2.7 可数性公理

2.7.1 可数性公理

在前面几节中，我们仔细研究了拓扑中的“有限性”即紧性。紧空间可以被视为仅由有限多个“拓扑元件”（即开集）就可以构建出来的空间，而我们已经一再看到，这样的有限性是如何帮助我们从局部性质过渡到整体性质。

跟有限相对的是无限。一般而言，无限是很难处理的。但我们也已经多次看到，有一种最简单的无限性是我们往往是可以处理的，即可数性。所以接下来我们转而讨论拓扑中的可数性特征。

¶ 第一可数空间

事实上，我们对可数性并不陌生. 回忆一下，在定义 1.123 里我们把具有可数邻域基的拓扑空间称为第一可数空间, 或者简称为 (A1)-空间. 换而言之，

$$X \text{ 是 (A1) 空间} \Longleftrightarrow \forall x \in X, \text{存在 } x \text{ 的邻域}\{U_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}\text{使得 } x \text{ 每个开邻域 } U \text{ 都包含某个 } U_k^x.$$

注意若 X 是第一可数的，那么对于每个点，我们都可以选择一个可数邻域基 $\{U_n^x\}$ 使得

$$U_1^x \supset U_2^x \supset U_3^x \supset \cdots, \tag{2.7.1}$$

因为如果 $\{V_1^x, V_2^x, \cdots\}$ 是 x 处的一个可数邻域基，那么可以取

$$U_1^x = V_1^x,\ \ U_2^x = V_1^x \cap V_2^x,\ \ U_3^x = V_1^x \cap V_2^x \cap V_3^x,\ \cdots.$$

则 $\{U_1^x, U_2^x, \cdots\}$ 是 x 的一个可数邻域基，且满足 (2.7.1).

我们已经看到第一可数空间有很多很好的性质，比如

- (命题 1.124)(A1) 空间 X 的子集 $F \subset X$ 是闭集当且仅当包含其所有序列极限点.
- （第 1.5 节习题）若 X 是 (A1) 的，则任何序列连续映射 $f : X \to Y$ 是连续的.
- （命题2.3.26）如果 X 是 (A1) 的并且还是 Hausdorff 的, 则 X 中的极限点紧子集都是列紧的.

例 2.7.1. 以下是 (A1)-空间和非 (A1)-空间的一些例子。

(1) 度量空间都是第一可数的，因为我们可以取 $U_n^x = B(x, \frac{1}{n})$.

(2) Sorgenfrey 直线 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是第一可数的，可以取 $U_n^x = [x, x + \frac{1}{n})$.

(3) 空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 不是第一可数的: 对任意一列 x 的开邻域 $\{U_x^n\}$, 集合 $\bigcap_n U_x^n$ 依然是 x 的一个开邻域. 令 U 为从 $\bigcap_n U_x^n$ 中去掉一个不同于 x 的点所得的集合，则 U 是 x 的一个开邻域，且它不包含任何一个 U_x^n.

(4) 空间 $(\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}), \mathscr{T}_{p.c.})$ 不是第一可数的, 因为我们在例 1.119 中已经看到，该空间里存在非闭子集

$$A = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{ 仅对可数多的 } x \text{ 有 } f(x) \neq 0\,\}$$

包含其所有序列极限点。

¶ 第二可数空间

对于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，我们在注 1.73 中看到，它不仅在每个点 x 处有一个可数邻域基，而且它有一个只包含可数个开集的拓扑基，

$$\mathcal{B}=\{B(x,r)\mid x\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}_{>0}\}.$$

这是一个更强的可数性性质，值得为之命名：

定义 2.7.2.（第二可数性公理）
如果拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 有一个可数基，即存在可数个开集 $\{U_1,U_2,U_3,\cdots\}$ 构成 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基，则我们称 X 满足**第二可数性公理**，或者说它是**第二可数的**，简称为 **(A2)-空间**. ♣

显然，任何第二可数空间都是第一可数空间。但反之则不成立，例如，$(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 是一个度量空间，从而是第一可数空间，但它不是第二可数空间。

