

## 2.8 Urysohn 引理与 Urysohn 度量化定理

我们知道, 相比于一般的拓扑空间, 度量空间有很多非常特殊而优美的性质. 一个自然的问题是: 哪些拓扑空间的拓扑实际上是一个度量拓扑? 这个问题的第一个重要结果是由杰出拓扑学家 Urysohn<sup>28</sup> 所证明的 Urysohn 度量化定理. 在证明过程中, Urysohn 先证明了一个很重要的工具, 即用于构造特定连续函数的 Urysohn 引理. 不少数学家称 Urysohn 引理为“点集拓扑学的第一个非平凡结果”. 它之所以被称为“引理”, 只是因为它最早作为工具出现在 Urysohn 证明 Urysohn 度量化定理的论文中. 后面我们还会看到它的很多应用.

### 2.8.1 Urysohn 引理

#### ¶ Urysohn 引理

我们知道, 正规空间所刻画性质是“不相交的闭集可以被开集分离”. 粗略地说, Urysohn 引理告诉我们

“用开集分离不相交的闭集  $\iff$  用连续实值函数分离不相交的闭集.”

我们先给出 Urysohn 引理的完整叙述:

#### 定理 2.8.1. (Urysohn 引理)

拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  是正规的当且仅当对  $X$  中任意不相交的闭集  $A, B$ , 存在连续函数  $f: X \rightarrow [0, 1]$  使得

$$f(A) = 0 \quad \text{且} \quad f(B) = 1.$$



Urysohn 引理是拓扑学中一个非常重要的工具, 可以用它构造满足特定性质的连续函数. 例如, 根据 Urysohn 引理, 对于任意紧 Hausdorff 空间 (从而正规空间) 的任意两个不同的点  $x$  和  $y$ , 都可以找到连续函数  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  使得  $f(x) = 0, f(y) = 1$ . 特别地, 对于紧 Hausdorff 空间  $X$ , 连续函数代数  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  是分离点的. 我们在接下来还将看到如何使用 Urysohn 引理构造连续函数来证明 Urysohn 度量化定理, 以及如何应用 Urysohn 引理延拓连续函数的定义域, 即 Tietze 延拓定理.

注意对于度量空间, Urysohn 引理的证明是很简单的, 因为对于度量空间, 我们已经有一个非常好的连续函数——距离函数, 从而我们可以直接使用 (参见第 1.1 节习题)

$$f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}. \quad (2.8.1)$$

但是, 对于一般的正规空间, 构造连续函数是不平凡的. 我们如何在一个抽象拓扑空间上构造连续函数呢? 证明的**核心想法**是: 函数是由它的“等高线”(即水平集)刻画的. 于是, 要构造一个连续函数, 我们只要为它指定足够密集 [且足够好] 的“等高线”. 当然,

<sup>28</sup> 乌雷松 (Pavel Urysohn, 1898-1924), 前苏联数学家. 他是著名数学家 N. Luzin 的学生, 1921 年博士毕业 (研究方向是积分方程) 后转向拓扑学的研究, 1924 年在法国 Brittany 海岸游泳时不幸溺水身亡, 很多遗作后由 Pavel Alexandrov 代为发表. 在短短的三年时间里, Urysohn 对维数论做出了重大贡献, 并证明了许多重要的基本定理, 包括本节中我们要学的 Urysohn 引理和 Urysohn 度量化定理. 此外, 前文已提过, 紧性的现代定义 (即任意开覆盖有有限子覆盖) 最早是他和 P. Alexandrov 在 1923 年给出的.

在一般拓扑空间中我们并没有“线”的概念，但是我们可以通过指定函数的“下水平集”来替代“等高线”。怎么指定“下水平集”呢？当然是用特定的开集！

### ¶ Urysohn 引理的证明

下面我们证明 Urysohn 引理.

