## 2.10 仿紧性与单位分解

最后我们介绍仿紧的概念及其应用. 仿紧性最早由法国数学家 Dieudonné [34] 于 1944 年首次引入. 就如紧性是“广义的有限性”, 仿紧性可被视为是“广义的局部有限性”. 相比于紧性、可数性、分离性, 仿紧性显得不那么直观, 但很快人们发现仿紧性 (以及相关的“可数局部有限性”) 跟拓扑空间的可度量性密切相关. 而当人们发现需要仿紧性概念以使得“任意开覆盖都存在单位分解”后 (而单位分解是在流形上发展分析理论的基石), 仿紧性就成了拓扑学的标准研究对象和重要工具.

### 2.10.1 仿紧空间

#### ¶ 仿紧性: 定义和例子

我们知道, 对于紧空间, 任何开覆盖都有有限子覆盖, 从而我们可以通过考察局部性质得到整体性质. 对于更一般的拓扑空间, 我们无法期待可以“把局部性质粘接成整体性质”. 然而, 上一节末尾的单位分解为我们提供了一种较弱的把局部数据粘接成整体数据的方式: 虽然定理2.9.23中涉及到的求和 $\sum_\alpha \rho_\alpha(x)$ 在整体上不是一个有限和, 但是在每个点附近, 它依然是有限和.

当然, 能够做到单位分解的原因之一在于该定理的条件中, 我们假设了开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的. 一般的开覆盖未必是局部有限的.

**例 2.10.1.** 考虑 $X = \mathbb{R}^n$ 的开覆盖

$$\mathscr{U} = \{B(0,k) | k \in \mathbb{N}\}.$$

这当然不是一个局部有限开覆盖. 但是, 如果我们把每个开球 $B(0,k)$ 替换成更小的“开球壳” $B(0,k) \setminus \overline{B(0,k-1)}$, 则它们构成一个局部有限的开覆盖! 注意到新覆盖

$$\mathcal{U}_1 = \{B(0,k) \setminus \overline{B(0,k-1)} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

中的每个集合都包含在原覆盖的某个集合里面, 用定义2.1.1的语言来说, 新覆盖是原覆盖的一个局部有限的开加细.

事实上, 我们有

$$\boxed{\mathbb{R}^n \text{ 的任意开覆盖都有一个局部有限的开加细.}}$$

证明如下: 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任意开覆盖. 对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 存在 $0 < r_x \leqslant 1$ 和 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $B(x, r_x) \subset U$. 令

$$\mathscr{U}_1 = \{B(x, r_x) | x \in \mathbb{R}^n\}.$$

那么 $\mathscr{U}_1$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个加细. 另一方面, 任意形如

$$\overline{B(0,k+1)} \setminus B(0,k)$$

的“闭球壳”可以被 $\mathscr{U}_1$ 中的有限多个开球所覆盖. 记 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 为这些开球的集合. 那么 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖, 是 $\mathscr{U}$ 的一个加细, 并且是局部有限的.

[34] 迪厄多内 (Jean Dieudonné, 1906-1992), 法国数学家, **Bourbaki** 学派的创始人之一, 主要研究抽象代数, 代数几何和泛函分析.

我们定义

**定义 2.10.2.（仿紧）**

若拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的任意开覆盖都有局部有限的开加细，则我们称 $X$ 是**仿紧的**. ♣

我们给出几个仿紧/非仿紧的例子：

**例 2.10.3.**

(1) 显然紧空间都是仿紧的.

(2) 任意离散拓扑空间都是仿紧的，因为由所有单点集构成的集族是任意开覆盖的局部有限开加细.

(3) 我们刚刚证明了 $\mathbb{R}^n$ 是仿紧的.

(4) 一个不仿紧的例子：考虑 $X = \mathbb{R}$，赋以上半连续拓扑 $\mathscr{T}_{u.s.c.} = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$. 则它不是仿紧的，因为开覆盖

$$\mathscr{U} = \{(-\infty, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

没有局部有限加细.

