2.9 Tietze 扩张定理

尽管我们通过 Urysohn 引理得到的函数看起来太过特殊，但通过巧妙地运用 Urysohn 引理所烧制出来的砖块，我们可以搭建出各种宏伟的建筑，这一点我们在证明 Urysohn 引理的变体 (定理2.8.7) 以及 Urysohn 度量化定理时已经有所了解. 下面应用 Urysohn 引理证明 Tietze 扩张定理 [30]，并给出 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理的一些应用.

2.9.1 Tietze 扩张定理

¶ 扩张

在分析中，将给定的函数或映射从较小的区域扩张到较大的区域【且同时保留一些特定的性质，例如连续性（或光滑性）、有界性等等】总是很重要的. 为此，我们先给出如下定义：

定义 2.9.1.（扩张）

设 $A \subset X$ 是一个子集，$f : A \to Y$ 是定义在 A 上的一个映射. 如果定义在全空间 X 上的映射 $\tilde{f} : X \to Y$ 满足

$$\tilde{f}(x) = f(x), \qquad \forall x \in A,$$

则我们称映射 $\tilde{f}$ 是映射 f 的一个 **扩张**. ♣

例如，任意函数 $f : A \to \mathbb{R}$ 都有一个简单的扩张，即零扩张

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

当然，对我们而言，最重要的性质之一是连续性. 所以我们希望把定义在子集上的连续映射扩张为全空间的连续映射. 于是，自然的问题是：

> 给定子空间上的连续映射 $f : A \to Y$，是否存在连续扩张 $f : X \to Y$？如果存在，是否唯一？

不难想见，唯一性一般是没有的，因为映射在 A 上的取值无法控制映射在“跟 A 中的点较远处的点”上的取值. 但是，如果 A 是稠密的，则我们有

引理 2.9.2.（稠密子集扩张的唯一性）

设 Y 是 Hausdorff 空间，A 是 X 的稠密子集，$f : A \to Y$ 是连续映射. 则至多存在一个连续扩张 $f : X \to Y$. ♢

其证明留作习题.

[30] 蒂茨（H. Tietze，1880-1964），奥地利数学家，在一般拓扑学、地图着色、组合群论等领域均有重要贡献. Tietze 扩张定理有时候也被称为“Tietze-Urysohn-Brouwer 扩张定理”：该定理最早由 Lebesgue 在 1907 年对 $X = \mathbb{R}^2$ 的特殊情况证明，然后 1915 年被 Tietze 推广到所有度量空间，之后 1918 年 Brouwer 对于欧氏空间情形给出了另一个证明. 而这里所叙述的正规空间的版本是由 Urysohn 在 1925 年给出的.

另一方面，如果 A 不是闭集，则我们不能期望将 **所有** 定义在 A 上的连续函数扩张为定义在 X 上的连续函数：

例 2.9.3. 如果 $A \subset \mathbb{R}$ 不是闭集，那么存在一个数 $a \in A'$ 但 $a \notin A$. 考虑 A 上的（有界）连续函数

$$f(x) := \sin \frac{1}{x-a},$$

它显然不能被扩张为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

¶ Tietze 扩张定理

然而，如果 X 是正规空间且 A 是 X 中的闭集，则下面的 Tietze 扩张定理告诉我们 A 上的任何连续函数 f 都可以连续扩张为 X 上的连续函数，且若 f 是有界的，则扩张之后的函数可以具有相同的界：

定理 2.9.4.（Tietze 扩张定理）

拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是正规空间当且仅当对于任意闭集 $A \subset X$，A 上的任意连续函数 $f : A \to [-1, 1]$ 可以被扩张为 X 上的连续函数 $\widetilde{f} : X \to [-1, 1]$. ♡

Tietze 扩张定理可以看作是 Urysohn 引理的推广（尽管它们实际上是等价的），因此可以直接适用于更多的情况，是拓扑学中最有用的定理之一.

