2.6 连续函数代数与 Stone-Weierstrass 定理

2.6.1 连续函数代数 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$

在本节中, 我们假设 X 是紧 Hausdorff 空间 (但在本节末尾我们将考虑更一般的 LCH 空间). 我们考虑一类特殊的映射空间, 即连续函数空间 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. 由注记 2.4.6, 在 X 紧致时, $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 上的度量

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$$

跟一致度量 d_u 是拓扑等价的。再由由推论 2.4.5, $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ 是完备度量空. 在本节里, 如无例外说明, 在谈及 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 时我们将一直使用 d_∞ 度量及其生成的一致拓扑.

¶ Weierstrass 逼近定理

我们先回忆一下在数学分析中学过的 Weierstrass 逼近定理, 该定理是被誉为现代分析之父的德国数学家 Weierstrass 在 1885 年证明的, 是后来函数逼近与插值理论的起点:

定理 2.6.1. (Weierstrass 逼近定理)

多项式集合 $\mathcal{P}([0,1])$ 在 $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$ 中是稠密的。换言之, 对于任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, 存在一个多项式 P, 使得

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

♡

该定理的最简洁的证明是 S. Bernstein [22] 于 1912 年给出的: 对任意 f, 他显式构造了一列多项式, 被称为 Bernstein 多项式,

$$B_n(f)(x) := \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \tag{2.6.1}$$

并用概率论方法证明了这一列多项式一致收敛于 f.

作为推论, 我们得到

推论 2.6.2

对于任意 $0<a<b$ 以及任意 $\varepsilon>0$, 存在一个多项式 $q=q(t)$, 满足 $q(0)=0$ 且

$$q([a,b])\subset(1-\varepsilon,1+\varepsilon).$$

♡

证明 根据 Weierstrass 逼近定理, 存在一个多项式 $q_1\in\mathcal{P}([0,b])$ 使得:

$$|q_1(t)-f_0(t)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{其中} \quad f_0(t)=\begin{cases} t/a, & t\in[0,a],\\ 1, & t\in[a,b].\end{cases}$$

然后令 $q(t)=q_1(t)-q_1(0)$ 即可. □

[22] 伯恩施坦 (Sergei Natanovich Bernstein, 1880-1968), 俄罗斯和前苏联数学家, 以对偏微分方程、微分几何、概率论和近似理论的贡献而闻名, 函数构造论的创立者。

¶ 作为含幺代数的 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$

我们的目标是将 Weierstrass 逼近定理扩展到更一般的拓扑空间。当然，一般来说，我们将不再有拓扑空间上的多项式的概念。但我们仍然可以提问：

问题: 我们能否用一个相对简单的函数族来逼近 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 里的函数?

在 Weierstrass 逼近定理中，我们使用子集

$$\mathcal{P}([0,1]) = [0,1]\text{上的多项式空间}$$

来逼近 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 里的函数. 注意到 $\mathbb{R}$ 上的加法与乘法自动给出了函数空间 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 及其子空间 $\mathcal{P}([0,1])$ 里的加法和乘法，而“函数之间的加法和乘法”是构成 Bernstein 多项式 (2.6.1) 的基本组件. 用代数的语言来说，$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 是一个 “代数”，而 $\mathcal{P}([0,1])$ 是 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中的 “子代数”:

定义 2.6.3. (代数)

设 $(\mathcal{A},+)$ 是数域 $\mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$) 上的一个向量空间，且 $\mathcal{A}$ 上还有一个乘法运算

$$\cdot : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}.$$

(1) 如果对任意 $x,y,z\in\mathcal{A}$ 和标量 a,b，都有
- (分配律) $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z,\quad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z.$
- (相容性) $(ax)\cdot(by) = (ab)(x\cdot y).$

则我们称三元组 $(\mathcal{A},+,\cdot)$ 为一个**代数**. 换言之，代数就是一个赋有满足分配律的双线性乘法运算的向量空间 $\mathcal{A}$.