一般而言，仿紧空间的子空间未必是仿紧的. 但跟紧性类似，我们有

**命题 2.10.4.（仿紧的闭遗传性）**

仿紧空间中的闭子集是仿紧的. ♠

**证明** 设 $X$ 是仿紧的且 $A \subset X$ 是闭集. 设 $\mathscr{U}$ 是 $A$ 的任意开覆盖. 令 $\mathscr{U}_1 = \mathscr{U} \cup \{A^c\}$. 那么它是 $X$ 的开覆盖. 根据定义，存在 $\mathscr{U}_1$ 的局部有限开加细 $\widetilde{\mathscr{U}_1}$. 令

$$\widetilde{\mathscr{U}} = \{U \in \widetilde{\mathscr{U}_1} \mid U \not\subset A^c\}.$$

则 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 是 $A$ 的开覆盖，且是 $\mathscr{U}$ 的局部有限加细. □

## ¶ 局部紧性 + 可数性 + 分离性 $\Longrightarrow$ 仿紧性

我们已经看到，仿紧性是如此复杂，以至于 $\mathbb{R}^n$ 的仿紧性都不是显然的. 我们也提到，仿紧性最主要的用处之一在于构建分析中重要的工具“单位分解”. 此外，我们还知道，分析中重要的空间往往具有良好的局部性质（“局部欧氏”，或者更一般地“局部紧”），良好的可数性和良好的分离性. 于是一个自然的问题（或者美好的愿望）是：那些满足良好的局部紧性、可数性、分离性的空间是否一定是仿紧的?

答案是确定一定以及肯定的：

**定理 2.10.5.（$\boxed{\text{Lindelöf + 局部紧 + (T2)} \Longrightarrow \text{仿紧}}$）**

任意局部紧、Hausdorff 且 Lindelöf 的拓扑空间是仿紧的. ♡

**注 2.10.6.** 当然我们可以将 Lindelöf 替换为更强的可数性条件 (A2).[35] 另一方面，可以证明2.10.3(4)是局部紧且第二可数的，故定理中的分离性条件是必要的；我们在下文命

[35]不难证明，在 LCH 空间里，Lindelöf 跟 $\sigma$-紧是等价的.（但 LCH 空间里第二可数确实比 Lindelöf 强：不难构造出 Lindelöf 但不第二可数的 LCH 空间.）

题2.10.11中将会证明仿紧的 Hausdorff 空间是正规的，而我们在第 2.7 节末尾也提过存在 LCH 空间不是正规的，以及存在 Lindelöf 且 Hausdorff 不是正则（从而也不是正规）的空间，于是定理中的可数性、局部紧条件都是不能去掉的.【但我们并不是说这些条件都是仿紧的必要条件，比如离散度量空间不必是 Lindeöf 的.】

由命题 2.7.21，局部紧 Hausdorff 空间都是正则的. 故只需证明

**命题 2.10.7.** (**Lindelöf + (T3) ⟹ 仿紧**)

任意 Lindelöf 的正则空间是仿紧的.

**证明** 设 $X$ 是 Lindelöf 且 (T3) 的. 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 是 $X$ 的任意开覆盖. 对于任何 $x\in X$, 我们选取 $\alpha(x)$ 使得 $x\in U_{\alpha(x)}$. 因为 $X$ 是 (T3) 的，所以我们可以找到开集 $V_x$ 和 $W_x$ 使得

$$x\in V_x\subset\overline{V_x}\subset W_x\subset\overline{W_x}\subset U_{\alpha(x)}.$$

现在 $\mathscr{V}=\{V_x\}$ 是 $X$ 的开覆盖. 由于 $X$ 是 Lindelöf，我们可以找到一个可数子覆盖

$$\{V_1,V_2,V_3,\cdots\}\subset\mathscr{V}.$$

注意此时 $\{W_1,W_2,W_3,\cdots\}$ 也是 $X$ 的开覆盖. 我们记 $R_1=W_1$ 并迭代定义

$$R_n=W_n\setminus(\overline{V_1}\cup\cdots\cup\overline{V_{n-1}}),\quad n>1.$$

我们断言 $\mathscr{R}=\{R_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细：

- 根据构造, $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细.
- $\mathscr{R}$ 是 $X$ 的覆盖，因为对任意 $x$, 如果我们令 $n$ 为满足 $x\in W_n$ 的最小整数，则 $x\notin\overline{V_1}\cup\cdots\cup\overline{V_{n-1}}$，这是因为 $\overline{V_i}\subset W_i$. 所以我们有 $x\in R_n$.
- $\mathscr{R}$ 是局部有限的，因为对任意 $x\in X$, 我们可以找到 $n$ 使得 $x\in V_n$, 而 $x$ 的开邻域 $V_n$ 仅与 $\mathscr{R}$ 中的有限多个元素相交，这是因为对任意 $m>n$ 都有 $V_n\cap R_m=\emptyset$.