有一大类度量空间是第二可数的：

命题 2.7.3.（完全有界 $\Longrightarrow$ 第二可数）
任何一个完全有界的度量空间都是第二可数的。 ♠

证明 假设 (X,d) 是完全有界的。根据定义，对于任意 n，都存在一个有限的 $\frac{1}{n}$-网，即存在有限多个点 $x_{n,1},x_{n,2},\cdots,x_{n,k(n)}\in X$ 使得

$$X=\bigcup_{i=1}^{k(n)}B(x_i,\frac{1}{n}).$$

我们断言可数开集族

$$\mathcal{B}:=\{B(x_{n,i},1/n)\mid n\in\mathbb{N},1\leqslant i\leqslant k(n)\}$$

是度量拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基。为了证明这一点，我们取任意开集 U 和任意点 $x\in U$。则 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subset U$. 现在我们选取 $n\in\mathbb{N}$ 和 $1\leq i\leq k(n)$ 使得

$$1/n<\varepsilon/2 \quad 且 \quad d(x,x_{n,i})<1/n.$$

由此得

$$B(x_{n,i},1/n)\subset B(x,2/n)\subset B(x,\varepsilon)\subset U,$$

故可数族 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基。 □

由于紧度量空间都是完全有界的，因此我们得到推论

推论 2.7.4.（紧度量空间 $\Longrightarrow$ 第二可数）
任何一个紧度量空间都是第二可数的. ♡

例 2.7.5. 考虑空间 $X=[0,1]^{\mathbb{N}}=\{(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in[0,1]\}$.

(1) $(X,\mathscr{T}_{product})$ 是第二可数的: 我们在第 2.2 节习题中看到，X 上的乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是一个度量拓扑. 因此 $(X,\mathscr{T}_{product})$ 是一个紧度量空间，从而是第二可数的。该空间同胚于例 1.6(3) 中的 Hilbert 立方体，因此我们也称它为 **Hilbert 立方体**.

(2) $(X,\mathscr{T}_{box})$ 不是第一可数的 (因此也不是第二可数的): 我们用反证法以及标准的对角线技巧. 设 $\{U_n(x)\}$ 是 $(X,\mathscr{T}_{box})$ 在 $x=(x_i)$ 处的一个可数邻域基. 则存在 $[0,1]$ 中 x_i 的开邻域 $U_i^{(n)}(x_i)$，使得

$$\prod_i U_i^{(n)}(x_i)\subset U_n(x),\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

取 $\widetilde{U}_i^{(i)}(x_i)\subsetneq U_i^{(i)}(x_i)$ 是 $[0,1]$ 中包含 x_i 的严格更小的开邻域。则集合

$$U:=\prod_i \widetilde{U}_i^{(i)}(x_i)$$

是箱拓扑中点 (x_n) 的开邻域，但它不包含任意 $U_n(x)$，矛盾。

¶ 可分空间

如果我们仔细审视一下我们上面所构造的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的可数基，即

$$\mathcal{B}=\{B(x,r)\mid x\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}_{>0}\},$$

我们会发现一个关键的原因是 $\mathbb{R}^n$ 里存在一个可数稠密子集 $\mathbb{Q}^n$. 事实上，这是第二可数空间的共同特征：

命题 2.7.6.（第二可数 $\Longrightarrow$ 可分）
任何第二可数拓扑空间都包含一个可数稠密子集.

证明 设 $\{U_n|n\in\mathbb{N}\}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的一个可数基. 对于每个 n, 我们选取一个点 $x_n\in U_n$. 令

$$A=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}.$$

则 A 是 X 中的可数子集。对于任意 $x\in X$ 和 x 的任意开邻域 U, 存在 n 使得 $x\in U_n\subset U$. 特别地, $U\cap A\neq\emptyset$. 所以由命题 1.135，$\overline{A}=X$. □

注意我们实际上证明了

> 在任意拓扑空间中，都存在一个稠密子集，其基数 (即**势**) 不超过拓扑基的基数.

