# 第 3 章 从连通性到基本群

## 3.1 连通性

### 3.1.1 连通空间

#### ¶ 连通性的定义

连通性是最简单且最有用的拓扑性质之一. 它不仅直观、相对容易理解，而且是用以证明很多重要结果（例如中值定理）的强大工具.

对于有简单图像的拓扑空间，我们可以用直观判断它是否连通. 但对于较为复杂的空间，判断它是否连通一般而言并不容易.

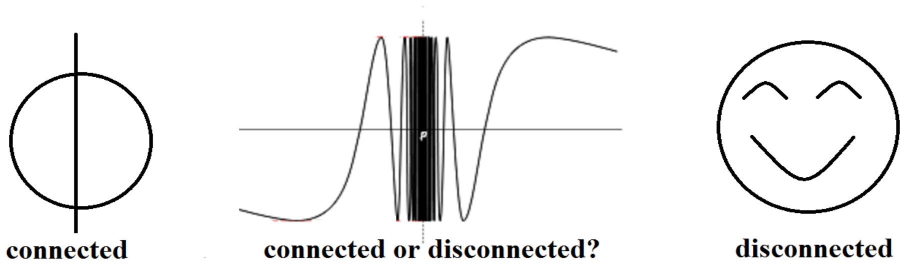


图 3.1: 连通还是不连通?

对于我们不知道怎么画出图像的抽象拓扑空间，我们也想提出连通性的问题. 例如，(具有不止一个元素的) 离散拓扑空间应该是“非常”不连通的. 但是，Sorgenfrey 直线是连通的还是不连通的? $[0,1]$ 上的连续函数空间是连通的还是不连通的? 当然，并非每个抽象拓扑空间的连通性都是有价值去探讨的问题. 但是，人们确实关注以下在分析中自然出现的问题:

- 函数空间 $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{R}^2)$ 以及 $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 是否连通?
- 道路空间 $\{\gamma\in\mathcal{C}([0,1],X)\mid\gamma(0)=\gamma(1)\}$ 是否连通?

所以我们需要（通过开集族给出）一个严格的连通性定义. 在给出严格的定义之前，我们先来看 $\mathbb{R}$ 中的几个集合

$$(a)\ (0,3)\qquad (b)\ (0,1)\cup[2,3)\qquad (c)\ (0,1)\cup(1,3]\qquad (d)\ (0,1]\cup(1,3)$$

当然 $(a)$ 是连通的, $(b)$ 和 $(c)$ 是不连通的, 而 $(d)$ 是连通的! 尽管 $(d)$ 看起来像两个区间的并集，但它们实际上是一个区间 $(0,3)$，只是被刻意写成了两个不相交子集的并集. 仔细分析一下我们很容易发现：这两个不相交子集 $(0,1]$ 和 $(1,3)$ 实际上在 $x=1$ 处是“连接”在一起的，因为 1 虽然只是 $(0,1]$ 的一个元素，但却位于子集 $(1,3]$ 的闭包内. 对于 $(c)$ 的情况，虽然 $(0,1)$ 和 $(1,3]$ 两个“组件”“相邻”，但它仍然是不连通的，因为 $(0,1)$ 并不包含 $(1,3]$ 的闭包中的任何元素，而 $(1,3]$ 也不包含 $(0,1)$ 的闭包中的任何元素.

这个例子启发我们给出如下连通性的定义. 与我们学过的大多数其他概念不同，连通性由“不连通性”所定义的:

**定义 3.1.1. (连通性)**

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间.

(1) 如果存在非空子集 $A, B \subset X$ 使得

$$X = A \cup B \quad \text{且} \quad A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset,$$

则我们称 $X$ 是 **不连通的**.

(2) 如果 $X$ 不是不连通的，则我们称 $X$ 是 **连通的**.

类似地，如果 $X$ 中的子集 $A$ 关于关于子空间拓扑是连通的或不连通的，则我们称 $A$ 是 $X$ 的**连通子集**或**不连通子集**.

注意：根据定义，空集和单点集都是连通的.

**定义 3.1.2. (完全不连通空间)**

如果拓扑空间 $X$ 中仅有单点集合空集是连通子集，则我们称 $X$ 是**完全不连通的**.

## ¶ 连通性的等价刻画

上面的定义很直观，但也有点复杂. 我们给出其他几种等价的方式来刻画连通性:

**命题 3.1.3. (连通性的等价刻画)**

对于拓扑空间 $X$, 以下是等价的:

(1) $X$ 是不连通的.

(2) 存在非空不相交开集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(3) 存在非空不相交闭集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(4) 存在 $A \neq \emptyset, A \neq X$ 使得 $A$ 在 $X$ 中是既开又闭的.

(5) 存在连续满射 $f : X \to \{0, 1\}$.