所以 $X$ 是仿紧的. □

由此我们就可以得到很多仿紧空间.

## ¶ 拓扑流形

我们在定义2.4.15中引入过一类非常好的空间，即局部欧氏空间. 然而，在本节习题中我们可以看到，局部欧氏空间有可能在局部没有好的分离性（例如不是 Hausdorff 空间），或者整体没有好的可数性（例如不是 (A2) 空间）. 为此，我们引入下面这个概念：

**定义 2.10.8.（拓扑流形）**

若拓扑空间 $X$ 是 Hausdorff 的和第二可数的，且 $X$ 中的每点都有一个开邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集，则我们称 $X$ 是一个 $n$-**维拓扑流形**.

拓扑流形是一类最重要的拓扑空间之一，在数学和物理中有广泛的应用. 根据定义，若 $X$ 是 $n$-维拓扑流形，那么对于 $X$ 中的每个点 $x$，都存在一个开集 $U_x\ni x$ 和从 $U_x$ 到开集 $V_x\subset\mathbb{R}^n$ 的同胚 $\varphi_x:U_x\to V_x$. 我们把三元组 $(\varphi_x,U_x,V_x)$ 称为流形 $X$ 在点 $x$ 附近的一个**坐标卡**.

通常我们把一维流形称为曲线，把二维流形称为曲面，这两者将是我们本书最后一部分的主要研究对象.

因为局部欧氏空间都是局部紧的，结合命题 2.7.22 和命题 2.7.21 我们得到

**命题 2.10.9.（流形 (T4) 且仿紧）**

拓扑流形都是正规且仿紧的.

此外，由 Urysohn 度量化定理，拓扑流形都是可度量化的.

## ¶ 阅读材料：度量空间的仿紧性

仿紧性的用处之一是刻画可度量性. 在 1948 年 Stone[36]证明了

**定理 2.10.10.（Stone 定理）**

任意度量空间都是仿紧的.

**证明** 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 是度量空间 $(X, d)$ 的开覆盖. 根据良序定理，$\Lambda$ 上有一个良序 $\preceq$. 在该良序下，$\Lambda$ 的任意子集都有极小元. 于是，对于任意 $x$，存在唯一的 $\alpha = \alpha_x \in \Lambda$ 使得

$$x \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \prec \alpha} U_\beta.$$

对于任意 $\alpha \in \Lambda$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们迭代地定义

$$X_{\alpha,n} = \left\{ x \in X \;\middle|\; B(x, \frac{3}{2^n}) \subset U_\alpha \text{ 且} x \notin \bigcup_{\beta \prec \alpha} U_\beta \cup \bigcup_{\beta \in \Lambda, k < n} V_{\beta,k} \right\}$$

并令

$$V_{\alpha,n} = \bigcup_{x \in X_{\alpha,n}} B(x, \frac{1}{2^n}).$$

下面我们证明 $\mathscr{V} = \{V_{\alpha,n}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细. 显然我们有

- 每个 $V_{\alpha,n}$ 都是开集,
- $V_{\alpha,n} \subset U_\alpha$,
- 对任意 $x$, 令 $\alpha$ 为如上所选取的极小元. 取 $n$ 使得 $B(x, \frac{3}{2^n}) \subset U_\alpha$. 则要么对于某个 $\beta \in \Lambda$ 和 $k < n$ 有 $x \in V_{\beta,k}$，要么 $x \in X_{\alpha,n} \subset V_{\alpha,n}$.

所以 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的覆盖 $X$ 的开加细. 还需证明局部有限性.

对于任意 $x \in X$, 我们令 $\alpha$ 为使得 $x \in \cup_n V_{\alpha,n}$ 的最小下标. 取 $n, k$ 使得 $B(x, 2^{-k}) \subset V_{\alpha,n}$. 则用三角不等式可以证明(细节略去)

(1) 对任意 $l \geq n + k$, 球 $B(x, 2^{-n-k})$ 跟 $V_{\beta,l}$ 不相交.

(2) 对任意 $l < n + k$, 至多有一个 $\beta \in \Lambda$ 使得球 $B(x, 2^{-n-k})$ 跟 $V_{\beta,l}$ 相交.