#### 证明

( $\Leftarrow$ ) 这是容易证明的部分：设  $A, B$  是  $X$  中不交的闭集，且存在连续函数  $f: X \rightarrow [0, 1]$  使得

$$A \subset f^{-1}(0), B \subset f^{-1}(1)$$

则  $f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$  和  $f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$  是  $A$  和  $B$  的不相交的开邻域，故  $(X, \mathcal{T})$  是正规的。

( $\Rightarrow$ ) **步骤 1:** 构造一系列“下水平集”。

我们假设  $A$  是闭集， $U$  是开集且  $A \subset U$ 。我们记  $A = A_0, U = U_1$ 。由于  $X$  是正规的，我们可以找到开集  $U_{1/2}$  和闭集  $A_{1/2}$ （比如可以取  $A_{1/2} = \overline{U_{1/2}}$ ），使得

$$A_0 \subset U_{1/2} \subset A_{1/2} \subset U_1.$$

再重复两次上述过程，我们得到

$$A_0 \subset U_{1/4} \subset A_{1/4} \subset U_{1/2} \subset A_{1/2} \subset U_{3/4} \subset A_{3/4} \subset U_1.$$

通过归纳，对于每个二进有理数

$$r \in D := \left\{ \frac{m}{2^n} \mid n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 2^n \right\}$$

我们可以构造一个开集  $U_r$  和一个闭集  $A_r$ ，使得

$$\textcircled{1} U_r \subset A_r, \forall r \in D.$$

$$\textcircled{2} A_r \subset U_{r'}, \forall r < r' \in D.$$

**步骤 2:** 从“下水平集”构造连续函数。

现在我们定义

$$f(x) = \inf\{r : x \in U_r\} = \inf\{r : x \in A_r\},$$

其中第二个等号来自于①和②，且我们在这里“定义” $\inf \emptyset = 1$ 。于是显然有

$$A \subset f^{-1}(0) \quad \text{且} \quad B = U^c \subset f^{-1}(1).$$

下面证明  $f$  是连续的。因为

$$\{[0, \alpha) \mid \alpha \in D\} \cup \{(\alpha, 1] \mid \alpha \in D\}$$

是  $[0, 1]$  上标准拓扑的一个子基，故只需证明：对  $\forall \alpha \in D$ ， $f^{-1}([0, \alpha))$  和  $f^{-1}((\alpha, 1])$  都是开集。这两条可由如下事实得到：

$$f^{-1}([0, \alpha)) = \bigcup_{r < \alpha} U_r \quad \text{且} \quad f^{-1}((\alpha, 1]) = \bigcup_{r > \alpha} A_r^c.$$

□

**注 2.8.2.** 一个自然的问题是：正则空间是否有类似的性质？答案是否定的<sup>29</sup>。于是，“点与闭集可用函数分离”是跟“点与闭集可用开集分离”不同的分离性质：

**定义 2.8.3. (完全正则空间)**

如果对于拓扑空间  $X$  中的任意闭子集  $A$  和任意  $x_0 \notin A$ ，都存在连续函数  $f: [0, 1] \rightarrow X$  使得

$$f(x_0) = 0 \quad \text{且} \quad f(A) = 1$$

则我们称拓扑空间  $X$  是 **完全正则空间**。



显然完全正则空间必然是正则空间，但反之不成立。读者不妨仔细分析一下定理 2.8.1 的证明过程，看看为什么无法用同样的方法构造出用以分离点和闭集连续函数。

## $F_\sigma$ 集和 $G_\delta$ 集

注意 Urysohn 引理的结论是  $f(A) = 0$ ,  $f(B) = 1$ ，即

$$A \subset f^{-1}(0), \quad B \subset f^{-1}(1).$$

一个自然的问题是：

**问题 1:** 对于正规空间里不交的闭集  $A$  和  $B$ ，是否存在连续函数  $f$  使得

$$A = f^{-1}(0), \quad B = f^{-1}(1)?$$

对于度量空间，这个问题有一个简单的答案：由 (2.8.1) 定义的函数  $f$  满足要求。然而，对于一般的正规空间，我们还需要对  $A$  和  $B$  作出额外假设。为了明白这一点，让我们先考虑下面这个更基本的问题：

**问题 2:** 拓扑空间里的子集  $A$  是某个连续函数零点集的必要条件是什么？

当然，我们需要  $A$  是一个闭集。但这还不够：因为

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),$$

我们必须有

$$f^{-1}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right).$$

换句话说， $f^{-1}(0)$  可以被表示成  $X$  中可数多个开集的交集。

**定义 2.8.4. ( $G_\delta$ -集与  $F_\sigma$ -集)**

设  $(X, \mathcal{T})$  是拓扑空间,  $A \subset X$ .