“存在可数稠密子集”是一种新的可数性，我们给它一个定义：

定义 2.7.7.（可分空间）
如果拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 包含一个可数稠密子集，则我们称 X 为 **可分空间**.

所以命题2.7.6可以被表述为“第二可数的拓扑空间都是可分的”。反之并不成立：

例 2.7.8. $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是可分的，但不是第二可数的：

(1) $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是可分的: 在 Sorgenfrey 拓扑下 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, 因为对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和任意区间 $[x,x+\varepsilon)$, 我们都有 $r\in[x,x+\varepsilon)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$.

(2) $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 不是第二可数的: 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_{sorgenfrey}$ 的任意一个拓扑基。则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 存在开集 $B_x\in\mathcal{B}$ 使得

$$x\in B_x\subset[x,x+1),$$

由此可得 $x=\inf B_x$. 于是我们得到一个从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathbb{R}$ 的单射，故 $\mathcal{B}$ 是一个不可数族.

然而，对于度量空间而言，这两者是等价的：

命题 2.7.9.（度量空间：第二可数 $\iff$ 可分）

度量空间 (X,d) 是第二可数的当且仅当它是可分的。

证明 设 (X,d) 是一个可分的度量空间，$A=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ 是一个可数稠密子集。则

$$\mathcal{B}=\{B(x_n,1/m)|n,m\in\mathbb{N}\}$$

是度量拓扑的一个可数基。 □

注 2.7.10. 可分性是泛函分析中一个非常有用的概念，常被用于证明某些紧性结果。另一个众所周知的结果是

一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是可分的 $\iff$ 它有一个可数正交基。

利用这个事实很容易构造不可分的希尔伯特空间。例如，令

$$\widetilde{l^2(\mathbb{R})}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \text{仅对可数多的 } x \text{ 有 } f(x)\neq 0\text{，且}\sum_x|f(x)|^2<\infty\}.$$

在 $\widetilde{l^2(\mathbb{R})}$ 上可以定义内积

$$\langle f,g\rangle:=\sum_{x\in\mathbb{R}}f(x)g(x),$$

该内积诱导了一个度量结构. 对该空间进行度量完备化，由此所得到的希尔伯特空间没有可数正交基.

¶ Hilbert 方体作为紧度量空间的“通用”模型

粗略地说，可分性意味着你可以使用可数多的数据来“重构”整个空间：

定理 2.7.11.（紧度量空间 =Hilbert 立方体的闭子空间）

任意紧度量空间 (X,d) 都同胚于 Hilbert 立方体 $([0,1]^{\mathbb{N}},d)$ 的某个闭子集.

证明 因为 X 是紧空间，所以它有界。通过缩放度量 d，我们可以假设 $\mathrm{diam}(X)\leqslant 1$. 由推论2.7.4以及命题2.7.9，$X$ 是可分的. 设 $A=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 中的可数稠密子集。定义

$$F:X\to[0,1]^{\mathbb{N}},\quad x\mapsto(d(x,x_1),d(x,x_2),\cdots,d(x,x_n),\cdots).$$

则有：

- F 是连续的，因为 $\mathscr{T}_d=\mathscr{T}_{product}$，且每个 $\pi_n\circ F=d(x,x_n)$ 都是连续的。
- F 是单射：如果 $F(x)=F(y)$, 则对所有 n 有 $d(x,x_n)=d(y,x_n)$. 由于 A 是稠密的，所以存在 $x_{n_k}\to x$. 由 d 的连续性，
$$d(x,y)=\lim_{k\to\infty}d(x_{n_k},y)=\lim_{k\to\infty}d(x_{n_k},x)=0.$$
- $([0,1]^{\mathbb{N}},\mathscr{T}_{product})$ 是 Hausdorff 的，因为它是一个度量空间。

因此由推论2.1.21，作为从紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射，

$$F:X\to F(X)\subset[0,1]^{\mathbb{N}}$$

是同胚。最后，作为 Hausdorff 空间中的紧子集，$F(X)$ 是闭的. □

¶ 其他可数性概念

还有几个常见的跟紧性密切相关的可数性概念。我们在第 2.1 节习题中见过可数紧性的概念，它可以被视为是一个跟可数性相关的紧性概念。同时，我们也有一些跟紧性相关的可数性概念，比如

- σ-紧性（见定义2.5.11）.
- Lindelöf[26]空间，定义如下：

定义 2.7.12.（Lindelöf 空间）

如果拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$ 都存在可数子覆盖，则我们称 X 为 **Lindelöf 空间**. ♣

显然，如果一个拓扑空间既是 Lindelöf 空间又是可数紧空间，则它是紧空间.

