V) \mid K \text{是} X \text{ 的紧子集}, V \text{是} Y \text{ 的开子集}\}$$

生成的拓扑 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 的**紧开拓扑**。♣

我们只对 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 感兴趣，因为它在这个子空间中最有用。

例 2.4.21. 取 X 为单点集 $\{*\}$，那么 $\mathcal{C}(\{*\},Y)$ 中的函数一一对应于 Y 中的点。换言之，作为集合，$\mathcal{C}(\{*\},Y)$ 与 Y 是等同的. 由紧开拓扑的定义，在上述等同下，拓扑空间 $(\mathcal{C}(\{*\},Y), \mathscr{T}_{c.o.})$ 中的开集恰好一一对应于 Y 中的开集. 于是我们得到拓扑空间的同胚:

$$(\mathcal{C}(\{*\},Y), \mathscr{T}_{c.o.}) \simeq (Y, \mathcal{T}_Y).$$

由定义不难证明（留作习题）

命题 2.4.22. (度量空间)

如果 Y 是一个度量空间，那么在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上有

$$\mathscr{T}_{c.o.} = \mathscr{T}_{c.c.}.$$

♠

特别地，对于度量空间 Y，$\mathcal{C}(X,Y)$ 上的紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 只依赖于 Y 上度量所生成的拓扑，而不依赖于拓扑等价的度量的选取。作为推论，若 X 是紧的，则 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上由度量诱导的一致收敛拓扑 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 与 Y 上拓扑等价的度量的选取无关。

下面我们考虑映射的复合。我们知道，连续映射的复合依然是连续映射，于是 “映射的复合” 就给出了一个从 $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z)$ 到 $\mathcal{C}(X,Z)$ 的映射。在考虑该 “复合映射” 的连续性时，我们需要在这些映射空间上赋予适当的拓扑。利用命题2.4.16，可以证明

命题 2.4.23. (“复合” 的连续性)

设 X, Y 和 Z 是拓扑空间，其中 Y 是局部紧 Hausdorff 空间。赋予以下每个空间紧开拓扑，则复合映射

$$\circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z), \quad (f,g) \mapsto g \circ f$$

是连续映射。♠

证明留作练习。

推论 2.4.24.（赋值的连续性）

设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，Y 为任意拓扑空间。则当我们赋予 $\mathcal{C}(X,Y)$ 紧开拓扑时，赋值映射

$$e : X \times \mathcal{C}(X,Y) \to Y, \quad (x,f) \mapsto e(x,f) = f(x) \in Y$$

是连续的。♡

证明 根据例2.4.21，我们可以将 X 与 $\mathcal{C}(\{*\},X)$ 等同起来，将 Y 与 $\mathcal{C}(\{*\},Y)$ 等同起来，此时赋值映射 e 恰好就是复合映射

$$\circ : \mathcal{C}(\{*\},X) \times \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(\{*\},Y).$$

□

2.5 映射空间的紧性：Arzela-Ascoli 定理

2.5.1 等度连续性

¶ 经典 Arzela-Ascoli 定理

分析中的一个核心问题是：

> 给定一列连续映射，或者更一般地，一族连续映射，能否在其中找到一个（一致）收敛到某个连续函数的子列？

例如，为了证明某个偏微分方程或变分问题的解的存在性，可以先尝试构造该问题的一列"近似解"。如果可以证明这一列"近似解"有一个收敛到某个很好的函数的子列，那么通常加上一些额外的工作，就可以证明这个极限函数实际上是一个真正的解。这种方法被称为"紧性论证"，其背景就是我们接下来要介绍的 Arzela-Ascoli 定理。[18]

经典版本的 Arzela-Ascoli 定理是：

定理 2.5.1.（Arzela-Ascoli 定理：经典版本）

设 $\{f_n\} \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 是一个连续函数列.

(1) 如果函数列 $\{f_n\}$ 是一致有界且等度连续的，则它有一致收敛子列。

(2) 反之，如果函数列 $\{f_n\}$ 的每个子列都有一个一致收敛子列，那么它是一致有界且等度连续的.