(2) 如果 $(\mathcal{A},+,\cdot)$ 是一个代数，$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是一个乘法封闭的向量子空间，则称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个**子代数**.

(3) 如果代数 $\mathcal{A}$ 中存在关于乘法的单位元，即存在元素 $1\in\mathcal{A}$ 使得

$$1\cdot x = x\cdot 1 = x,$$

则称代数 $\mathcal{A}$ 是 **含幺代数**，并称 1 为该代数的**幺元**.

(4) 如果代数 $\mathcal{A}$ 也是一个拓扑向量空间，且拓扑结构与乘法运算也相容，即

$$\cdot : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$$

是连续映射，则我们称 $\mathcal{A}$ 是一个**拓扑代数**.

(5) 如果拓扑代数 $\mathcal{A}$ 的子代数 $\mathcal{B}$ 是它的闭子空间，则称为 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 **闭子代数**。 ♣

例如 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ （赋予一致拓扑）是含幺拓扑代数，$\mathcal{P}([0,1])$ 是 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的含幺子代数，但不是闭子代数。

利用拓扑结构与向量空间结构（向量加法与数乘）、乘法运算的相容性，可以证明

命题 2.6.4. (子代数的闭包是闭子代数)

设 $\mathcal{A}$ 为拓扑代数，$\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}$ 为子代数。那么闭包 $\overline{\mathcal{A}_1}$ 是 $\mathcal{A}$ 的（闭）子代数。 ♠

¶ 两个条件："无处消失" 和 "分离点"

现在设 $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 是一个子代数。我们想要找出使得 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 中稠密的条件. 为此，我们先通过例子观察不稠密的子代数 $\mathcal{A}$:

例 2.6.5.

(1) 考虑

$$\mathcal{A}=\left\{f=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k \;\middle|\; n\in\mathbb{N},a_k\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

那么 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中的一个子代数，但它不是稠密的：因为

$$f(0)=0,\qquad \forall f\in\mathcal{A},$$

所以 $\mathcal{A}$ 中的函数无法（在度量 d_∞ 下）逼近任意在 $x=0$ 处非零的函数。

(2) 考虑

$$\mathcal{A}=\left\{f=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)) \;\middle|\; n\in\mathbb{N},a_k,b_k\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R}).$$

那么 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ 中的一个子代数，但它不是稠密的：因为

$$f(0)=f(2\pi),\qquad \forall f\in\mathcal{A},$$

所以 $\mathcal{A}$ 中的函数无法（在度量 d_∞ 下）逼近任意满足 $f(0)\neq f(2\pi)$ 的函数 f.

我们将会看到，这两个例子是 "仅有的坏例子"。为此，我们定义

定义 2.6.6.（无处消失与分离点性质）

设 X 是拓扑空间，而 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的一个子代数.

(1) 若对任意 $x\in X$，存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq 0$，则我们称 $\mathcal{A}$ 是**无处消失的**.

(2) 若对任意 $x\neq y\in X$, 存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq f(y)$，则我们称 $\mathcal{A}$ 是**分离点的**. ♣

根据定义，如果 X 不是 Hausdorff 的, 则 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 没有分离点的子代数. 所以在谈及 "分离点" 时我们将始终假设 X 是 Hausdorff 空间.

¶ $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的含幺闭子代数

显然 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的任何含幺子代数 $\mathcal{A}$ 是无处消失的。反之，我们有

命题 2.6.7.（$\mathcal{A}$ 无处消失 $\Longrightarrow\overline{\mathcal{A}}$ 含幺）

设 X 是紧拓扑空间. 如果 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的子代数 $\mathcal{A}$ 无处消失，那么 $1\in\overline{\mathcal{A}}$，即 $\overline{\mathcal{A}}$ 含幺。♠