由定义不难证明 Lindelöf 性质是一种比第二可数或者 σ-紧更弱的可数性：

命题 2.7.13.（Lindelöf 弱于 (A2) 以及 σ-紧）

(1) 任意 (A2) 空间是 Lindelöf 空间.

(2) 任意 σ-紧空间是 Lindelöf 空间. ♠

注意反过来并不成立，例如

- 由 Tychonoff 定理，$([0,1]^{[0,1]}, \mathscr{T}_{product})$ 是紧空间，从而自然也是 Lindelöf 空间，但它不是 (A2) 空间，甚至不是 (A1)-空间.
- $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 是 Lindelöf 空间但不是 σ-紧空间 (参见例2.4.11).

下面列举 Lindelöf 空间的几个常用性质，证明留作习题：

命题 2.7.14.（Lindelöf 空间的性质）

(1) Lindelöf 空间的闭子空间一定是 Lindelöf 空间.

(2) Lindelöf 空间在连续映射下的像集是 Lindelöf 空间.

(3) 度量空间是 Lindelöf 空间当且仅当它是 (A2) 空间. ♠

于是如同紧性一样，Lindelöf 空间的子空间不一定是 Lindelöf 空间（因为任意空间都有单点紧致化），但其闭子空间依然是 Lindelöf 的. 另一方面，跟紧性截然不同的是，在习题中我们将会看到，两个 Lindeloöf 空间的乘积空间不一定是 Lindelöf 的.

[26]林德勒夫（E. Lindelöf, 1870-1946），芬兰数学家，主要研究实分析、复分析、拓扑学。

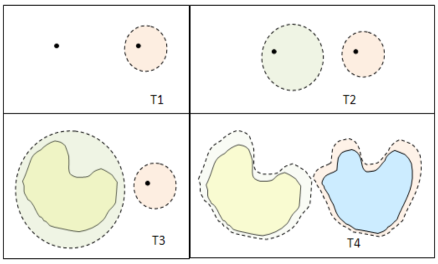
2.8 分离性公理

我们在本书开头就提过，发展拓扑学的动机之一是理解分析学里面的核心概念如收敛性和连续性，从而可以进一步在抽象空间上应用分析的思想和手段处理问题。在分析里面，我们往往需要假定可以用开集来分隔特定的子集。例如，我们希望收敛列的极限唯一，于是我们需要假定空间里任意两点可以被开集分离，即空间满足 Hausdorff 性质，参见命题2.1.18. 又如，在命题2.4.16中我们证明了在 LCH 空间中，紧集和闭集可以分离，并提到了该性质在处理 LCH 空间上的分析问题是作用巨大。

2.8.1 分离性公理

¶ 四个分离性公理

在拓扑中，我们把“用（不相交的）开集来分离某些不相交的集合”这样一类性质称为“分离性公理”．【注意，它与上一节可数性公理里面的可分性概念是非常不同!】分离性公理有很多，我们下面列举四种常用的分离性，其中两个我们已经见过：[27]



定义 2.8.1.（分离性公理）

设 X 是拓扑空间。

(1) 若对于任意 $x \neq y$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$x_1 \in U \setminus V \quad 且 \quad x_2 \in V \setminus U,$$

则我们称 X 为 **Frechét 空间**，简称为 **T1 空间**.

(2) 若对于任意 $x \neq y$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$x_1 \in U, \quad x_2 \in V, \quad 且 \quad U \cap V = \emptyset,$$

则我们称 X 为 **Hausdorff 空间**，简称为 **T2 空间**.