构造扩张的**想法**如下：我们考虑“限制映射”

$$r_A : \mathcal{C}(X, [-1, 1]) \to \mathcal{C}(A, [-1, 1]), \quad g \mapsto g|_A.$$

我们只要证明 r_A 是满射即可，换言之，我们需要求解方程

$$r_A(g) = f.$$

为此，我们应用分析中的标准技巧：

① 首先找该方程的一个近似解；

思路：我们只会用 Urysohn 引理构造全空间的连续函数. 于是，直接对 f 操作是不方便的. 为此，我们把 f 做一个“截断”，即

$$\bar{f} : A \to [0, 1], \qquad \bar{f}(x) := \begin{cases} 1/3, & 若\ f(x) \geqslant 1/3, \\ f(x), & 若\ |f(x)| \leqslant 1/3, \\ -1/3, & 若\ f(x) \leqslant -1/3. \end{cases}$$

由定义，它是函数 f 的一个“近似”：

$$|f(x) - \bar{f}(x)| \leqslant 2/3, \qquad \forall x \in A.$$

接下来我们用 Urysohn 引理构造连续函数 $g : X \to [0, 1]$，使得 $r_A(g) \approx \bar{f}$. 根据构造，$\bar{f}$ 在一个闭子集上达到最大值 $1/3$，在另一个闭子集上达到最小值 $-1/3$. 对这两个闭集用 Urysohn 引理即可得到我们想要的函数.

② 然后迭代地寻找一列越来越好的近似解；

③ 最后证明这一列近似解收敛到真正的解.

¶ Tietze 扩张定理的证明

证明

($\Leftarrow$) 设 A, B 是在 X 中不相交的闭集. 那么 $A \cup B$ 在 X 中是闭集并且

$$f : A \cup B \to [-1, 1], \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

是 $A \cup B$ 上的连续函数. 根据假设, f 可以扩张为连续函数 $\widetilde{f} : X \to [-1, 1]$ 且在 $A \cup B$ 上 $\widetilde{f} = f$. 于是 $f^{-1}((-\infty, 0))$ 和 $f^{-1}((0, +\infty))$ 是 A 和 B 的不相交的开邻域, 从而 X 是正规的.

($\Rightarrow$) 按照前面的分析, 我们把证明过程分成三步:

步骤 1 [构造一个近似解]

我们取

$$A_1 := \{x \in A \,|\, f(x) \geqslant 1/3\} \quad 和 \quad B_1 := \{x \in A \,|\, f(x) \leqslant -1/3\},$$

则 A_1 和 B_1 是 X 中不相交的闭集. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $g : X \to [-1/3, 1/3]$ 使得

$$g(A_1) = 1/3 \quad 且 \quad g(B_1) = -1/3.$$

不难验证, $g(x)$ 还满足 $|f(x) - r_A(g)(x)| \leqslant 2/3, \ \forall x \in A$.

步骤 2 [进行迭代]

记 $f = f_1$. 由步骤 1, 我们得到了一个连续函数 $g_1 : X \to [-1/3, 1/3]$ 使得

$$|f_1(x) - r_A(g_1)(x)| \leqslant 2/3, \ \forall x \in A.$$

将 f 替换为 $f_2 = f_1 - r_A(g_1)$ 并重复步骤 1, 我们可以得到连续函数 $g_2 : X \to [-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}]$ 使得

$$|f_2(x) - r_A(g_2)(x)| \leqslant (2/3)^2, \ \forall x \in A.$$

继续重复这个过程, 我们可以找到一列连续函数

$$g_n : X \to \left[-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}\right]$$

使得: 如果我们记 $f_n = f_{n-1} - r_A(g_{n-1})$, 则

$$|f_n(x) - r_A(g_n)(x)| \leqslant (2/3)^n, \ \forall x \in A.$$

步骤 3 [收敛到解]

定义函数

$$\widetilde{f}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

因为每个 g_n 在 X 上都是连续的, 并且

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1},$$

所以该级数一致收敛，从而 $\widetilde{f}$ 在 X 上是连续的，并且

$$|\widetilde{f}(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = 1, \quad \forall x \in X.$$

最后，对于 $\forall x \in A$ 以及 $\forall N \in \mathbb{N}$，我们有

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \right| = \left| f_2(x) - \sum_{n=2}^{N} g_n(x) \right| = |f_N(x) - g_N(x)| \leqslant (2/3)^N.$$

所以对于 $x \in A$ 有 $f(x) = \widetilde{f}(x)$. □

¶ 扩张无界连续函数

显然，在 Tietze 扩张定理的叙述中，我们可以把像空间 $[-1,1]$ 替换为任意闭区间 $[a,b]$. 下面我们给出 Tietze 扩张定理的一个不那么明显的变体：把 $[-1,1]$ 替换为 $\mathbb{R}$.