(1) 如果  $A$  可以被表示成可数多个开集的交集，我们称  $A$  是  $G_\delta$ -集；

(2) 如果  $A$  可以被表示成可数多个闭集的并集，我们称  $A$  是一个  $F_\sigma$ -集。<sup>a</sup>

<sup>a</sup>在数学中，常常使用下标  $\sigma$  (来自法语单词 **somme**, 意思是“和、并”) 来表示“可数并集”，使用下标  $\delta$  (来自德语单词 **Durchschnitt**, 意思是“交集”) 表示“可数交集”，比如可以进一步定义“ $G_\delta$  集”为“可数个  $G_\delta$  集的并集”等等。类似的概念还有  $\sigma$  代数、 $\sigma$  紧、 $\delta$  环等。



<sup>29</sup>一个相对简单的例子可见 A. Mysior, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 81 (4), 1981, 652-653

我们先看几个简单的例子:

### 例 2.8.5.

- (1) 有理数集合  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  是  $F_\sigma$  集, 而无理数集合  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  是  $G_\delta$ -集。  
 (2) 度量空间  $(X, d)$  中的任意闭子集  $F$  都是  $G_\delta$ -集, 因为由习题 1.1,  $x \in F$  当且仅当  $d_F(x) = 0$ , 从而我们有

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid d_F(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

- (3) 考虑赋有乘积拓扑的空间  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ , 则  $X$  是紧 Hausdorff 空间, 从而它是 (T4) 空间, 且每个单点集  $\{a\}$  都是闭集。然而,  $\{a\}$  不是  $G_\delta$ -集。事实上,  $X$  的每个非空  $G_\delta$ -集一定是无穷集: 由乘积拓扑定义,  $X$  中的每个开集  $U$  仅在有限多个位置处取值不是整个  $\{0, 1\}$ , 这意味着每个  $G_\delta$ -集仅在可数多的位置处取值不是整个  $\{0, 1\}$ , 因此它包含 (不可数) 无穷多个元素。特别地, 我们发现,  $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$  上任意一个有零点的连续函数一定同时在不可数多个点处为零。

我们刚刚说明了连续函数的零点集  $f^{-1}(0)$  一定是一个闭  $G_\delta$  集。实际上,

#### 命题 2.8.6. (水平集 $\iff$ 闭 $G_\delta$ 集)

设  $X$  是正规空间。则存在连续函数  $f: X \rightarrow [0, 1]$  满足  $f^{-1}(0) = A$  当且仅当  $A$  是  $X$  中的闭  $G_\delta$ -集。



**证明** 只需证明正规空间里的闭  $G_\delta$ -集都是连续函数的零点集。由于  $A$  是  $G_\delta$ -集, 在  $X$  中存在一族开集  $U_n$  使得  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ . 根据 Urysohn 引理, 存在连续函数  $g_n: X \rightarrow [0, 1]$  使得

$$A \subset g_n^{-1}(0), \quad U_n^c \subset g_n^{-1}(1).$$

现在我们定义

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x).$$

则  $f$  是连续的 (因为连续函数列  $\sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} g_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$ ), 且  $f(A) = 0$ . 此外, 对于任意  $x \notin A$ , 存在  $n$  使得  $x \in U_n^c$ , 即  $g_n(x) = 1$ , 因此  $f(x) \neq 0$ . 于是

$$f^{-1}(0) = A.$$

□

### ¶ Urysohn 引理的一个变体

有了命题 2.8.6, 我们就可以应用在度量空间中用过的技巧给出问题 1 的完整答案:

#### 定理 2.8.7. (Urysohn 引理的变体)

设  $(X, \mathcal{T})$  为正规空间,  $A, B \subset X$ . 则存在连续函数  $f: X \rightarrow [0, 1]$  使得

$$f^{-1}(0) = A, \quad f^{-1}(1) = B$$

当且仅当  $A, B$  是  $X$  中不相交的闭  $G_\delta$  集。



**证明** 显然, 如果存在这样的连续函数  $f$ , 那么  $A, B$  必须是不相交的闭  $G_\delta$  集。

反之, 设  $A, B$  是不相交的闭  $G_\delta$  集。由命题 2.8.6, 存在连续函数  $f_i : X \rightarrow [0, 1] (i = 1, 2)$  使得

$$f_1^{-1}(0) = A, \quad f_2^{-1}(0) = B.$$

因为  $A \cap B = \emptyset$ , 所以在  $X$  上恒有  $f_1 + f_2 > 0$ . 于是我们可以定义

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_2(x)}, \quad \forall x \in X.$$