证明 对任意 $x\in X$, 存在 $f_x\in\mathcal{A}$ 使得 $f_x(x)\neq 0$. 设

$$U_x=\{y\mid f_x(y)\neq 0\}.$$

则 $\{U_x\}$ 是 X 的开覆盖. 所以存在点 $x_1,\cdots,x_m$ 使得 $X\subset U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m}$. 令

$$f_1(x)=f_{x_1}^2+\cdots+f_{x_m}^2\in\mathcal{A}.$$

则对所有 $x\in X$ 有 $f_1(x)>0$. 由 X 的紧性, 存在 $a,b>0$ 使得对所有 $x\in X$ 有

$a \leqslant f_1(x) \leqslant b$. 对于任意 $\varepsilon > 0$，由推论 2.6.2，存在 $q \in \mathcal{P}([a,b])$ 满足 $q(0)=0$，且使得

$$f(x) := q(f_1(x)) \subset (1-\varepsilon, 1+\varepsilon),$$

即 $d_\infty(f,1) < \varepsilon$. 最后，因为 q 是多项式且 $q(0)=0$, 所以 $f \in \mathcal{A}$. 于是 $1 \in \overline{\mathcal{A}}$. □

对于 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的含幺闭子代数，通过同时使用代数结构和拓扑结构，我们有

命题 2.6.8.（含幺子代数的性质）

设 X 是紧拓扑空间，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的一个含幺闭子代数，则

(1) $f \in \mathcal{A} \Longrightarrow |f| \in \mathcal{A}$.

(2) $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \max\{f_1,\cdots,f_n\} \in \mathcal{A}, \min\{f_1,\cdots,f_n\} \in \mathcal{A}$.

证明 （1）因为 f 是有界的，根据 Weierstrass 逼近定理，在 $[0, |f|_\infty^2]$ 上存在一列多项式 $p_n(t)$ 一致收敛到函数 $h(t)=\sqrt{t}$。于是函数列 $p_n \circ f^2$ 一致收敛到函数 $\sqrt{f^2} = |f|$. 但是因为 $\mathcal{A}$ 是含幺子代数且 $f \in \mathcal{A}$，所以 $p_n \circ f^2 \in \mathcal{A}$. 由 $\mathcal{A}$ 的闭性，我们得到 $|f| \in \mathcal{A}$.

（2）这是因为

$$\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \quad \min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

结合 (1) 以及归纳法即得欲证. □

2.6.2 Stone-Weierstrass 定理

¶ Stone-Weierstrass 定理（版本 1）

1937 年，M. Stone[23]将 Weierstrass 逼近定理推广到一般的紧 Hausdorff 空间，并在 1948 年给出了一个简化证明：

定理 2.6.9.（紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理【版本 1】）

设 X 为任意紧 Hausdorff 空间。若 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的子代数 $\mathcal{A}$ 无处消失 <u>且</u> 分离点，那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 中是稠密的

Stone-Weierstrass 定理是关于 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的最重要的定理之一。美国数学家 J. Kelley 在他所著的拓扑学方面的经典著作《一般拓扑学》一书中评价 Stone-Weierstrass 定理为“这无疑是 $\mathcal{C}(X)$ 上已知的最有用的结果。”

注 2.6.10. 对于一般的是非紧 Hausdorff 空间 X，若我们赋予 $C^\infty(X,\mathbb{R})$ 紧收敛拓扑 $\mathcal{T}_{c.c.}$，则 $(C^\infty(X,\mathbb{R}), \mathcal{T}_{c.c.})$ 依然是拓扑代数，此时我们可以把紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理翻译成如下的

[23]马歇尔. 斯通（Marshall Stone，1903-1989），美国数学家，对实分析、泛函分析、拓扑学和布尔代数的研究做出了贡献。他以 **Stone-von Neumann 定理** (1930)、**Stone-Čech 紧化** (1934)、**Stone 表示定理** 和 **Stone 对偶** (1936), **Banach-Stone 定理** (1937), **Stone-Weierstrass 定理** (1937, 1948) 等等而闻名. 在 1946 年-1952 年期间担任芝加哥大学系主任时，聘请了 P. Halmos, A. Weil，S. Mac Lane, A. Zygmund 和陈省身先生等一批著名数学家前往工作. 注意不要跟后文中出现的英国数学家 Arthur Stone 混淆.