于是任意 $x$ 都有一个开邻域 $B(x, 2^{-n-k})$，它跟 $\mathscr{V}$ 中不超过 $n + k$ 个元素相交. 故 $\mathscr{V}$ 是局部有限的. □

[36]斯通（Arthur Stone,1916-2000），英国数学家，主要研究拓扑学. Stone 的原始证明比较复杂，这里给出 1968 年 M. Rudin 的简化证明.

### 2.10.2 单位分解

#### ¶ 仿紧性“增强”分离公理 (T2) 和 (T3)

仿紧性对于在流形上发展分析理论非常重要. 事实上，我们引入仿紧概念的主要目的之一就是用于在流形上构造单位分解. 在简单版本的单位分解定理即定理2.9.23中，我们已经知道，构造单位分解时我们需要应用 Urysohn 引理或者 Tietze 扩张定理，于是我们需要空间的正规性. 一般来说，一个仿紧空间可能不是正规的. 然而，正如紧性可以“增强”分离公理 (T2) 和 (T3)，仿紧性也可以做到同样的事情. 证明的关键还是“从局部到整体”论证，以及习题 1.5 中的如下事实：对于局部有限的子集族 $\mathcal{A}$,

$$\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}.$$

**命题 2.10.11.（仿紧性增强分离性）**

(1) 仿紧的 Hausdorff 空间都是正则的.

(2) 仿紧的正则空间都是正规的.

**证明**

(1) 设 $X$ 是仿紧的 Hausdorff 空间，$B$ 是 $X$ 的闭子集（因此也是仿紧的）并且 $x \notin B$. 由于 $X$ 是 (T2)，$\forall y \in B$，存在开集 $U_y \ni x, V_y \ni y$ 使得 $U_y \cap V_y = \emptyset$. 于是

$$\mathscr{U}_1 := \{V_y \mid y \in B\}$$

是 $B$ 的开覆盖，从而有局部有限开加细 $\widetilde{\mathscr{U}}$. 由定义，对于任意 $V \in \widetilde{\mathscr{U}}$，都存在某个 $V_y \in \mathscr{U}_1$ 使得 $V \subset V_y$，因而 $\overline{V} \subset \overline{V_y} \subset U_y^c$. 特别地，对于任意 $V \in \widetilde{\mathscr{U}}$，$x \notin \overline{V}$. 令

$$U = \bigcup_{V\in\widetilde{\mathscr{U}}} V.$$

则 $U$ 是开集并且 $B \subset U$. 由于 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 是局部有限的，根据习题 1.5，我们有

$$\overline{U} = \overline{\bigcup_{V\in\widetilde{\mathscr{U}}} V} = \bigcup_{V\in\widetilde{\mathscr{U}}} \overline{V}.$$

因此 $\overline{U}^c$ 是 $x$ 的一个开邻域，它与 $B$ 的开邻域 $U$ 不相交. 所以 $X$ 是 (T3) 空间.

(2) 重复上面的证明，将点 $x$ 替换为闭子集 $A$ 并将“(T$_i$)”替换为“(T$_{i+1}$)”. □

#### ¶ 仿紧 Hausdorff 空间的好的加细

一般而言，在选取一个开覆盖的局部有限加细覆盖时，加细覆盖里的集合不必一一对应于原覆盖的开集. 但是对于仿紧 Hausdorff 空间，我们有

**引理 2.10.12.（仿紧 (T2) 空间的同指标加细）**

设 $X$ 为仿紧 Hausdorff 空间，$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 为 $X$ 的开覆盖，则存在一个 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}$，使得对任意 $\alpha$ 有 $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$.