显然  $f : X \rightarrow [0, 1]$  是连续的, 而且  $f^{-1}(0) = A, f^{-1}(1) = B$ . □

### ¶ Urysohn 引理: LCH 版本

我们可以不假设  $X$  是正规空间, 而假设  $X$  是 LCH 空间, 即局部紧 Hausdorff 空间。这里最关键的观察是: 尽管局部紧 Hausdorff 空间不一定是正规的 (因此我们可能无法分离不相交的闭集), 但我们仍然有一个很好的分离性质, 即命题 2.4.16, 它让我们可以将不相交的紧集与闭集分开! 于是很自然地会考虑用连续函数分离不相交的紧集与闭集。事实上, 我们可以还可以进一步要求“用于分离不交的紧集与闭集的连续函数”仅在某个紧集上有非零的值。这类“仅在紧集上取非零值的函数”在应用中非常重要, 为此我们给出如下定义:

#### 定义 2.8.8. (紧支撑函数)

设  $X$  是拓扑空间,  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  是连续函数. 我们称闭集

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

为  $f$  的支撑集. 如果  $f$  的支撑集合  $\text{supp}(f)$  是紧集, 则我们称  $f$  是一个紧支函数. 

拓扑空间  $X$  上所有紧支函数的集合记为  $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ , 它是有界连续函数集合的子集。

现在我们可以陈述 LCH 空间的 Urysohn 引理, 注意其条件与结论跟标准的 Urysohn 引理均略有不同:

#### 定理 2.8.9. (LCH 空间的 Urysohn 引理)

设  $X$  是 LCH 空间,  $K, F$  是  $X$  中的不相交子集, 其中  $K$  是紧集且  $F$  是闭集, 那么存在一个紧支的连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(K) = 1$  和  $f(F) = 0$ . 

**证明** 由命题 2.4.16, 存在开集  $V$  使得  $\bar{V}$  是紧集, 且  $K \subset V \subset \bar{V} \subset F^c$ . 注意到子空间  $\bar{V}$  是紧 Hausdorff 空间, 从而是正规空间. 于是在  $\bar{V}$  中对  $K \subset V$  应用 Urysohn 引理, 存在连续函数  $f_0 : \bar{V} \rightarrow [0, 1]$  使得

$$f_0(K) = 1, \quad f_0(\bar{V} \setminus V) = 0.$$

令  $f_1 : V^c \rightarrow [0, 1]$  为恒零函数. 则  $f_0, f_1$  分别为定义在闭集  $\bar{V}$  和  $V^c$  上的连续函数, 且在交集  $\bar{V} \cap V^c = \bar{V} \setminus V$  上相同. 于是由粘结引理 (见习题 1.3), 可得到连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$ . 最后因为  $\text{supp}(f)$  是紧集  $\bar{V}$  中的闭集, 所以是紧集, 即  $f$  是紧支函数. □

特别地, 任意 LCH 空间都是完全正则空间。

## 2.8.2 Urysohn 度量化定理

### ¶ 可度量化性质

我们已经多次看到, 度量空间是一类非常特殊的拓扑空间, 具有很多良好的性质。一个自然的问题是: 哪些拓扑空间的拓扑可以由度量生成?

#### 定义 2.8.10. (可度量化空间)

设  $(X, \mathcal{T})$  是拓扑空间. 如果在  $X$  上存在度量结构  $d$  使得度量拓扑  $\mathcal{T}_d$  与  $\mathcal{T}$  一致, 则我们称  $(X, \mathcal{T})$  是 **可度量化的**.



**例 2.8.11.**  $([0, 1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{product})$  是可度量化的; 而  $([0, 1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{box})$  和  $(\{0, 1\}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{product})$  都不是可度量化的, 因为它们不是第一可数的。

我们在第 2.3 节中已经看到, 可度量化的拓扑空间必须是第一可数的、Hausdorff 和正规的。然而, 这些条件是不充分的。

**例 2.8.12.** Sorgenfrey 直线  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sorgenfrey})$  是第一可数的, Hausdorff, 正规的, 但不是可度量化的:

- 在例 2.7.1(2) 中我们已经证明了  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sorgenfrey})$  是第一可数的。
- 在例 2.7.8 中我们已经证明了它可分但不是第二可数的, 从而由命题 2.7.9, 它不是可度量化的。
- 它是 Hausdorff 的, 这是因为任意  $x < y$  可以用开集  $[x, y)$  和  $[y, y + 1)$  分隔开。
- 还需要证明  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sorgenfrey})$  是正规的, 即不相交的闭集可以被不相交的开集分隔开。设  $A, B$  是  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sorgenfrey})$  中不相交的闭集。对任意  $a \in A$ , 我们有  $a \in B^c$ 。因为  $B^c$  是开集, 我们可以取  $\varepsilon_a > 0$  使得  $[a, a + \varepsilon_a) \cap B = \emptyset$ 。类似地, 对于任意  $b \in B$  我们取  $\varepsilon_b > 0$  使得  $[b, b + \varepsilon_b) \cap A = \emptyset$ 。注意对于  $\forall a \in A$  和  $b \in B$ , 我们总有

$$[a, a + \varepsilon_a) \cap [b, b + \varepsilon_b) = \emptyset,$$

否则我们有  $b \in [a, a + \varepsilon_a)$  或  $a \in [b, b + \varepsilon_b)$ , 矛盾。因此

$$U_A := \cup_{a \in A} [a, a + \varepsilon_a) \quad \text{和} \quad U_B := \cup_{b \in B} [b, b + \varepsilon_b)$$

是分隔  $A$  和  $B$  的不相交开集。

### ¶ Urysohn 度量化定理

尽管一般的度量化问题很困难, 但对于第二可数空间, 这个问题有一个简单答案:

#### 定理 2.8.13. (Urysohn 度量化定理)

第二可数拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  是可度量化的当且仅当它是 Hausdorff 且正规的。



注意由例 2.8.12, 不能把 Urysohn 度量化定理中的条件“第二可数”改为“可分离”。因为紧 Hausdorff 空间都是正规的, 所以结合命题 2.7.4 我们得到



**推论 2.8.14. (CH 空间: 可度量化  $\iff$  (A2))**

紧 Hausdorff 空间是可度量化的当且仅当它是第二可数的。



Urysohn 度量化定理的证明类似于定理 2.7.11: 我们将  $(X, \mathcal{T})$  嵌入到 Hilbert 立方体  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ , 这样  $(X, \mathcal{T})$  就继承了一个子空间度量! 唯一的区别是: 我们现在没有可数稠密子集, 所以无法用“到可数多个点的距离”来定义嵌入; 作为替代, 我们将利用可数基以及 Urysohn 引理构造足够多的连续函数来定义所需的嵌入.

**¶ Urysohn 度量化定理: 证明**

**证明** 只需证明第二可数的 Hausdorff 正规空间是可度量化的. 正如我们上面提到的, 我们要构造一个“嵌入”

$$F : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}.$$

我们设  $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$  是  $\mathcal{T}$  的一组可数基.

**步骤 1: 分隔集合** 对任意  $x \in X$  和  $x$  的任意开邻域  $U$ , 寻找  $(m, n)$  使得

$$x \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_m \subset U.$$

对任意  $x \in X$  和  $x$  的任意开邻域  $U$ , 我们首先选取  $B_m$  使得  $x \in B_m \subset U$ . 由于  $\{x\}$  和  $B_m^c$  是  $X$  中不相交的闭集, 根据正规空间的定义, 存在开集  $U_1, V_1$  使得

$$x \in U_1, \quad B_m^c \subset V_1, \quad U_1 \cap V_1 = \emptyset.$$

又因为  $\mathcal{B}$  是一个拓扑基, 所以存在  $B_n \in \mathcal{B}$  使得  $x \in B_n \subset U_1$ . 因此

$$\overline{B_n} \subset \overline{U_1} \subset V_1^c \subset B_m.$$

所以  $x \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_m \subset U$ .

**步骤 2: 构造函数** 构造连续函数列  $f_1, f_2, \dots$  满足:  $\forall x \in X$  和任意开集  $U \ni x, \exists n$  使得

$$f_n(x) = 1, \quad f_n(U^c) = 0.$$

首先, 我们记

$$I := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \overline{B_n} \subset B_m\}.$$

由步骤 1,  $I \neq \emptyset$ . 对于任意  $(m, n) \in I$ , 我们对不相交的闭集  $\overline{B_n}$  和  $B_m^c$  应用 Urysohn 引理, 得到一个连续函数  $g_{n,m} : X \rightarrow [0, 1]$  使得

$$g_{n,m}(\overline{B_n}) = 1 \quad \text{且} \quad g_{n,m}(B_m^c) = 0.$$

因为  $I$  是可数集, 我们可以将这些  $g_{n,m}$  重新编号为  $f_1, f_2, f_3, \dots$ . 根据步骤 1, 函数列  $f_1, f_2, \dots$  满足要求的性质.