♡

我们先回顾一下概念：我们称函数族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 是

(a) **一致有界的**，如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $x \in [0,1]$ 和任意 $f \in \mathcal{F}$，有

$$|f(x)| \le M.$$

(b) **等度连续的**，如果对任意 $x_0 \in [0,1]$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对任意满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in [0,1]$ 和任意 $f \in \mathcal{F}$，都有

$$|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

不难看出，这两个条件是必要的：

(1) 函数列 $f_n(x) = n$ 是等度连续的，但没有收敛子列，因为它不是一致有界的（尽管该序列中的每个函数都是有界函数）。

(2) 函数列 $f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致有界但在 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中没有收敛子列（因为它在 $x = 1$ 处不是等度连续的（尽管该序列中的每个函数在 $x = 1$ 处都是连续的）。

¶ 等度连续性

不难把等度连续性的概念推广到从拓扑空间 X 到度量空间 Y 的连续映射族：

[18] 阿斯科利（G. Ascoli，1943-1896），意大利数学家，于 1884 年引入等度连续性的概念并用它给出了连续函数集紧致的充分条件；阿尔泽拉（C. Arzelà，1847-1912），意大利数学家，于 1895 年推广了 Ascoli 的定理，证明了条件的必要性，从而给出了完整的 Arzela-Ascoli 定理.

定义 2.5.2.（等度连续）

设 X 为拓扑空间, (Y,d) 为度量空间, $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是一族连续映射。对于 $x_0\in X$, 如果对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(f(x),f(x_0))<\varepsilon,\quad \forall x\in U,\forall f\in\mathcal{F},$$

则我们称 $\mathcal{F}$ **在 x_0 处等度连续**. 如果 $\mathcal{F}$ 在任意点 $x\in X$ 处都是等度连续的，则我们称这族映射是 **等度连续的**。♣

等度连续性是度量性质，它弱于 $(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 的完全有界性：

命题 2.5.3.（完全有界 $\Longrightarrow$ 等度连续）

对于任意度量空间 (Y,d)，$(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 中的任何完全有界子集 $\mathcal{F}$ 是等度连续的。♠

证明 对于任意 $x_0\in X$ 和 $\varepsilon>0$，我们需要找到一个 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(f(x),f(x_0))<\varepsilon,\quad \forall x\in U,\forall f\in\mathcal{F}.$$

由于 $\mathcal{F}$ 是完全有界的，所以在 $(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 中存在 $\mathcal{F}$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $\{f_1,\cdots,f_n\}$。由于每个 f_k 是连续的，因此集合

$$U=\bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}\left(B(f_k(x_0),\frac{\varepsilon}{3})\right)$$

是 x_0 的开邻域。对任意 $f\in\mathcal{F}$，根据我们的选取，存在 k 使得 $d_u(f,f_k)<\varepsilon/4$。因此对任意 $x\in U$ 以及任意 $f\in\mathcal{F}$，

$$d(f(x),f(x_0))\le d(f(x),f_k(x))+d(f_k(x),f_k(x_0))+d(f_k(x_0),f(x_0))<\varepsilon.$$

这就完成了证明。 □

为什么要引入等度连续族这么复杂的概念呢?我们知道逐点收敛拓扑刻画了映射“在有限个点处的接近性”，而紧收敛拓扑刻画了映射“在紧集上的接近性”. 对于一个连续映射 f，要在紧集上逼近它，根据标准的紧性论证，只要在有限个点处足够逼近它就可以了，但这个用于逼近的有限点集一般而言是强烈依赖于 f 的。然而，若 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续族，由等度连续的定义，对于任意给定的紧集，我们可以为 $\mathcal{F}$ 中所有函数取同一个有限点集. 换而言之，“等度连续”让我们把整族函数“在某个紧集上的接近性”同时化归为“在某个有限点集的接近性”：

命题 2.5.4.（等度连续族：$\mathscr{T}_{p.c.}=\mathscr{T}_{c.c.}$）

设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续族，则 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 与 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 限制在 $\mathcal{F}$ 上是相同的。♠

证明 因为我们总有 $\mathscr{T}_{p.c.}\subset\mathscr{T}_{c.c.}$，因此只要在 $\mathcal{F}$ 上证明相反的包含关系，即对于任意 $f_0\in\mathcal{F}$ 和任意 $B(f_0;K,\varepsilon)\subset\mathcal{M}(X,Y)$，其中 $K\subset X$ 是紧集，我们需要证明：存在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的开集 U 使得

$$f_0\in U\cap\mathcal{F}\subset B(f_0;K,\varepsilon)\cap\mathcal{F}.\tag{2.5.1}$$