定理 2.9.5.（无界连续函数的 Tietze 扩张定理）

设 X 是正规空间，且 $A \subset X$ 是闭集，则任意连续函数 $f: A \to \mathbb{R}$ 都可以扩张为连续函数 $\widetilde{f}: X \to \mathbb{R}$. ♡

证明 将 f 与反正切函数 $\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 复合，我们得到一个连续函数

$$f_1 := \arctan \circ f : A \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

由 Tietze 扩张定理，f_1 可以被扩张为连续函数[31]

$$\widetilde{f_1} : X \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

令

$$B = \widetilde{f_1}^{-1}(\pm\frac{\pi}{2}).$$

则 B 是 X 的闭子集且 $B \cap A = \emptyset$. 由 Urysohn 引理，存在连续函数 $g: X \to [0,1]$ 使得

$$g(A) = 1 \quad 且 \quad g(B) = 0.$$

定义

$$h(x) = \widetilde{f_1}(x) g(x).$$

那么 h 是将 X 映射到开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的连续函数. 最后我们令

$$\widetilde{f}(x) = \tan h(x).$$

则 $\widetilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且对于 $\forall x \in A$，我们有

$$\widetilde{f}(x) = \tan h(x) = \tan \widetilde{f_1}(x) = \tan f_1(x) = x.$$

□

类似地，我们还可以（保范地）扩张复值函数，或扩张 Lipschitz 函数，甚至将光滑函数扩张为光滑函数（Whitney 扩张定理）等等.

[31]注意此处我们无法直接得到 $\tilde{f}_1 : X \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，因为根据前面定理证明中的构造，$\tilde{f}_1$ 是一个级数的极限，其值有可能会取到 $\pm\frac{\pi}{2}$.

¶ LCH 空间的 Tietze 扩张定理

类似于 LCH 空间的 Urysohn 引理，我们也可以把条件“X 是正规空间”替换为“X 是 LCH 空间”．此时，因为 LCH 空间未必是正规空间，一般而言我们无法将所有定义在 X 的闭集上的连续函数作连续扩张，但是我们可以将所有定义在 X 的紧集上的连续函数做连续扩张，而且，我们还能让扩张后的连续函数具有紧支集：

定理 2.9.6.（LCH 空间的 Tietze 扩张定理）

设 X 为 LCH 空间，K 为 X 的紧子集. 那么任意连续函数 $f: K \to [-1,1]$ 都可以被扩张为具有紧支集的连续函数 $\tilde{f}: X \to [-1,1]$.

证明 证明跟定理2.8.9非常类似，即取开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧集，且 $K \subset V \subset \overline{V} \subset X$，然后对子空间 $\overline{V}$（它是紧 Hausdorff 空间，从而也是正规空间）应用 Tietze 扩张定理：$K \cup (\overline{V} \setminus V)$ 是 $\overline{V}$ 中的闭集，函数 $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 0, & x \in \overline{V} \setminus V \end{cases}$ 是定义在该闭集上的连续函数，从而可以被扩张为连续函数 $\tilde{f}_1: \overline{V} \to [-1,1]$. 最后将 $\tilde{f}_1$ 做零扩张得到函数 $\tilde{f}: X \to [-1,1]$. 由粘结引理，$\tilde{f}$ 是连续函数，而且 $\operatorname{supp}(f) \subset \overline{V}$ 是紧集的闭子集，从而也是紧集. □

¶ 扩张连续映射的注记

注 2.9.7. 显然我们可以把“向量值”连续函数

$$f: A \to [0,1]^n, \quad f: A \to \mathbb{R}^n, \quad \text{或} \quad f: A \to [0,1]^S$$

扩张为 X 上相应的向量值连续函数，即扩张为

$$\widetilde{f}: X \to [0,1]^n, \quad \widetilde{f}: X \to \mathbb{R}^n, \quad \text{或} \quad \widetilde{f}: X \to [0,1]^S,$$

其中 S 是任意集合. 为此，我们只需分别扩张 f 的每个分量即可.