**证明** 我们有 (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4)，这是因为

$$X = A \cup B \ \text{且}\ A \cap B = \emptyset \iff A^c = B \ \text{且}\ A = B^c.$$

(1) $\implies$ (3) 是因为

$$A \cap \overline{B} = \emptyset,\ X = A \cup B \implies B = B \cap \overline{B} = X \cap \overline{B} = \overline{B},$$

因此 $B$ 是闭集. 同理 $A$ 也是闭集.

为证明 (3) $\implies$ (1), 我们取 $X$ 中的闭集 $A, B$ 使得

$$X = A \cup B.$$

则 $A \cap \overline{B} = A \cap B = \emptyset$. 同理 $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

最后，(5) $\implies$ (2) 是平凡的，而 (2) $\implies$ (5) 是因为我们可以定义 $f(A) = 0$ 且 $f(B) = 1$, 根据定义 $f$ 是连续的. □

## ¶ 连通空间和不连通空间的例子

下面我们给出连通空间和不连通空间的一些例子.

**例 3.1.4.**

(1) $(X, \mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 是连通的, 而 $|X| \geq 2$ 时 $(X, \mathscr{T}_{\text{discrete}})$ 是不连通的.

(2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 是不连通的, 这是因为

$$\mathbb{Q} = ((-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((-\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}).$$

事实上，因为任意两个有理数之间都存在无理数，所以重复上述论证，我们得到：$\mathbb{Q}$ 是完全不连通的. [但是：$\mathbb{Q}$ 上的诱导子空间拓扑不是离散拓扑！]

(3) $\mathbb{Q}^c$, Cantor 集, 离散拓扑空间都是完全不连通的.

(4) Sorgenfrey 直线 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是完全不连通的：设 $A \subset \mathbb{R}$ 且 $a, b \in A$. 不妨设 $a < b$. 取 $c \in (a, b)$. 根据定义, $(-\infty, c) = \cup_{x<c}[x, c)$ 和 $[c, +\infty)$ 在 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 中都是开集. 因此 $A = A_1 \cup A_2$, 其中 $A_1 = A \cap (-\infty, c)$ 和 $A_2 = A \cap [c, \infty)$ 都是 $A$ 中的非空开集，于是 $A$ 是不连通的.

下面我们给出实数 $\mathbb{R}$ 的全部连通子集的刻画. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间，即满足

"若 $x, y \in I$ 且 $x < y$，则对于任意 $x < z < y$，均有 $z \in I$."

区间可以是开区间、闭区间、半开半闭区间，以及单点集：

$$(a, b), [a, b], \{a\}, (a, b], [a, b), (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b), (-\infty, +\infty)$$

我们有

**定理 3.1.5.（区间的连通性）**

$\mathbb{R}$ 的子集是连通的当且仅当它是一个区间.

**证明** 若 $S$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集，且 $S$ 不是一个区间，则存在 $x < z < y$ 使得 $x, y \in S$ 但 $z \notin S$. 重复例3.1.4 (2) 的论证，可以将 $S$ 写出两个开集的并

$$S = \big(S \cap (-\infty, z)\big) \cup \big(S \cap (z, +\infty)\big),$$

从而 $S$ 不连通.

下证区间 $I \subset \mathbb{R}$ 都是连通的. 假设 $I$ 是不连通的. 则存在开集 $U, V \subset \mathbb{R}$ 使得

$$U \cap I \neq \emptyset, \quad V \cap I \neq \emptyset \quad 且 \quad I \subset U \cup V.$$

不失一般性, 假设存在 $a < b$ 使得 $a \in U \cap I$ 且 $b \in V \cap I$. 令

$$A = \{x \in U \cap I \mid x < b\}$$

并记 $c = \sup A$. 则由 $U$ 是开集可知 $c \neq a$，于是 $a < c \leq b$. 特别地，$c \in I$. 但是，

- $c \notin U$: 如果 $c \in U$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $b > c + \varepsilon \in U$. 注意因为 $I$ 是区间, 且 $c < c + \varepsilon < b$, 故 $c + \varepsilon \in I \cap U$. 这与 $c = \sup A$ 矛盾.
- $c \notin V$: 如果 $c \in V$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $(c - \varepsilon, c] \subset V$. 因为 $c > a$，所以可取 $\varepsilon$ 充分小使得 $(c - \varepsilon, c] \subset I$，从而与 $c = \sup A$ 矛盾.

所以 $c \notin U \cup V$，从而 $c \notin I$，矛盾！ □

**注 3.1.6.** 在证明区间的连通性时，我们仅使用了如下事实：$\mathbb{R}$ 具有全序关系 $<$ 使得

(i)（**Dedekind 完备性**）任意有上界的子集都有一个最小上界.

(ii)（**稠密性**）对任意 $x<y, \exists z$ 使得$x<z<y$.

我们称满足这两个条件（且元素个数多于一个）的全序集为**线性连续统**. 除了 $\mathbb{R}$ 外，还有很多别的线性连续统，例如习题 2.10 中的“长直线”. 重复上面的论证，可得：

赋有序拓扑的线性连续统 $(X,<)$ 的子集是连通集当且仅当它是区间.