由等度连续的定义，对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及 $x_0 \in K$，存在 x_0 的开邻域 U_0 使得

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in U_0, \forall f \in \mathcal{F}.$$

因为 K 是紧集，存在有限多个点 $x_1, \cdots, x_n$ 以及 X 中覆盖 K 的开集 $U_1, \cdots, U_n$，使得

$$d(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in V_i, \forall f \in \mathcal{F}.$$

我们取 U 为集合

$$U = \omega(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) = \left\{ g \in \mathcal{M}(X, Y) | d(g(x_i), f_0(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

易验证对于这个 U，(2.5.1) 成立：设 $f \in U \cap \mathcal{F}$. 对于任意 $x \in K$，取 i 使得 $x \in U_i$. 则

$$d(f(x), f_0(x)) \leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f_0(x_i)) + d(f_0(x_i), f_0(x)) < \varepsilon,$$

即 $f \in B(f_0; K, \varepsilon)$. □

¶ 等度连续族的闭包

我们知道一族连续映射在逐点收敛拓扑下的极限点不必是连续映射，即 $\mathcal{C}(X, Y)$ 在 $(\mathcal{M}(X, Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中不是闭集。然而，等度连续族 $\mathcal{F}$ 里的映射在逐点收敛拓扑下的极限点一定是连续映射：

命题 2.5.5. (等度连续族的闭包等度连续)

设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ 是等度连续的，那么 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{M}(X, Y)$ 中关于 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 的闭包 $\mathcal{K}$ 是等度连续的. 特别地，$\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X, Y)$. ♠

证明 对于任意 $x_0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$,，我们需要一个 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon, \quad \forall x \in U, \forall g \in \mathcal{K}. \tag{2.5.2}$$

由 $\mathcal{F}$ 的等度连续性，我们可以找到 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in U, \forall f \in \mathcal{F}.$$

为了证明 (2.5.2) 对于这个 U 成立，我们任取 $g \in \mathcal{K}, x \in U$ 并记 $V = \omega(g; x, x_0; \frac{\varepsilon}{3})$，那么 V 是 $(\mathcal{M}(X, Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中 g 的一个开邻域. 因为 $g \in \mathcal{K}$ 且 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X, Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包，我们有 $V \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. 任取 $f \in V \cap \mathcal{F}$, 我们得到

$$d(g(x), g(x_0)) \leqslant d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon.$$

这就证明了 (2.5.2)，从而证明了 $\mathcal{K}$ 的等度连续性。 □

2.5.2 一般版本的 Arzela-Ascoli 定理

¶ Arzela-Ascoli 定理（一般版本）

为了陈述一般版本的 Arzela-Ascoli 定理，我们需要先引入几个定义：

定义 2.5.6. (预紧)

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 若 $\overline{A}$ 是紧的，则我们称 A 为 **预紧的**（或 **相对紧的**）. ♣

为简单起见，对于任意映射族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$，我们令

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

我们引入以下定义：

定义 2.5.7.（逐点有界/预紧）

设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是一个连续映射族.

(1) 如果对于每个 $a \in X$，$\mathcal{F}_a$ 是 Y 中的有界集, 则我们称 $\mathcal{F}$ **逐点有界**,

(2) 如果对于每个 $a \in X$，$\mathcal{F}_a$ 是 Y 中的预紧集，则我们称 $\mathcal{F}$ **逐点预紧**. ♣

下面我们将证明以下一般形式[19]的 Arzela-Ascoli 定理：

定理 2.5.8.（Arzela-Ascoli 定理：一般形式）

设 X 是拓扑空间, (Y,d) 是度量空间, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}(X,Y)$ 的子集, 赋有紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$.