注 2.9.8. 另一方面，对于一般的拓扑空间 Y，我们不能期望将闭子集 A 上的任意连续函数 $f: A \to Y$ 都扩张为 X 上的连续函数 $\widetilde{f}: X \to Y$. 例如，

- 赋予 $\{0,1\}$ 离散拓扑. 为了将函数 $f: \{0,1\} \to Y$ 扩张为连续函数

  $$\widetilde{f}: [0,1] \to Y,$$

  一个必要条件是：存在一个连续函数 $\gamma: [0,1] \to Y$ 满足 $\gamma(0) = f(0), \gamma(1) = f(1)$. 用后文第 3.2 节的语言，我们需要 $f(0)$ 和 $f(1)$ 位于 Y 的同一个 **道路连通分支** 中.
- 为了将连续函数 $f: S^1 \to Y$ 扩张为连续函数 $\widetilde{f}: D \to Y$，其中 D 是平面上的单位圆盘，我们需要像集 $f(S^1)$ 在 Y 中是 **可缩的**（这是一种更高级别的连通性）．特别地，我们将会看到恒等映射

  $$f: S^1 \to S^1, \quad x \mapsto x$$

  不能被扩张为连续映射 $\widetilde{f}: D \to S^1$.

我们将在本书的后半部分深入研究这些连通性现象.

2.9.2 Tietze 扩张定理与 Urysohn 引理的应用

下面我们给出 Tietze 扩张定理以及 Urysohn 引理的一些应用.

¶ 应用 1: 连续函数逼近可测函数

在实分析中，我们有如下的 Lusin 定理，它告诉我们“可测函数在很大一个区域上是连续函数”:

定理 2.9.9.（Lusin 定理）

设 X 是 LCH 空间，μ 是 X 上的一个正则 Radon 测度.[a] 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是 X 上的一个可测函数，且存在具有有限测度的 Borel 集 E 使得 f 在 E^c 上为 0. 则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $K \subset E$ 使得 $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$，且 f 在 K 上连续.

[a]即 μ 是一个定义在全体 Borel 集上的测度，满足以下三个条件:
- 对于紧集 K，由 $\mu(K) < +\infty$.
- 外正则性：对任意 Borel 集 A，有 $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U\text{是开集}\}$.
- 内正则性：对任意 Borel 集 A，有 $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K\text{是紧集}\}$.

♡

应用 LCH 版本的 Tietze 扩张定理，我们可以得到

推论 2.9.10.（连续函数几乎处处逼近可测函数）

在 Lusin 定理的假设下，存在一列紧支连续函数几乎处处收敛于 f.

♡

证明 根据 Lusin 定理，存在满足条件 $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$ 的紧集 $K \subset E$，使得 f 在 K 上连续. 由 LCH 空间的 Tietze 扩张定理即定理2.9.6，存在 $g \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ 使得 $g|_K = f$. 另一方面，由外正则性，存在开集 $U \supset E$ 使得

$$\mu(U \setminus E) < \varepsilon.$$

对于紧集 K 跟闭集 U^c 应用 LCH 空间的 Urysohn 引理，可得连续函数 $h \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ 使得

$$h(K) = 1, \quad h(U^c) = 0.$$

于是，对任意 $\varepsilon > 0$，我们得到紧支连续函数 $gh \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ 使得

$$\mu(\{x \mid g(x)h(x) \neq f(x)\}) < 2\varepsilon.$$

最后分别取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，我们得到一列紧支连续函数 g_n 依测度收敛于 f. 再由 Riesz 定理，g_n 有子列几乎处处收敛于 f. □

¶ 应用 2: 度量空间中的伪紧性

我们引入一个新的紧性定义:

定义 2.9.11.（伪紧）

若拓扑空间 X 上的所有连续函数都是有界的，则我们称 X 是**伪紧**的.