**证明** 因为 $X$ 仿紧且 (T2)，所以它也是 (T3) 和 (T4). 所以如果我们令

$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{T} \mid \exists U_\alpha \in \mathscr{U} \text{ 使得} \overline{A} \subset U_\alpha\},$$

那么 $\mathscr{A}$ 是 $X$ 的开覆盖(想一想为什么). 设

$$\mathscr{B} = \{B_\beta \mid \beta \in \Lambda\}$$

是 $\mathscr{A}$ 的局部有限开加细，其指标集可能与 $\mathscr{A}$ 的指标集不同. 对于每个 $\beta$,，我们选取 $\alpha = f(\beta)$ 使得

$$\overline{B_\beta} \subset U_{f(\beta)}.$$

现在对于集族 $\mathscr{U}$ 的每个指标 $\alpha$，令

$$V_\alpha = \bigcup_{f(\beta)=\alpha} B_\beta,$$

其中，如果不存在这样的 $\beta$ 则取 $V_\alpha = \emptyset$. 由 $\mathscr{B}$ 的局部有限性，

$$\overline{V_\alpha} = \overline{\bigcup_{f(\beta)=\alpha} B_\beta} = \bigcup_{f(\beta)=\alpha} \overline{B_\beta} \subset U_\alpha.$$

还需要验证局部有限性：对于任意 $x \in X$，存在 $x$ 的开邻域 $U_x$，它仅与有限多个 $B_\beta$ 相交. 因此，$U_x$ 只与满足 $f(\beta) = \alpha$ 的那些 $\alpha$ 相交. □

## ¶ 单位分解

下面我们引入（从属于一个开覆盖的）**单位分解**的概念，这个概念最早是 Dieudonné 在 1937 年正式引入的：

**定义 2.10.13.（单位分解）**

(a) 若拓扑空间 $X$ 上的一族函数 $\{\rho_\alpha\}$ 满足

  (1) 每一个 $\rho_\alpha : X \to [0, 1]$ 都是连续的. [注意: $\rho_\alpha$ 定义在整个空间 $X$ 上!]

  (2) 集族 $\{\text{supp}\rho_\alpha\}$ 是局部有限的,

  (3) 对任意 $x \in X$, 都有 $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$.

  则我们称 $\{\rho_\alpha\}$ 是 $X$ 上的一个（连续的）**单位分解** (简称 **P.O.U.**).

(b) 若 $\{U_\alpha\}$ 是 $X$ 的一个开覆盖，$\{\rho_\alpha\}$ 是 $X$ 上的一个单位分解，且

  (4) 对任意 $\alpha$, $\text{supp}\rho_\alpha \subset U_\alpha$.

  则我们称 $\{\rho_\alpha\}$ 是**从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.** ♣

注意条件 (1) 和 (2) 共同保证了 (3) 中的和函数是一个连续函数.

显然，如果存在从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\rho_\alpha\}$，则由定义，$\{x \mid \rho_\alpha(x) > 0\}$ 就是 $\{U_\alpha\}$ 的一个局部有限的开加细. 于是，如果 $X$ 的任意开覆盖都有从属于它的单位分解，那么 $X$ 一定是仿紧的.

反之，我们有

**定理 2.10.14. (单位分解的存在性)**

设 $X$ 为仿紧 Hausdorff 空间. 那么对于 $X$ 的任意开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在一个从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.

证明的**想法**很简单: 对任何给定的开覆盖, 我们构造一个"更小"的局部有限开覆盖 $\{V_\alpha\}$ 和"比更小还要小"的闭覆盖 $\{K_\alpha\}$, 这样我们可以应用定理 2.9.23. 但是, 这里还有一个微妙的小问题: 我们想要的是集族 $\{\mathrm{supp}(\rho_\alpha)\}$ 是局部有限的, 而应用定理我们只能得到"在 $V_\alpha^c$ 上有 $\rho_\alpha = 0$", 从而 $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset \overline{V_\alpha}$, 但 $\{\overline{V_\alpha}\}$ 并不显然是局部有限的. 解决这个问题的方法有两种: 一是老老实实证明(请读者给出证明)

$\{V_\alpha\}$ 是局部有限的 $\Longrightarrow$ $\{\overline{V_\alpha}\}$ 是局部有限的.

二是取巧, 是构造"比'比更小还要小'还要小"的开覆盖!

**证明** 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 是 $X$ 的开覆盖. 应用命题2.10.12三次, 我们得到 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}$, $\mathscr{V}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{W} = \{W_\alpha\}$ 以及 $\mathscr{W}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{Z} = \{Z_\alpha\}$ (都具有相同的指标集) 使得

$$\overline{Z_\alpha} \subset W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha.$$

现在对 $\overline{Z_\alpha} \subset W_\alpha$ 应用定理 2.9.23, 得到连续函数 $\rho_\alpha : X \to [0,1]$ 使得

- $\rho_\alpha(\overline{Z_\alpha}) > 0$,
- $\rho_\alpha(W_\alpha^c) = 0$,
- $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$.