(1) 若 $\mathcal{F}$ 等度连续且逐点预紧，则 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包是紧集。

(2) 如果 X 是局部紧 Hausdorff 空间, 则逆命题也对。 ♡

注意在上述一般形式的 Arzela-Ascoli 定理中，结论非常弱，因为一般来说紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 不一定是度量拓扑，从而紧性并不蕴含列紧性。因此，对于等度连续且逐点预紧的序列，我们甚至不能得出收敛子列存在的结论。

但是，如果 X 是紧的并且 Y 是度量空间，那么在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上 $\mathscr{T}_{c.c.} = \mathscr{T}_{u.c.}$ 由于 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 是一个度量拓扑，紧性确实蕴含列紧性。所以由定理2.5.8，我们得到

定理 2.5.9.（紧空间上的映射的 Arzela-Ascoli 定理）

设 X 是紧空间，(Y,d) 是一个度量空间，而 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是一个等度连续且逐点预紧的子集。则 $\mathcal{F}$ 中的任何序列都有子列在 X 中**一致**收敛到某个连续映射. ♡

因为在 $\mathbb{R}^n$ 中，一个集合是预紧的当且仅当它是有界的，我们得到

推论 2.5.10.（紧空间上多元函数的 Arzela-Ascoli 定理）

设 X 是紧空间，$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ 是等度连续且逐点有界的子集。那么 $\mathcal{F}$ 中的任意序列都有子列在 X 上**一致**收敛到某个连续函数. ♡

Arzela-Ascoli 定理在分析学中应用广泛。以下是你可以从其他课程中学到的一些标准的应用：

- 泛函分析: Frechet-Kolmogorov-Riesz 紧性定理.
- 偏微分方程: Sobolev 嵌入，等等
- 常微分方程: Peano 存在性定理.
- 复分析: Montel 定理
- 调和分析/Lie 理论: Peter-Weyl 定理

[19]Arzela-Ascoli 定理还有更一般的形式，刻画了映到一致空间（这是度量空间的推广）的映射族的紧性.

¶ Arzela-Ascoli 定理（一般形式）的证明

现在我们来证明定理2.5.8。尽管该定理是关于紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 的，但我们在证明中也需要使用逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 和一致收敛拓扑 $\mathscr{T}_{u.c}$.

我们先简要解释一下**证明思路**：我们想要证明 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包是紧集。但是 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中子集的紧性并不好证，关键的观察是

- 根据命题2.5.4，对于等度连续族，$\mathscr{T}_{c.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 是一致的.
- 根据命题2.5.5，$\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包就是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包. 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中证明紧性可以应用强大的 Tychonoff 定理.

证明 [定理2.5.8的证明]

(1) 我们记 $\mathcal{K}=\overline{\mathcal{F}}^{p.c.}$，即 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包. 记 $\mathcal{F}_a$ 在 Y 中的闭包为 K_a. 根据假设，K_a 是紧集，并且因为 Y 是度量空间 (从而是 Hausdorff 空间)，K_a 是闭集. 所以

$$\prod_{a\in X}K_a=\bigcap_{a\in X}\pi_a^{-1}(K_a)$$

在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中既是紧集（根据 Tychonoff 定理），也是闭集. 因为

$$\mathcal{F}\subset\prod_{a\in X}\mathcal{F}_a\subset\prod_{a\in X}K_a,$$

其闭包 $\mathcal{K}$，作为紧集 $\prod\limits_{a\in X}K_a$ 中的一个闭子集，在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中是紧集。根据命题 2.5.5，$\mathcal{K}$ 是等度连续的. 再由命题2.5.4，在 $\mathcal{K}$ 上 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 两个拓扑是相同的。于是 $\mathcal{K}$ 也是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包（由于 $\mathscr{T}_{p.c.}\subset\mathscr{T}_{c.c.}$，$\mathcal{K}$ 在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 下也是闭集；$\mathcal{K}$ 上的两个拓扑相同则告诉我们 $\mathcal{K}$ 中没有更小的包含 $\mathcal{F}$ 的闭集了），并且也是紧集。

(2) 现在假设 X 是 LCH 空间，且 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中的闭包 $\mathcal{K}$ 是紧的。我们将证明 $\mathcal{K}$ 是等度连续的，且每个 $\mathcal{K}_a$ 是紧的，这蕴含了 $\mathcal{F}$ 是等度连续且逐点预紧的 (因为每个 $\overline{\mathcal{F}_a}$ 都是 $\mathcal{K}_a$ 中的闭子集).