♣

根据推论2.1.12，任意紧空间或者列紧空间都是伪紧的. 反之一般不成立:

例 2.9.12. 考虑 $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，赋以拓扑

$$\mathscr{T} = \{U \mid \infty \in U \text{或者} U = \emptyset\}.$$

则 X 上不存在不交的非空开集，于是 X 上的任意连续函数必须是常数. 但显然 X 是不紧的，因为开集族 $\{\{x, \infty\}_{x\in\mathbb{R}}\}$ 是一个没有有限子覆盖的开覆盖.

我们注2.3.29 中提到，度量空间 X 是紧的当且仅当它是伪紧的. 现在我们证明该命题：

命题 2.9.13.（度量空间：紧 = 伪紧）

度量空间 (X, d) 是紧的当且仅当任意连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 是有界的.

证明 只要证明伪紧的度量空间是紧的. 我们用反证法. 假设度量空间 (X, d) 是伪紧的但不是紧的，则由定理2.3.28，(X, d) 不是极限点紧的. 于是存在无限子集 $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 使得 $A' = \emptyset$. 特别地，A 是闭集，并且每个 x_n 在 A 中都是孤立点. 于是函数

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x_n) = n$$

是闭集 A 上的连续函数. 由 Tietze 扩张定理，f 可以被扩张为连续函数 $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$. 于是 $\widetilde{f}$ 是 X 上的无界连续函数，矛盾. □

注意：事实上我们证明了更强的结论：

$$\boxed{\text{(T4)+ 极限点紧} \Longrightarrow \text{伪紧}}.$$

¶ 应用 3: Cantor 集的应用

我们的第三个应用涉及到 Cantor 集

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right).$$

在第 2.2 节的习题中，我们证明了映射

$$g : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to C \subset [0, 1], \quad a = (a_1, a_2, \cdots) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} a_k$$

是从 $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 到 Cantor 集 C 的同胚，并证明了映射

$$h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]^2, \quad a = (a_1, a_2, \cdots) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^k}\right)$$

是一个连续满射. 于是，我们得到一个连续满射

$$h \circ g^{-1} : C \to [0, 1]^2.$$

由于 C 在 $[0, 1]$ 中是闭集，因此由 Tietze 扩张定理，存在一个连续满射

$$f : [0, 1] \to [0, 1]^2.$$

一般而言，我们把从 $[0, 1]$ 到拓扑空间的连续映射叫做曲线，于是我们得到了一条填满单位正方形的曲线！这种能填满正方形的曲线最早是 Peano [32]在 1890 年发现的：

[32]G. Peano（皮亚诺，1858-1932），意大利数学家、逻辑学家、语言学家. 他的知名工作包括：证明了有关微分方程初值问题的 Peano 存在性定理，提出了自然数的 Peano 公理体系，构造填满正方形的 Peano 曲线，以

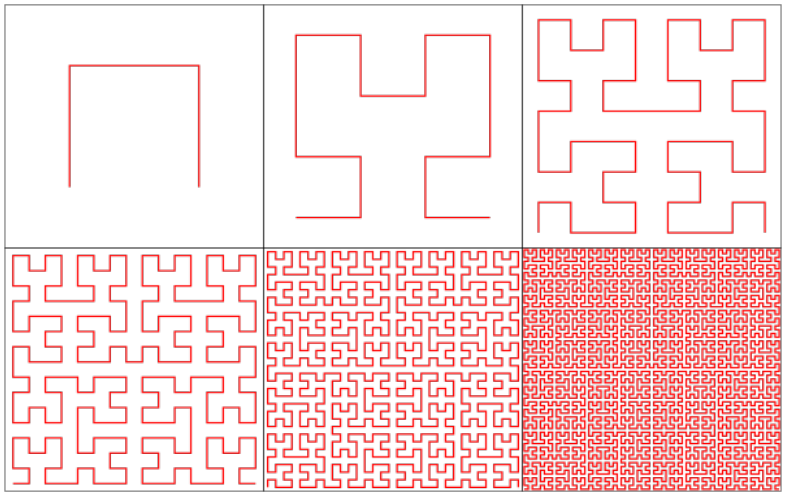
定义 2.9.14.（Peano 曲线）

我们称任意一个从 $[0,1]$ 到 $[0,1]^2$ 的连续满射为一条 **Peano 曲线**或**空间填充曲线**. ♣

所以，我们用 Cantor 集构造出的函数 f 是一条 Peano 曲线！存在 Peano 曲线这一事实，使得人们不得不仔细思考下面这个问题：什么是维数？连续映射可以把低维集合映满高维集合，那维数还是拓扑不变量吗？幸运的是，欧氏空间的维数确实是拓扑不变量. 这个命题的证明远比我们想象的要复杂，我们将会在第 4 章中给出详细证明.