函数族 $\{\rho_\alpha\}$ 正是我们想要寻求的从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解, 因为

$$\mathrm{supp}\ \rho_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset U_\alpha,$$

而且 $\{\mathrm{supp}\ \rho_\alpha\}$ 是局部有限的, 因为 $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset V_\alpha$, 而 $\{V_\alpha\}$ 是局部有限的. □

### ¶ LCH 空间的单位分解

现在我们假设 $X$ 是 LCH 空间, 为了保证仿紧性我们还假设 $X$ 是 $\sigma$-紧的. 于是 $X$ 是仿紧的 Hausdorff 空间, 从而定理2.10.14对 $X$ 是成立的的. 但是, 我们发现, 这样的单位分解未必是我们想要的, 因为根据我们的经验, 对于 LCH 空间, 我们往往希望所得到的函数是紧支函数, 而定理2.10.14所给的函数 $\rho_\alpha$ 未必是紧支函数. 事实上, 只要我们依然要求对开覆盖中的每个开集 $U_\alpha$ 都恰好指定一个函数, 那我们就未必能让我们得到的函数是紧支的, 例如如果 $X$ 是非紧 LCH 空间而 $\mathcal{U}$ 是 $X$ 的一个有限开覆盖, 则所得的单位分解中的函数不可能是紧支的.

幸运的是, 只要我们不再要求对开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中的每个开集 $U_\alpha$ 都恰好指定一个函数, 而是一次性构造可数多个连续函数 $\{\rho_n\}$, 使得 $\{\mathrm{supp}(\rho_n)\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的加细, 即把单位分解定义中的条件 (4) 改成

(4′) 对于每个 $n$, 存在 $U_\alpha \in \mathscr{U}$ 使得 $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset U_\alpha$;

则我们还是可以得到一个单位分解, 且所得的每个 $\rho_n$ 是紧支的:

**定理 2.10.15. (LCH 空间中单位分解的存在性)**

设 $X$ 为局部紧 Hausdorff 且 $\sigma$-紧空间. 那么对于 $X$ 的任意开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$, 存在单位分解 $\{\rho_n\}$ 使得

(1) 每个 $\mathrm{supp}(\rho_n)$ 是紧的,

(2) 对每个 $n$, 存在 $U_\alpha\in\mathscr{U}$ 使得 $\mathrm{supp}(\rho_n)\subset U_\alpha$.

其证明思路是构造满足特定条件的可数的局部有限开加细. 证明细节留作习题.

### ¶ 应用: 将流形嵌入到 $\mathbb{R}^N$

我们知道, 拓扑流形总是仿紧的. 有了定理 2.10.14, 我们就可以着手在拓扑流形上发展分析: 由于流形是局部欧氏的, 因此我们 (通过坐标) 可以在局部利用欧氏空间的结构给出各种局部数据. 然后利用单位分解, 我们可以将这些局部数据黏合为整体数据, 例如我们可以

- 将局部定义的连续函数黏合为整体的连续函数,
- 首先在局部定义积分, 然后通过黏合来定义流形上的积分,
- 将局部定义的向量场黏合为全局向量场,
- 将局部定义的 "内积结构" 黏合为流形上的黎曼度量,
- ……

作为单位分解的一个应用, 我们证明

**定理 2.10.16. (紧流形嵌入到欧氏空间)**

任意 $n$ 维紧拓扑流形都可以嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中.

**证明** 设 $X$ 是一个拓扑流形. 在每个点 $x\in X$ 附近取坐标卡 $(\varphi_x,U_x,V_x)$. 因为 $X$ 是紧的, 我们可以取有限个坐标卡邻域 $\{U_1,\cdots,U_m\}$ 覆盖 $X$. 设 $\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$ 是从属于这个覆盖的单位分解. 定义 $h_i:X\to\mathbb{R}^n$ 为

$$h_i(x)=\begin{cases}\rho_i(x)\varphi_i(x), & x\in U_i\\ (0,\cdots,0), & x\notin \mathrm{supp}(\rho_i).\end{cases}$$

根据粘贴引理, 每个 $h_i$ 都是 $X$ 上的连续映射. 现在我们令 $N=m+mn$ 并定义 $F:X\to\mathbb{R}^N$ 为

$$F(x)=(\rho_1,\cdots,\rho_m,h_1,\cdots,h_m).$$

则我们有

- $F$ 是连续的, 这是因为每个分量都是连续的.
- $F$ 是单射: 如果 $F(x)=F(y)$, 则存在 $i$ 使得 $\rho_i(x)=\rho_i(y)>0$, 因此 $x,y\in U_i$. 由此得 $\varphi_i(x)=\varphi_i(y)$, 所以有 $x=y$.