(3) 若对于任意闭集 A 以及任意点 $x \notin A$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$A \in U, \quad x \in V, \quad 且 \quad U \cap V = \emptyset,$$

则我们称 X 为**正则空间**，简称为 **T3 空间**.

(4) 若对于任意不交闭集 $A \cap B = \emptyset$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$A \in U, \quad B \in V, \quad 且 \quad U \cap V = \emptyset,$$

则我们称 X 为**正规空间**，简称为 **T4 空间**. ♣

[27]分离公理往往简称为 (Tn)，其中字母“T”来自德语单词“Trennungsaxiom”，意思是“分离公理”。

注 2.8.2. 在不同的文献中，“正则”、“(T3)”、“正规”、“(T4)” 可能有不同的含义。在文献中至少有 20 种不同的分离公理。根据维基百科，“一般拓扑学中分离公理的历史是错综复杂的，许多不同的含义争相使用相同的术语，而许多不同的术语争相表达相同的概念”。例如，在某些书中，“正则” 或 “(T3)” 表示同时满足我们上述定义中的 (T1) 和 (T3)，而 “正规” 或 “(T4)” 意味着同时满足我们上述定义中 (T1) 和 (T4); 还有一些书则区分正则和 (T3), 比如 “正则” 与我们的这里的意思相同，而 “(T3)” 却意味着在我们上述定义中的 “(T1) 和 (T3)”，并以类似的方式区分 “正规” 和 “(T4)” 的含义。

从这些定义中，大家不难想到：是否可以定义紧集与紧集的分离，或者紧集与闭集的分离？事实上，通过标准的紧性论证，不难发现 “不相交的紧集可分离” 等价于 Hausdorff 性质，“不相交的紧集与闭集可分离” 等价于正则性。细节留作习题。

¶ 等价刻画

我们首先给出上述各个分离公理的等价刻画：

命题 2.8.3.（分离公理的等价刻画）

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间。则

(1) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T1) 当且仅当

$$\boxed{\text{任意单点集 } \{x\} \text{ 是闭集.}}$$

(2) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T2) 当且仅当

$$\boxed{\text{对角线集合 } \Delta=\{(x,x)|x\in X\} \text{ 在 } X\times X \text{ 中是闭集}}$$

(3) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T3) 当且仅当

$$\boxed{\forall x\in X \text{ 以及包含 } x \text{ 的开集 } U, \exists \text{ 开集 } V \text{ 使得 } x\in V\subset\overline{V}\subset U.}$$

(4) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T4) 当且仅当

$$\boxed{\forall \text{ 闭集 } A\subset X \text{ 以及包含 } A \text{ 的开集 } U, \exists \text{ 开集 } V \text{ 使得 } A\subset V\subset\overline{V}\subset U.}$$

证明 证明是标准的, (1) 和 (2) 根据定义得到, 而 (3) 和 (4) 根据开-闭对偶得到:

1. ($\Rightarrow$) 对 $\forall y\neq x, \exists U_y\in\mathscr{T}$ 使得 $x\notin U_y$. 所以

$$\{x\}^c=\bigcup_{y\neq x}U_y$$

是开集, 即 $\{x\}$ 是闭集。

($\Leftarrow$) 对于 $\forall x\neq y$, 取

$$U=\{y\}^c \quad \text{和} \quad V=\{x\}^c.$$

则 $x\notin V, y\notin U$ 且 $x\in U, y\in V$.