定理 2.6.11.（紧收敛拓扑版本的 Stone-Weierstrass 定理）

设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，$\mathcal{A}$ 是 $(C^\infty(X,\mathbb{R}),\mathcal{T}_{c.c.})$ 无处消失且分离点的子代数，则 $\mathcal{A}$ 在 $(C^\infty(X,\mathbb{R}),\mathcal{T}_{c.c.})$ 中稠密.

♡

证明 对于任意 $f_0\in C^\infty(X,\mathbb{R})$，$X$ 中的任意紧集 K 以及任意 $\varepsilon>0$, 我们需要证明

$$B(f,K,\varepsilon)\cap\mathcal{A}\neq\emptyset.$$

为此，我们令

$$\mathcal{A}_K=\{f|_K\mid f\in\mathcal{A}.\}$$

注意到 $\mathcal{A}_K$ 是 $(C(\mathcal{K},\mathbb{R}),d_\infty)$ 的一个无处消失且分离点的子代数，于是由定理2.6.9，存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $d_\infty(f|_K,f_0|_K)<\varepsilon$，而这正是我们需要的. □

当然，因为 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 一般而言不是度量拓扑，所以需要加上一定的条件（比如定义 2.5.11 的 σ-紧），才能找到 $\mathcal{A}$ 中一列函数，使之在每个紧集上一致收敛到给定的 f_0.

接下来我们将证明 Stone-Weierstrass 定理，并简要讨论它的一些推广，从中我们可以管窥到该定理是如何以某种预料之中以及意想不到的方式继续进一步发展的。

¶ Stone-Weierstrass 定理（版本 2）及证明

根据命题 2.6.4 和命题 2.6.7，定理 2.6.9 等价于

定理 2.6.12.（紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理【版本 2】）

设 X 是紧致 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}\subset\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 是一个分离点的含幺闭子代数。则 $\mathcal{A}=\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

♡

证明 设 $f\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$。对于任意 $\varepsilon>0$, 我们需要找到 $f_\varepsilon\in\mathcal{A}$ 使得

$$d_\infty(f,f_\varepsilon)<\varepsilon.$$

我们从任意点对 $a\neq b\in X$ 开始. 因为 $\mathcal{A}$ 分离点，所以存在 $g\in\mathcal{A}$ 使得 $g(a)\neq g(b)$。令

$$f_{a,b}(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

那么 $f_{a,b}\in\mathcal{A}$ 且 $f_{a,b}(a)=f(a)$, $f_{a,b}(b)=f(b)$。考虑集合

$$U_{a,b,\varepsilon}:=\{x\in X\mid f_{a,b}(x)<f(x)+\varepsilon\}.$$

由 f 和 $f_{a,b}$ 的连续性，这个集合是开集。而且，对于任意取定的 b 和 ε，$\{U_{a,b,\varepsilon}\}_{a\in X}$ 是 X 的开覆盖。由 X 的紧性，我们可以找到一个有限的子覆盖

$$\{U_{a_1(b,\varepsilon),b,\varepsilon},U_{a_2(b,\varepsilon),b,\varepsilon},\cdots,U_{a_n(b,\varepsilon),b,\varepsilon}\}.$$

因此如果我们取

$$f_b^\varepsilon:=\min\{f_{a_1(b,\varepsilon),b},f_{a_2(b,\varepsilon),b},\cdots,f_{a_n(b,\varepsilon),b}\},$$

则在 X 上处处有 $f_b^\varepsilon<f+\varepsilon$. 根据命题2.6.8，$f_b^\varepsilon\in\mathcal{A}$. 而且，根据定义，$f_b^\varepsilon(b)=f(b)$。所

以当我们改变 b 时，由集合

$$V_{b,\varepsilon} := \{x \in X \mid f_b^\varepsilon(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