**步骤 3: 完成度量化** 将  $X$  嵌入到 Hilbert 方体  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ .

最后我们定义

$$F : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}, \quad x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

我们想证明  $F$  是从  $X$  到  $F(X) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$  的同胚. 因为  $F(X)$  是度量空间  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  中的一个

子集, 它上面存在一个子空间度量  $d_0$  使得度量拓扑与子空间拓扑一致. 将该度量拉回到  $X$ , 即在  $X$  上定义度量  $d(x_1, x_2) := d_0(F(x), F(y))$ . 由定义,  $F : (X, d) \rightarrow (F(X), d_0)$  是等距同构. 从而我们还有同胚  $F : (X, \mathcal{T}_d) \rightarrow (F(X), \mathcal{T}_{d_0})$ . 由此可得  $X$  上的度量拓扑  $\mathcal{T}_d$  与  $X$  上的原始拓扑  $\mathcal{T}$  相同, 从而  $X$  是可度量化化的.

下面证明  $F$  是从  $X$  到  $F(X) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$  的同胚.

- 因为所有  $f_i$  都是连续的, 所以  $F$  是连续的.
- $F$  是单射: 对任意  $x \neq y$ , 有  $x \in \{y\}^c$ , 因此存在  $n$  使得

$$f_n(x) = 1 \quad \text{且} \quad f_n(y) = 0.$$

于是  $F$  是从  $X$  到  $F(X)$  的连续双射.

- $F$  从  $X$  到其像集  $F(X)$  的一个开映射: 设  $U \subset X$  是开集, 需要证明  $F(U)$  是  $F(X)$  里面的开集. 为此我们任取  $z_0 \in F(U)$  以及  $x_0 \in U$  使得  $z_0 = F(x_0)$ . 由步骤 2, 存在  $n$  使得

$$f_n(x_0) = 1 \quad \text{且} \quad f_n(U^c) = 0.$$

设  $V = \pi_n^{-1}((0, +\infty))$ , 其中  $\pi_n$  是从  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  到它的第  $n$  个分量的投影映射. 则  $V$  在  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  中是开集. 所以

$$W := V \cap F(X)$$

在  $F(X)$  中是开集. 为了证明  $F$  是开映射, 只需证明  $z_0 \in W \subset F(U)$ :

– 我们有  $z_0 \in W$ , 这是因为

$$\pi_n(z_0) = \pi_n(F(x_0)) = f_n(x_0) > 0.$$

– 我们有  $W \subset F(U)$ , 这是因为对任意  $z \in W$ , 存在  $x$  使得

$$F(x) = z \quad \text{且} \quad f_n(x) > 0,$$

由此推出  $x \in U$ , 从而  $z \in F(U)$ . □

**注 2.8.15.** 仔细回顾上述证明的第三步, 我们不难发现

设  $X$  是 (T1) 空间,  $\{f_\alpha \mid \alpha \in J\}$  是  $X$  上的一族连续函数, 满足:  $\forall x \in X$  和任意开集  $U \ni x, \exists \alpha \in J$  使得

$$f_\alpha(x) = 1, \quad f_\alpha(U^c) = 0.$$

则我们可以得到一个拓扑嵌入  $F : X \rightarrow [0, 1]^J$ .

另一方面, 根据定义 2.8.3, 我们可以找到这样一族函数当且仅当  $X$  是完全正则空间. 因为完全正则空间必然是 (T3) 空间, 而在 (T3) 空间里 (T1) 与 (T2) 等价, 于是我们得到

**命题 2.8.16.** (完全正则 + Hausdorff  $\implies$  嵌入方体)

若  $X$  是 Hausdorff 且完全正则空间, 则  $X$  可以被拓扑嵌入某个“方体”  $[0, 1]^J$  中. 

特别地, 任何 LCH 空间可以被拓扑嵌入方体中, 任何 (T2) 且 (T4) 空间可以被嵌入方体中.