由于 $X$ 是紧的且 $\mathbb{R}^N$ 是 Hausdorff 的, $F$ 是 $X$ 到其像集上的同胚, 即拓扑嵌入. □

**注 2.10.17.** 同样的定理也对非紧拓扑流形成立, 甚至可以证明更强的结论, 即可以取 $N=2n+1$, 但证明较为复杂, Munkres《拓扑学》第 50 节习题 6 中给出了一个梗概.

### 2.10.3 阅读材料：两个度量化定理

#### ¶ Nagata-Smirnov 度量化定理

仿紧性（或更准确地说，局部有限性）不仅用于构造单位分解，还用于刻画可度量性. 刻画什么拓扑空间是可度量化的是一般拓扑学中的一个大问题. 寻找解决方案的第一大步是 Urysohn 度量化定理，该定理指出满足 (A2)、(T2) 和 (T4) 的拓扑空间都是可度量化的. 当然，由于 (T2) 蕴含 (T1)，我们可以将条件 (T4) 替换为 (T3). 所以这些分离公理是空间可度量化的必要条件. 但是，可数性假设 (A2) 不是必要的. 因此，要刻画可度量性，自然的想法是找到一个较弱的条件来替换 (A2). 正确的条件最终在 1950 年左右被 Nagata 和 Smirnov 独立发现：$\sigma$-局部有限.

**定义 2.10.18.（$\sigma$-局部有限）**

若 $X$ 中的子集族 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A} = \cup_n \mathscr{A}_n$，其中每个 $\mathscr{A}_n$ 都是局部有限族，则我们称 $\mathscr{A}$ 是一个 **$\sigma$-局部有限族**. ♣

下面我们陈述 Nagata-Smirnov 度量化的完整刻画：

**定理 2.10.19.（Nagata-Smirnov 度量化定理）**

拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是可度量化的当且仅当它是 (T2), (T3) 并且存在一个 $\sigma$-局部有限的基. ♡

**证明** 首先假设 $X$ 是可度量化的. 然后是 (T2) 和 (T4)，因此是 (T1) 和 (T3). 根据 Stone 定理，它是仿紧的. 所以对于每个 $n$，开覆盖

$$\mathscr{U}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X\}$$

有一个局部有限的开加细 $\mathscr{B}_n$. 还需要证明 $\sigma$-局部有限族 $\mathscr{B} = \cup_n \mathscr{B}_n$ 是一个基. 证明是标准的：对于任意 $x \in X$ 和任意 $\varepsilon > 0$，我们选取 $n$ 使得 $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 在 $\mathscr{B}_n$ 中存在一个开集 $B$ 使得 $x \in B$. 因此 $B \subset B(x, \frac{2}{n}) \subset B(x, \varepsilon)$.

反之，假设 $X$ 是 (T2), (T3) 并且存在 $\sigma$-局部有限基.

**引理 2.10.20.（$\sigma$-局部有限基 +(T3)$\Longrightarrow$ 完美正规）**

设 $X$ 是 (T3) 空间并且存在 $\sigma$-局部有限基. 则

(1) $X$ 中的任意闭集都是 $G_\delta$-集.

(2) $X$ 是 (T4). ♢

所以在某种意义上，“$\sigma$-局部有限基”的存在性是另一个版本的可数性，它增强了可分性 [类似于 (A2) 或 Lindelöf]. 我们将把引理的证明留作练习.

让我们继续我们的证明.