$\mathcal{K}_a$ 的紧性来自推论 2.4.24：$\mathcal{K}_a$ 是紧集 $\mathcal{K}$ 在连续映射

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{j_a} & X\times\mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{e} & Y\\ f\mapsto & & (a,f) & & \mapsto f(a)\end{array}$$

下的像，因此是紧的，其中 j_a 是 “嵌入映射” $j_a(f):=(a,f)$.

为了证明在任意 $x\in X$ 处 $\mathcal{K}$ 的等度连续性，我们取 x 的紧邻域 A。则只需证明

$$\mathcal{K}_A:=\{r_A(f)\mid f\in\mathcal{K}\}$$

在 x 处是等度连续的，其中 $r_A:\mathcal{C}(X,Y)\to\mathcal{C}(A,Y)$ 是限制映射。由命题2.4.10，r_A 是连续的，于是 $\mathcal{K}_A=r_A(\mathcal{K})$ 在 $\mathcal{C}(A,Y)$ 中是紧的。又由于 A 是紧的，$\mathcal{C}(A,Y)$ 上的紧收敛拓扑与一致收敛拓扑是相同的. 换而言之，$\mathcal{C}(A,Y)$ 上的紧收敛拓扑是度量拓扑. 所以由定理2.3.28，$\mathcal{C}(A,Y)$ 中 $\mathcal{K}_A$ 的紧集关于 d_u 是完全有界的。最后根据命题 2.5.3，$\mathcal{K}_A$ 是等度连续的。这就完成了证明。

□

¶ 局部紧且 σ-紧空间上的映射的 Arzela-Ascoli 定理

对于局部紧空间，每个点都有紧邻域。显然，如果映射族 $\mathcal{F}$ 是等度连续/逐点预紧的，那么它在这样一个紧邻域上的限制也是等度连续/逐点预紧的。因此，如果 X 是局部紧的，那么对于任意等度连续且逐点预紧的序列 $\{f_n\}$，以及任意点 x，存在 x 的紧邻域，使得 $\{f_n\}$ 在该紧邻域上有一致收敛子列。不幸的是，这还不足以证明序列 $\{f_n\}$ 关于 $\mathscr{T}_{c.c}$ 具有收敛子列，因为在 X 中可能存在"太多紧子集"。然而，如果我们假设 X 可以写成可数个紧子集的并集，那么我们就可以应用标准的对角化技巧来提取一个子列，该子列在每个紧子集上（一致）收敛：

定义 2.5.11.（σ 紧）

如果拓扑空间 X 可以写成可数个紧子集的并集，则我们称 X 是 **σ-紧**的. ♣

定理 2.5.12.（局部紧且 σ-紧空间上的映射的 Arzela-Ascoli 定理）

设 X 为局部紧且 σ-紧空间，(Y,d) 为度量空间。设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续且逐点预紧的子集。那么 $\mathcal{F}$ 中的任意序列都有一个子列，在 X 的任意紧集上一致收敛到某个极限映射 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$. ♡

证明细节留作习题。

2.5.3 阅读材料：Blaschke 选择定理

¶ 一些凸几何

我们给出一个凸几何中的应用。回想一下，子集 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是 **凸的** 当且仅当

$$x,y\in A\Longrightarrow(1-\lambda)x+\lambda y\in A,\quad\forall\,0\leqslant\lambda\leqslant1.$$

下面我们考虑

$$\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)=\ \mathbb{R}^n\ \text{中所有非空紧凸子集构成的集族}.$$

注意 $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 是

$$\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)=\ \mathbb{R}^n\ \text{中所有非空紧子集构成的集族}$$

的子集。在例 1.6(8) 中，我们在 $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ 上定义了所谓的 Hausdorff 度量

$$d_H(A_1,A_2):=\inf\{r\mid A_1\subset B(A_2,r)\ \text{且} A_2\subset B(A_1,r)\},$$

其中 $B(A,r):=\cup_{x\in A}B(x,r)$。所以特别地，$\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 是一个度量空间。我们不加证明地列出一些凸几何的标准结果。

定义 2.5.13.（支撑函数）

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为紧凸集。我们称函数

$$h_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad h_A(v)=\sup_{x\in A}\langle x,v\rangle$$