注 2.9.15.

(1) 我们给出的是 Peano 曲线存在性的“非构造性”证明. 文献中也有许多“构造性证明”，可以从简单的曲线出发，迭代地构造一系列曲线，其极限是 Peano 曲线.



(2) 空间填充曲线并不只是理论上的怪物. 它们在现实生活中也有重要应用. 例如，它可被用于将多维数据（如地图数据）存储到计算机中（线性排列）：我们希望相近的地图数据（高维数据）被存储在数据库相近的位置[这就是连续性！]，以便我们在使用地图时不必同时读取分散在很多不同地方的数据.

用类似的方法，可以构造连续满射

$$f:[0,1]\to[0,1]^n$$

甚至可以构造连续满射

$$f:[0,1]\to[0,1]^{\mathbb{N}},$$

为此，我们只要把 $\mathbb{N}$ 分解成可数个 $\mathbb{N}$ 的无交并，例如

$$\mathbb{N}=\bigcup_n\{2^n(2k+1)\mid k\in\mathbb{N}\}$$

然后由 1.4 节习题，可以得到同胚

$$h_\infty:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}},$$

及用于严格定义曲线长度和曲面面积的 Jordan-Peano 测度等.

从而得到一个连续满射

$$f_\infty = (h, h, \cdots) \circ h_\infty \circ g^{-1} : C \to [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

作为应用，我们证明

定理 2.9.16.（Cantor 集的“通有”性）

对任意紧度量空间 (X, d)，均存在从 Cantor 集 C 到 X 的连续满射. ♡

证明 根据定理2.7.11，X 同胚于 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的某个闭子集 F. 由 f_∞ 的连续性，$f_\infty^{-1}(F)$ 是 C 的闭子集. 根据习题 2.2，存在连续映射 $f : C \to F$ 使得 $f|_F$ 是恒等映射. 于是 $f_\infty \circ f$ 就是从 Cantor 集合 C 到 X 的连续满射. □

¶ 应用 4: Stone-Čech 紧化.

我们先回忆一下习题 2.1 中所引入的如下概念：

定义 2.9.17.（紧化）

设 X 是拓扑空间，Y 是紧拓扑空间，且存在拓扑嵌入 $f : X \to Y$ 使得 $\overline{f(X)} = Y$，则我们称紧拓扑空间 Y（以及嵌入映射 f）是拓扑空间 X 的**紧化**. ♣

注意紧化实际上包含两个数据：空间 Y 以及嵌入映射 f.

我们学过如何用单点紧化（又称为 **Alexandrov 紧化**）的方式去紧化任意一个非紧的拓扑空间 X. 直觉上来说，单点紧化 X^* 是把 X 的所有“非紧的端口”粘接在一个“无穷远点”处. 在很多应用中，这种“不分青红皂白全部粘在一起”的紧化方式是不便于使用的.

一般而言，我们希望紧化的空间 Y 是 Hausdorff 的，因为我们知道紧 Hausdorff 空间具有诸多良好的性质. 为此，我们假设 X 是 LCH 空间，或者更一般地，假设 X 是 Hausdorff 且完全正则的空间. 根据命题2.8.16，映射

$$\beta : X \to Q = [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])}, \qquad x \mapsto ev_x$$

是一个拓扑嵌入. 注意到方体 $Q = [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])}$，作为紧 Hausdorff 空间 $[0,1]$ 的乘积空间，依然是紧 Hausdorff 空间. 特别地，

$$\beta X := \overline{\beta(X)} \subset [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])} \tag{2.9.1}$$