2. ($\Rightarrow$) 对 $\forall x\neq y$, (T2) 意味着 $\exists$ $X\times X$ 中的开集 $U_x\times V_y$ 使得

$$(x,y)\in U_x\times V_y \quad \text{且} \quad \Delta\cap(U_x\times V_y)=\emptyset.$$

所以 Δ^c 是开集, 即 Δ 是闭集。

($\Leftarrow$) 对于 $\forall x \neq y$, 即 $(x,y) \in \Delta^c$, $\exists$ 开集 $U \ni x, V \ni y$ 使得

$$(x,y) \in U \times V \subset \Delta^c.$$

由此 $U \cap V = \emptyset$, 因为如果 $z \in U \cap V$, 则

$$(z,z) \in (U \times V) \cap \Delta = \emptyset.$$

3. ($\Rightarrow$) 假设 $x \in$ 开集 U，即 $x \notin$ 闭集 U^c，则存在 $V_1, V_2 \in \mathscr{T}$ 使得

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ x \in V_1,\ \text{且} U^c \subset V_2.$$

所以 $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2^c \subset U$.

($\Leftarrow$) 设 $x \notin$ 闭集 A，即 $x \in$ 开集 A^c，则存在 $V \in \mathscr{T}$ 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset A^c$. 由此

$$V \cap \overline{V}^c = \emptyset,\ x \in V,\ \text{且} A \subset \overline{V}^c.$$

4. ($\Rightarrow$) 设 $A \subset$ 开集 U , 则 $A \cap U^c = \emptyset$. 所以存在 $V_1, V_2 \in \mathscr{T}$ 使得

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ A \subset V_1,\ \text{且} U^c \subset V_2.$$

所以 $A \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2^c \subset U$.

($\Leftarrow$) 设 A, B 是闭集且 $A \cap B = \emptyset$. 则 $A \subset$ 开集 B^c. 所以存在 $V \in \mathscr{T}$ 使得 $A \subset V \subset \overline{V} \subset B^c$. 由此

$$V \cap \overline{V}^c = \emptyset,\ A \subset V\ \text{且} B \subset \overline{V}^c.$$

□

¶ 不同分离公理之间的关系

我们可以研究这些分离公理之间的关系。显然我们有

- $\boxed{\text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T1)}}$,

反之，其他的蕴含关系都不成立：

- $\boxed{\text{(T1)} \not\Rightarrow \text{(T2)}}$, $\boxed{\text{(T1)} \not\Rightarrow \text{(T3)}}$, $\boxed{\text{(T1)} \not\Rightarrow \text{(T4)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cofinite})$.
- $\boxed{\text{(T4)} \not\Rightarrow \text{(T3)}}$, $\boxed{\text{(T4)} \not\Rightarrow \text{(T2)}}$, $\boxed{\text{(T4)} \not\Rightarrow \text{(T1)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$, 其中

  $$\mathscr{T} = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}.$$

  [它是 (T4) 的，因为其中根本不存在不相交的闭集]
- $\boxed{\text{(T3)} \not\Rightarrow \text{(T2)}}$, $\boxed{\text{(T3)} \not\Rightarrow \text{(T1)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$, 其中 $\mathscr{T}$ 由拓扑基

  $$\mathcal{B} = \{[n, n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$$

  生成。在这个拓扑中, 闭子集和开子集是一样的。
- $\boxed{\text{(T2)} \not\Rightarrow \text{(T4)}}$, $\boxed{\text{(T2)} \not\Rightarrow \text{(T3)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$，其中 $\mathscr{T}$ 是由子基

  $$\mathcal{S} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$$

  生成的. 在该拓扑中，$\mathbb{Q}^c$ 是闭集但不能与 $\{0\}$ 分离。
- $\boxed{\text{(T3)} \not\Rightarrow \text{(T4)}}$: 反例为 Sorgenfrey 平面 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey}) \times (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$. [细节参见 Munkres《拓扑学》第 31 节.]

2.8.2 分离性的增强

虽然在这四个分离公理里面，仅有 (T2) 蕴含 (T1)，但我们还是可以粗略地认为 (T4) “强于” (T3)，(T3) “强于” (T2)，(T2) 强于 (T1). 至少，我们有

$\boxed{\text{(T1)+(T4)} \Longrightarrow \text{(T3)}}$，$\boxed{\text{(T1)+(T3)} \Longrightarrow \text{(T2)}}$ 【于是 $\boxed{\text{(T1)+(T4)} \Longrightarrow \text{(T2)}}$】

事实上，紧性、可数性也可以用于“增强”分离性.