所构成的集族也是 X 的开覆盖。由紧性，我们可以找到一个有限的子覆盖

$$\{V_{b_1,\varepsilon}, V_{b_2,\varepsilon}, \cdots, V_{b_m,\varepsilon}\}.$$

最后，如果我们令

$$f_\varepsilon := \max\{f_{b_1}^\varepsilon, f_{b_2}^\varepsilon, \cdots, f_{b_m}^\varepsilon\},$$

再次使用命题2.6.8，我们得到 $f_\varepsilon \in \mathcal{A}$. 而由构造可知，则在 X 上我们有

$$f + \varepsilon > f_\varepsilon > f - \varepsilon.$$

这就完成了证明。 □

¶ Stone-Weierstrass Theorem（版本 3）

Stone-Weierstrass 定理的另一个等价表述形式是：

定理 2.6.13.（紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理【版本 3】） 设 X 是紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 是一个分离点的子代数。如果 $\mathcal{A}$ 不稠密，则存在唯一的 $x_0 \in X$ 使得

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) | f(x_0) = 0\}.$$

♡

证明 由于 $\mathcal{A}$ 分离点但 $\overline{\mathcal{A}} \neq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$，必须存在一个 x_0 使得对所有 $f \in \mathcal{A}$ 有 $f(x_0) = 0$。而且，因为 $\mathcal{A}$ 分离点，这样的 x_0 必须是唯一的。所以存在唯一的 $x_0 \in X$ 满足

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \mid f(x_0) = 0\}.$$

反之，我们证明 $\{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \mid f(x_0) = 0\}$ 中任意函数都可以被 $\mathcal{A}$ 中的元素逼近. 为此我们令 $\mathcal{A}_1$ 为由 $\mathcal{A}$ 和常值函数生成的 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 的含幺子代数，则 $\overline{\mathcal{A}} = C(X, \mathbb{R})$. 设 $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 是一个满足 $f(x_0) = 0$ 的函数，首先取一列函数 $f_n \in \mathcal{A}_1$ 逼近 f. 由定义，$f_n - f_n(x_0) \in \mathcal{A}$. 因为 $f_n(x_0) \to f(x_0) = 0$，我们得到 $f_n - f_n(x_0) \to f$，即为欲证. □

¶ 复值函数的 Stone-Weierstrass 定理

上面我们只对实值函数考虑了 Stone-Weierstrass 定理。复值连续函数代数 $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$，上面所表述的 Stone-Weierstrass 定理对并不成立：

例 2.6.14. 记 $\mathbb{C}$ 中的闭单位圆盘为 $\overline{D}$，则 $\overline{D}$ 上的复多项式代数 $P(\overline{D}, \mathbb{C})$ 是一个分离点的含幺复子代数，但它在 $\mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{C})$ 中并不稠密，因为函数 $f(z) = \bar{z}$ 不能被复多项式逼近：如果 $p_n(z) \to f(z) = \bar{z}$，那么我们会得到

$$0 = \int_0^{2\pi} p_n(e^{it})e^{it}dt \to \int_0^{2\pi} e^{-it}e^{it}dt = 2\pi,$$

矛盾。【事实上，根据复分析里面有关函数项级数的 Weierstrass 定理，一列在单位圆盘里内闭一致收敛的多项式，其极限在开圆盘里面一定是全纯函数！】

事实上，我们只要把 $\bar{z}$ 这样的元素加上，Stone-Weierstrass 定理就依然成立！

定义 2.6.15.（自伴复子代数）

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 的一个复子代数[a]，如果它关于共轭运算是闭的，即

$$f \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bar{f} \in \mathcal{A},$$

则我们称 $\mathcal{A}$ 是 **自伴**的复子代数.