根据引理，$X$ 是 (T4) 并且 $X$ 中的任意闭子集都是 $G_\delta$-集. 设 $\mathscr{B} = \cup_n \mathscr{B}_n$ 是一个 $\sigma$-局部有限基，其中每个 $\mathscr{B}_n$ 都是局部有限的. 对于任意 $B \in \mathscr{B}_n$，我们选取一个连续函数 $f_{n,B} : X \to [0, 1/n]$ 使得

$$f_{n,B}^{-1}(0) = B^c.$$

现在定义

$$d_n(x,y)=\sum_{B\in\mathscr{B}_n}|f_{n,B}(x)-f_{n,B}(y)|.$$

这是一个连续函数，因为和是局部有限的. 根据定义，函数 $d_n$ 满足 $d_n(x,y)=d_n(y,x)$ 和 $d_n(x,z)\le d_n(x,y)+d_n(y,z)$. 然而，$d_n$ 不是一个度量，因为一般它不是点分离的：对于某些 $x\neq y$，我们可能有 $d_n(x,y)=0$. 好消息是我们有足够多的 $d_n$ 足以分离点：事实上，我们有

**事实.** 对于任意闭集 $F$ 和 $x\notin F$，存在 $n$ 和 $B\in\mathscr{B}_n$ 使得

$$d_n(x,y)\ge a:=f_{n,B}(x)>0,\quad \forall y\in F.$$

为了证明上述事实，我们只需取 $n$ 和 $B\in\mathscr{B}_n$ 使得 $x\in B\subset F^c$. 则 $f_{n,B}(x)>0$ 且 $f_{n,B}(F)=0$. 所以对于所有 $y\in F$ 都有 $d_n(x,y)\ge f_{n,B}(x)>0$.

特别地，对于 $y\neq x$，如果我们取 $F=\{y\}$，则我们得到 $d_n(x,y)>0$. 现在我们定义

$$d(x,y)=\sum_n 2^{-n}d_n(x,y).$$

那么 $d$ 是 $X$ 上的一个度量. 还需证明度量拓扑与 $\mathscr{T}$ 一致. 因为 $d$ 关于拓扑 $\mathscr{T}$ 是连续的，所以度量球在 $\mathscr{T}$ 中都是开集. 因此 $\mathscr{T}_d\subset\mathscr{T}$. 反之，对于任意开集 $U\in\mathscr{T}$ 和任意 $x\in U$，根据我们刚刚证明的事实，我们可以找到 $n$ 和 $B\in\mathscr{B}_n$ 使得对于所有 $y\in U^c$ 有 $d(x,y)>r=2^{-n}f_{n,B}(x)>0$，即 $B(x,r)\subset U$. 因此 $U\in\mathscr{T}_d$. 所以 $\mathscr{T}=\mathscr{T}_d$. □

### ¶ Smirnov 度量化定理

在习题中，我们引入了局部可度量化的概念. 显然可度量化空间都是局部可度量化的. 反之，我们有

**定理 2.10.21.（Smirnov 度量化定理）**

拓扑空间 $X$ 可度量化当且仅当 $X$ 是局部可度量化的仿紧 Hausdorff 空间. ♡

**证明** 定理的一半是显然的，故只需证明：若 $X$ 是局部可度量化的仿紧 Hausdorff 空间，则 $X$ 是可度量化的. 根据 Nagata-Smirnov 定理，只需证明 $X$ 具有 $\sigma$-局部有限基. 为此，我们先用可度量化开集族覆盖 $X$. 由仿紧性，我们可得到一个局部有限的开集族 $\mathcal{U}$，其中每个元素都是可度量化的开集. 跟 Nagata-Smirnov 定理证明的前半部分一样，我们令

$$\mathcal{U}_n=\{B_U(x,\frac{1}{n})\mid x\in U,U\in\mathcal{U}\}$$

并取 $\mathcal{U}_n$ 的局部有限开加细 $\mathcal{B}_n$. 最后同样用标准的方式证明 $\mathcal{B}=\cup_n\mathcal{B}_n$ 是一组基：任取 $x\in X$ 以及 $x$ 的开邻域 $U$. 由局部有有限性，$x$ 仅落在 $\mathcal{U}$ 中的有限个元素中，不妨设他们为 $U_1,\cdots,U_k$. 于是可以找到 $\varepsilon>0$ 使得对每个 $1\le i\le k$ 都有 $B_{U_i}(x,\varepsilon)\subset U_i\cap U$. 最后选取 $n$ 使得 $1/n<\varepsilon/2$，并选取 $B\in\mathcal{B}_n$ 使得 $x\in B$，存在 $1\le i\le k$ 使得 $B\subset U_i$. 于是由三角不等式，$x\in B\subset B_{U_i}(x,\varepsilon)\subset U$. □