¶ 紧性“增强”分离公理

我们首先通过标准的“局部到整体”论证，证明紧性如何“增强”分离公理：

命题 2.8.4. ($\boxed{\text{紧} + \text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T3)}}$)

任何紧 Hausddorff 空间都是正则空间。

证明 设 X 是紧 Hausdorff 空间, $x \in X, A \subset X$ 是闭集 (因此也是紧集)，且 $x \notin A$. 则对于任意 $y \in A$，存在开集 $U_{x,y} \ni x, V_y \ni y$ 使得 $U_{x,y} \cap V_y = \emptyset$. 由 A 的紧性，$\exists V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$ 覆盖 A。因此

$$U := U_{x,y_1} \cap \cdots \cap U_{x,y_n} \quad \text{和} \quad V := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

分别是 x 和 A 的开邻域，且满足 $U \cap V = \emptyset$. □

命题 2.8.5. ($\boxed{\text{紧} + \text{(T3)} \Longrightarrow \text{(T4)}}$)

任何紧正则空间都是正规空间.

证明 设 X 是紧正则空间，A, B 是 X 中不相交的闭子集。则对于任意 $x \in A$, 存在开集 $U_x \ni x, V_x \supset B$ 使得 $U_x \cap V_x = \emptyset$. 由紧性, $\exists U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}$ 覆盖 A. 因此

$$U := U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} \quad \text{且} \quad V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$$

是 x 和 A 的开邻域，且 $U \cap V = \emptyset$. □

作为这两个命题的推论，我们得到如下非常有用的

定理 2.8.6. ($\boxed{\text{紧} + \text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T4)}}$)

任何紧 Hausdorff 空间都是 (T4) 空间。

¶ 局部紧性“增强”分离公理 (T2)

事实上，命题 2.8.4中的条件“紧性”可以被减弱为“局部紧性”，从而有下面更强的

命题 2.8.7. ($\boxed{\text{局部紧} + \text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T3)}}$)

任意局部紧的 Hausdorff 空间是正则的.

证明 设 X 是局部紧正则空间，$x \in U$. 由命题2.4.16. 存在 X 的开集 V 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$，因此 X 是 (T3) 空间. □

¶ 可数性“增强”分离公理 (T3)

把命题 2.8.5证明中“从有限个局部过渡到整体”的过程稍加修改，可以“从可数个局部到过渡整体”，从而证明下面更一般的“可数性增强分离公理”命题

命题 2.8.8. ($\boxed{\text{Lindelöf} + (T3) \Longrightarrow (T4)}$)

任意 Lindelöf 正则空间是正规的.

注意作为推论, 由命题2.7.13我们有

$$\boxed{(A2) + (T3) \Longrightarrow (T4)}, \qquad \boxed{\sigma\text{ 紧} + (T3) \Longrightarrow (T4)}.$$

证明 设 X 是 Lindelöf 且正则的拓扑空间, A, B 是 X 中的不相交闭子集。由命题2.7.14, Lindeöf 性质具有“闭遗传性”，即闭子集 A, B 也是 Lindelöf 空间. 因为 X 是 (T3)，所以 $\forall x \in A, \exists$ 开集 V_x 使得

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset B^c.$$

由于这些 V_x 覆盖了 Lindeöf 的 A，我们可以选择覆盖 A 的可数子覆盖 $V_1, V_2, \cdots$. 同理，可以找到可数多开集 $U_1, U_2, \cdots$ 覆盖 B 使得 $U_i \subset \overline{U_i} \subset A^c$. 令

$$G_n := V_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}) \quad \text{和} \quad H_n := U_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}).$$

则

$$A \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{U_i}^c) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_i}^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

类似地我们有

$$B \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m.$$

最后，

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m) = \emptyset,$$

因为对所有 n, m，根据构造我们有 $G_n \cap H_m = \emptyset$. □

注 2.8.9. 存在复杂的反例表明

- 局部紧正则空间不一定是正规空间。
- Lindelöf 且 Hausdorff 空间不一定是正则空间.