[a]换句话说，定义 2.6.3 中的标量 a 和 b 现在是任意复数。

加上自伴的条件后，我们就有复值函数的 Stone-Weierstrass 定理：

定理 2.6.16.（复值函数的 Stone-Weierstrass 定理）

设 X 为紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 为分离点且无处消失的复子代数。如果 $\mathcal{A}$ 还是自伴的，那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 中是稠密的。

事实上，有了自伴性的假设，可以证明 $f+\bar{f}$ 和 $i(f-\bar{f})$ 是分离点的实值函数，从而可以用实值函数情形的 Stone-Weierstrass 定理。细节留作练习。

¶ LCH 空间的 Stone-Weierstrass 定理

到现在为止我们都是考虑紧 Hausdorff 空间上的 Stone-Weierstrass 定理，从证明中我们也可以看到，紧性起到了至关重要的作用。对于一般的非紧空间，Stone-Weierstrass 定理是不成立的。然后，对于在分析中起到重要作用的 LCH 空间，我们依然可以证明 Stone-Weierstrass 定理的一个变体。之所以对于非紧的 LCH 空间，依然可以证明某种 Stone-Weierstrass 定理，其原因在第 2.5 节的习题中已经出现了：根据非紧 LCH 空间的结构定理，只要对非紧 LCH 空间做单点紧致化，就可以得到紧 Hausdorff 空间，从而可以应用紧 Hausdorff 空间上的 Stone-Weierstrass 定理. 为此，对任意非紧 LCH，我们考虑空间

$$\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \mid 任意\varepsilon > 0, 存在紧集K \subset X使得在K^c上有|f(x)| < \varepsilon\}.$$

我们称 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 里的元素为**在无穷远处消失的函数**. 可以证明，它是一个代数. 另外，易见 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 是有界连续函数空间 $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ 的一个闭子空间，从而 d_∞ 是 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 上的一个完备度量. 应用上面所提及的单点紧致化以及定理2.6.13，不难证明

定理 2.6.17.（非紧 LCH 上的 Stone-Weierstrass 定理）

设 X 是一个非紧 LCH 空间. 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 中的一个无处消失且分离点的子代数，则 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 中稠密.

细节留作习题.

¶【阅读材料】一个长长的注记：拓扑的代数化

回到紧 Hausdorff 空间 X 的情况。注意 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 是关于范数

$$\|f\|_\infty := d_\infty(f,0).$$

的 Banach 空间。显然，如果 X,Y 是同胚的拓扑空间，则 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ 作为 Banach 空间是同构的：若 $\phi: X\to Y$ 是一个同胚映射，我们考虑拉回映射

$$T:\mathcal{C}(Y,\mathbb{C})\to\mathcal{C}(X,\mathbb{C}),\quad Tf(x):=f(\phi(x)),$$

则易验证它是向量空间 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ 之间的保范线性同构：

$$\|T(f)\|_\infty=\sup_{x\in X}|Tf(x)|=\sup_{x\in X}|f(\phi(x))|=\sup_{y\in Y}|f(y)|=\|f\|_\infty.$$

反之，Banach 和 Stone 证明了 $\mathcal{C}(X_1,\mathbb{C})$ 事实上决定了 X：[24]，

定理 2.6.18.（Banach-Stone 定理）

两个紧 Hausdorff 空间 X_1 和 X_2 是同胚的当且仅当 Banach 空间 $\mathcal{C}(X_1,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{C}(X_2,\mathbb{C})$ 是同构的。 ♡

事实上，$\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 除了是 Banach 空间（即有向量空间结构、范数结构且度量完备）外，还有乘积结构（从而是一个代数）和共轭，且这些结构都是“相容的”，例如

$$\|fg\|\le\|f\|\cdot\|g\|\quad 且\quad \|\bar{f}f\|^2=\|f\|^2.$$

对这样的对象，我们称之为 C^*-代数：

定义 2.6.19.（C^*-代数）

设 $(\mathcal{A},+,\cdot)$ 是一个复结合代数.

(1) 若 $\mathcal{A}$ 上具有**对合**运算 $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，使得

- $x^{**}=x$,
- $(x+y)^*=x^*+y^*,(xy)^*=y^*x^*$,
- $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$.

则我们称 $(\mathcal{A},+,\cdot,*)$ 是一个 **$*$-代数**.