为 A 的 **支撑函数**，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是标准的欧氏内积。♣

事实上，支撑函数刻画了紧凸集 A：

命题 2.5.14.（支撑函数的性质）

对于任意紧凸集 $A \subset \mathbb{R}^n$，支撑函数 h_A 是连续函数，并且是正齐次的和次可加的，即存在 $\alpha > 0$ 使得对于任意 $v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$h_A(\alpha v) = \alpha h_A(v)$$

和

$$h_A(v_1 + v_2) \leq h_A(v_1) + h_A(v_2).$$

反之，对于任意连续的、正齐次的和次可加的函数 h，都存在唯一的一个紧凸域 A，使得 $h = h_A$。

因此，支撑函数是凸几何中一个非常重要的工具：它将几何形状的问题转化为连续函数的问题。事实上，两个紧集之间的 Hausdorff 距离可以通过它们的支撑函数来计算。注意，根据正齐次性，每个 h_A 都由其限制

$$\tilde{h}_A = h_A|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$$

唯一确定。这是 S^{n-1} 上的一个连续函数。

命题 2.5.15.（Hausdorff 距离 = 一致度量距离）

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个紧集 A 和 B，

$$d_H(A, B) = d_u(\tilde{h}_A, \tilde{h}_B),$$

其中 d_u 是 $\mathcal{C}(S^{n-1}, \mathbb{R})$ 上的一致度量。

我们还需要以下结果：

引理 2.5.16.（支撑函数的控制）

假设 $A \subset \overline{B(0, R)}$，那么对于任意 $u, v \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$|h_A(u) - h_A(v)| \leq R|u - v|.$$

¶ Blaschke 选择定理

下面我们应用 Arzela-Ascoli 定理证明凸几何中重要的 Blaschke 选择定理：[20]

定理 2.5.17.（Blaschke 选择定理）

对于任意 $R > 0$，包含在 $B(0, R)$ 中的所有非空紧凸子集的集族关于拓扑 $\mathscr{T}_{d_H}$ 是紧集.

因此，任何“有界”紧凸集列都有一个在度量 d_H 下收敛到某个紧凸集的子列。

---

[20]布拉施克（Wilhelm Blaschke，1885-1962），奥地利/德国数学家，主要研究微分几何与积分几何。他建立了凸几何里的紧性定理即 Blaschke 选择定理，其著作《圆与球》是非常著名的关于凸体的书。布拉施克是陈省身先生的博士导师，对于陈省身先生决定去汉堡大学去学习数学起到了重要作用。

Blaschke 选择定理的一种证法是先证明 $\mathfrak{C}(\overline{B(0,R)})$ 是 $\mathscr{C}(\overline{B(0,R)})$ 中的闭子集，并证明后者是完全有界且完备的，从而是紧的。这里我们通过 Arzela-Ascoli 定理给出另一个证明。

证明 [Blaschke 选择定理的证明]

根据引理 2.5.16，函数族

$$\mathcal{F} = \{\tilde{h}_A \mid A\text{是紧凸集}\} \subset \mathcal{C}(S^{n-1}, \mathbb{R})$$

是等度连续的。而且，根据定义，它是逐点有界的（界为 R）. 根据 Arzela-Ascoli 定理，$\mathcal{F}$ 中的任意函数列都有一个一致收敛到连续函数 $\tilde{h} \in \mathcal{C}(S^{n-1}, \mathbb{R})$ 的子列. 定义正齐次函数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得 h 在 S^{n-1} 上的限制为 $\tilde{h}$。由于 $\tilde{h}$ 是一列"限制函数"的一致极限，其"原始函数"是次可加的，很容易看出 h 也是次可加的。由命题2.5.14，h 是 $\overline{B(0,R)}$ 中某个紧凸集的支撑函数。最后结合命题 2.5.15就完成了定理的证明。 □

Blaschke 选择定理可以用来证明许多几何问题的**解的存在性**，比如等周问题[21]，Lebesgue 万有覆叠问题等等.

[21] 瑞士几何学家 Jakob Steiner 在 1838 年发展了对称化方法，证明了如果等周问题有解的话，那么解一定是球. 但是他的方法无法处理解的存在性问题而受到批评. Blaschke 选择定理使得等周问题的这种几何证法得以完善.