是一个紧 Hausdorff 空间，且映射 $\beta : X \to \beta X$ 是一个稠密的拓扑嵌入. 于是 βX 是 X 的一个紧化. 这种紧化最早由 M. Stone 和 E. Čech[33]在 1937 年分别显式给出的:

定义 2.9.18.（Stone-Čech 紧化）

设 X 是 LCH 空间（或者更一般地，是 Hausdorff 且完全正则的空间）. 我们称由（2.9.1）所定义的空间 βX 为 X 的 **Stone-Čech 紧化**. ♣

[33]切赫（Eduad Čech,1893-1960），捷克数学家，主要研究射影微分几何与拓扑学，以 Stone-Čech 紧化和 Čech 上同调闻名. 前文提过，Čech 是最早给出 Tychonoff 定理证明的人. 另一方面，Stone-Čech 紧化则最早（隐含地）出现在 Tychonoff 的 1930 年的一篇文章中.

注意如果 X 本身是紧 Hausdorff 的，那么 βX 跟 X 是同胚的.

给定任意连续函数 $f: X \to [0,1]$，考虑“向 f 分量的投影映射” $\pi_f: [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])} \to [0,1]$，则我们有

$$\pi_f \circ \beta(x) = \pi_f(ev_x) = f(x).$$

换而言之，如果我们把 X 跟它的同胚像 $\beta(X)$ 等同起来，则 π_f 是 f 在 Q 上的一个扩张. 当然，因为 Q 太大，一般而言扩张是不唯一的. 但是，如果我们限制在 Stone-Čech 紧化 βX 上，则扩张是唯一的：【于是这是一个“任意连续函数存在唯一扩张”的例子!】

命题 2.9.19.（有界连续函数向紧化空间扩张）

设 X 是 LCH 空间（或者更一般地，是 Hausdorff 且完全正则的空间），则任意连续函数 $f: X \to [0,1]$ 可以被唯一扩张为连续函数 $\tilde{f} = \pi_f|_{\beta X}: \beta X \to [0,1]$.

证明 上面已经说明了 $\tilde{f} = \pi_f|_{\beta X}$ 是 f 的“扩张”，其唯一性由引理2.9.2可得. □

下面假设 $\varphi: X \to Y$ 是一个连续映射. 则对任意 $g \in \mathcal{C}(Y,[0,1])$, 复合映射 $g \circ \varphi \in \mathcal{C}(X,[0,1])$, 从而由命题2.9.19，存在唯一的扩张 $\widetilde{g \circ \varphi}: \beta X \to [0,1]$. 把所有这些函数放在一起，我们得到一个映射

$$\beta\varphi: \beta X \to [0,1]^{\mathcal{C}(Y,[0,1])},$$

使得

$$\pi_g(\beta\varphi) = \widetilde{g \circ \varphi}.$$

由定义，对于任意 $x \in X$,

$$\beta\varphi(\beta_X(x)) = (\widetilde{g \circ \varphi}(\mathrm{ev}_x))_g = (\pi_{g\circ\varphi}(ev_x))_g = (g \circ \varphi(x))_g = ev_{\varphi(x)} = \beta_Y(\varphi(x))$$

根据命题1.5.20，$\beta\varphi$ 的像落在 βY 里面：

$$\beta\varphi(\beta X) = \beta\varphi(\overline{\beta(X)}) \subset \overline{\beta\varphi(\beta(X))} \subset \overline{\beta(Y)} = \beta Y.$$

换而言之，我们得到

命题 2.9.20.（$\varphi: X \to Y \rightsquigarrow \beta\varphi: \beta X \to \beta Y$）

设 X, Y 是 LCH 空间（或者更一般地，是 Hausdorff 且完全正则的空间）. 则任意连续映射 $\varphi: X \to Y$ 可以被唯一“提升”为连续映射 $\beta\varphi: \beta X \to \beta Y$，使得

$$\beta\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi. \tag{2.9.2}$$

证明 上面已经说明了“提升映射” $\beta\varphi: \beta X \to \beta Y$ 的存在性. 至于唯一性，因为 $\beta\varphi$ 在稠密子集 $\beta(X)$ 上是由 (2.9.2) 所唯一确定，故由引理2.9.2可得 $\beta\varphi$ 在 βX 上的唯一性. □

作为推论，我们证明 Stone-Čech 紧化的如下重要性质：

定理 2.9.21.（Stone-Čech 紧化的泛性质）

设 X 是 LCH 空间，则对于任意紧 Hausdorff 空间 Y 以及任意连续映射 $\varphi: X \to Y$，存在唯一的连续映射 $\tilde{\varphi}: \beta X \to Y$ 使得 $\tilde{f} \circ \beta = f$. 进一步，Stone-Čech 紧化 βX 是唯一具有该性质的 Hausdorff 紧化.