(2) 若 $\mathcal{A}$ 上面有范数 $\|\cdot\|$，使得 $(\mathcal{A},+,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, 且

$$\|xy\|\le\|x\|\|y\|,$$

则我们称 $(\mathcal{A},+,\cdot,\|\cdot\|)$ 是一个 **Banach 代数**.

(3) 若 $(\mathcal{A},+,\cdot,*)$ 是一个$*$-代数，$(\mathcal{A},+,\cdot,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 代数，且 $*$-代数结构和 Banach 范数结构相容，即

$$\|x^*x\|=\|x^*\|\|x\|,$$

则我们称 $(\mathcal{A},+,\cdot,*,\|\cdot\|)$ 是一个 **C^*-代数**.

(4) 若 C^*-代数 $(\mathcal{A},+,\cdot,*,\|\cdot\|)$ 里的乘法是交换的，即 $xy=yx$，则我们称它为一个**交换 C^*-代数**. ♣

[24] 1932 年 Banach 对紧度量空间证明了该定理，后来 1937 年 M.Stone 将结论推广到了紧 Hausdorff 空间.

所以 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 是一个含幺交换 C^*-代数。事实上，前苏联数学家 I. Gelfand [25] 和 M. Naimark 在 1943 年证明了：任何（抽象）含幺交换 C^*-代数都是以这种方式出现的，并给出了从 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 到 X 的显式构造：

定理 2.6.20.（Gelfand-Naimark 定理，交换版本）

对任意含幺交换 C^* 代数 $\mathcal{A}$，都存在紧 Hausdorff 空间 X 使得 $\mathcal{A}$ 同构于 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

证明概要如下：考虑由 $\mathcal{A}$ 的非零**特征**$\phi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$（也称为代数同态，即保乘法的线性泛函）所组成的集合 Σ. 可以证明

- 首先证明每个特征 ϕ 都是连续映射，于是每个特征都是 Banach 空间 $\mathcal{A}$ 的对偶空间 $\mathcal{A}^*$ 中的一个元素.
- 接着证明每个特征 ϕ 在 $\mathcal{A}^*$ 中都有（对偶）范数 ≤ 1，于是 Σ 事实上是 $\mathcal{A}^*$ 中的闭单位球 $\overline{B(\mathcal{A}^*)}$ 的子集。
- 然后证明 Σ 关于弱-* 拓扑是 $\overline{B(\mathcal{A}^*)}$ 的子集. 根据第 2.2 节证明的 Banach-Alaoglu 定理，$\overline{B(\mathcal{A}^*)}$ 是关于弱-* 拓扑的紧 Hausdorff 空间，因此 Σ（关于弱-* 拓扑）也是紧 Hausdorff 的。
- 最后证明 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{C}(\Sigma,\mathbb{C})$ 同构：对 $\mathcal{A}$ 中的每个元素，由 Gelfand 变换给出从 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{C}(\Sigma,\mathbb{C})$ 的同构，该变换把 $a\in\mathcal{A}$ 通过赋值映射映为 $\mathcal{C}(\Sigma,\mathbb{C})$ 中的元素 $\hat{a}$，即 $\hat{a}(\phi):=\phi(a)$.

于是，由函数所组成的代数和作为背景的几何空间之间也存在了一种相互决定的对偶关系，人们可以通过研究函数代数而得到背景空间的所有信息。这样的对偶关系不仅出现在拓扑中，也出现在别的学科如代数几何中。更进一步地，数学家们将这种“对偶性”思想延拓到研究更复杂的非交换代数，并由此导向了一个新的数学分支：**非交换几何学**。

[25]盖尔范德（Israel M. Gelfand，1913-2009），出生于乌克兰的前苏联/俄罗斯著名数学家，被誉为 20 世纪最伟大的数学家之一，对群论、表示论、泛函分析、调和分析、积分几何等多个数学分支以及数学教育做出了重大贡献。他在 1978 年获得了第一届 **Wolf 奖**，曾先后三次获得 **列宁勋章**.