证明 存在唯一性是命题2.9.20的直接推论，因为对于紧 Hausdorff 空间，βY 与 Y 同胚.

下面证明 βX 是唯一满足该性质的紧 Hausdorff 空间：假设还有紧 Hausdorff 空间 Z 以及映射 $\gamma : X \to Z$ 满足同样的性质. 则连续映射 $\beta : X \to \beta X$ 可被扩张为连续映射 $\tilde{\beta} : Z \to \beta X$，使得

$$\tilde{\beta} \circ \gamma = \beta.$$

同理 $\gamma : X \to Z$ 可被扩张为 $\tilde{\gamma} : \beta X \to Z$，使得

$$\tilde{\gamma} \circ \beta = \gamma.$$

注意到 $\tilde{\beta} \circ \tilde{\gamma} : \beta X \to \beta X$ 是连续映射，且在稠密子集 $\beta(X)$ 上有 $\tilde{\beta} \circ \tilde{\gamma} = \mathrm{Id}$. 于是由引理2.9.2，我们在整个 βX 上有 $\tilde{\beta} \circ \tilde{\gamma} = \mathrm{Id}$. 同理 $\tilde{\gamma} \circ \tilde{\beta} = \mathrm{Id}$. 于是 Z 跟 βX 同胚. □

注 2.9.22. 非紧空间的紧化一般是不唯一的. 若 X 有两个紧化 $\iota_i : X \to \overline{X}_i$，$i = 1, 2$，且存在连续映射 $g : X_1 \to X_2$ 使得 $g \circ \iota_1 = \iota_2$，则我们称紧化 $\iota_2 : X \to \overline{X}_2$ 比紧化 $\iota_1 : X \to \overline{X}_1$ **更精细**. 可以证明：对于非紧 LCH 空间，单点紧致化是最粗糙的紧化，而 Stone-Čech 紧化是最精细的紧化.

¶ 应用 5: 单位分解（简单版本）.

最后我们应用 Urysohn 引理证明一个简单版本的“单位分解”. 下一节我们将对单位分解做更深入地研究. 回忆一下：我们称集族 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的，如果它满足

$$\forall x \in X, \exists \text{开集 } U_x \ni x \text{ 使得仅有有限个 } \alpha \text{ 满足 } U_x \cap U_\alpha \neq \emptyset.$$

我们证明

定理 2.9.23.（单位分解：简单版本）

设 X 是正规空间，且闭集族 $\{F_\alpha\}$ 覆盖 X（即 $\bigcup_\alpha F_\alpha = X$）. 设 U_α 是 K_α 的开邻域，且 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的，则存在连续函数 $\rho_\alpha : X \to [0, 1]$ 使得

①$\rho_\alpha(F_\alpha) > 0$.

②$\rho_\alpha(U_\alpha^c) = 0$.

③$\sum\limits_\alpha \rho_\alpha(x) = 1, \forall x \in X$.

♡

证明 由 Urysohn 引理，存在连续函数 $g_\alpha : X \to [0, 1]$ 使得

$$g_\alpha(F_\alpha) = 1, \qquad g_\alpha(U_\alpha^c) = 0.$$

令 $g(x) = \sum\limits_\alpha g_\alpha(x)$. 则在每个开集 U_x 上，g 是有限个连续函数的和，从而 g 是良好定义的，且在每个 U_x 是连续的. 于是 g 是 X 上的连续函数. 此外，因为 $\bigcup\limits_\alpha F_\alpha = X$，我们有

$$g(x) \geq 1, \quad \forall x.$$

最后，记 $\rho_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{g(x)}$. 易见这些 ρ_α 即为所求. □