## ¶ 连续性原理

区间（包括 $\mathbb{R}$ 本身）的连通性这个结论虽然简单却非常有用：

**连续性原理（连通性方法）** 要证明某性质 $P(t)$ 对所有 $t\in I$ 成立，只需验证

(a) $\exists t_0\in I$ 使得 $P(t_0)$ 成立.

(b) $\{t \mid P(t)\text{ 成立}\}$ 是 $I$ 中的开集.

(c) $\{t \mid P(t)\text{ 成立}\}$ 是 $I$ 中的闭集.

我们可以将连续性原理视为某种“连续版本”的数学归纳法. 下面我们用一个简单的例子来说明如何使用该方法：

**例 3.1.7.** 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是实解析函数, 且存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$f^{(n)}(x_0)=0,\ \forall n.$$

则 $f(x)\equiv 0$.

**证明** 设 $S=\{x\in\mathbb{R} \mid f^{(n)}(x)=0,\forall n\}$. 则

- $x_0\in S \implies S\neq\emptyset$.
- $S$ 是开集: $x\in S \implies f$ 在 $x$ 处 Taylor 展开的收敛半径以内的任意点 $y$ 都落在 $S$ 中.
- $S$ 是闭集: $x_n\in S, x_n\to x_0 \implies x_0\in S$.

于是 $S=\mathbb{R}$, 即 $f(x)\equiv 0$. □

### 3.1.2 连通性的推论

## ¶ 一般的中值定理

我们列出连通空间的几个性质. 首先我们证明连通性是连续映射下保持的性质：

**命题 3.1.8.（连通性被连续映射保持）**

设 $f:X\to Y$ 是连续映射，且 $A\subset X$ 是连通子集，则像集 $f(A)$ 是 $Y$ 的连通子集.

**证明** 使用反证法. 我们假设 $f(A)$ 是不连通的. 则存在 $Y$ 中满足 $V_i\cap f(A)\neq\emptyset\ (i=1,2)$ 且 $V_1\cap V_2\cap f(A)=\emptyset$ 的开集 $V_1,V_2$, 使得

$$f(A)=(V_1\cap f(A))\cup(V_2\cap f(A)).$$

令 $A_i=f^{-1}(V_i)\cap A$. 则 $A_1,A_2\neq\emptyset, A_1\cap A_2=\emptyset$, 且 $A=A_1\cup A_2$，跟 $A$ 连通矛盾. □

特别地，连通性是一种拓扑性质：

**推论 3.1.9.（连通性是拓扑性质）**

如果 $f: X \to Y$ 是同胚, 则 $X$ 是连通的当且仅当 $Y$ 是连通的. ♡

由于 $\mathbb{R}$ 中的连通子集都是区间，我们得到数学分析中中值定理的推广：

**推论 3.1.10.（中值定理）**

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是连续映射. 如果 $X$ 是连通的，且存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = a < b = f(x_2)$, 则对任意 $a < c < b$, 存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = c$. ♡

**证明** $f(X)$ 是包含 $a$ 和 $b$ 的区间, 因此包含 $c$. □

上述推论中的 $\mathbb{R}$ 换成任意一个线性连续统，结论依然成立. 另一个直接的推论是

**推论 3.1.11.（Borsuk-Ulam 定理, $n=1$ 情形）**

对任意连续映射 $f: S^1 \to \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \in S^1$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$. ♡

**证明** 考虑映射

$$F: S^1 \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(x) - f(-x).$$

任取 $a \in S^1$. 如果 $F(a) = 0$, 证明已经完成. 如果 $F(a) \neq 0$, 则 $F(a)$ 和 $-F(a) = F(-a)$ 都落在 $S^1$ 在 $F$ 下的像集中. 因为 $S^1$ 是连通的, 所以 0 落在 $F$ 的像集中. □

## ¶ 闭包的连通性

接下来我们给出几个有用的连通性判据：

**命题 3.1.12.（介于连通集及其闭包间集合的连通性）**

如果 $A \subset X$ 是连通的, $A \subset B \subset \overline{A}$, 则 $B$ 是连通的. 特别地，$\overline{A}$ 是连通的. ♠

**证明** 任取连续映射 $f: B \to \{0,1\}$. 则 $f_1 = f|_A : A \to \{0,1\}$ 是连续的, 从而由命题3.1.3, $f_1$ 不是满射. 不妨设 $f_1(A) = \{0\}$. 因为 $A$ 在 $B$ 中的闭包是 $B$，由命题1.5.20,

$$f(B) \subset \overline{f(A)} = \{0\},$$

即 $f$ 不是满射. 故 $B$ 是连通的. □

当然，上述命题也可直接用定义证明，请读者自行证明. 作为推论，我们得到

**推论 3.1.13.（拓扑学家的正弦曲线）**

对任意子集 $C \subset \{(0,t) \mid -1 \le t \le 1\}$, 集合

$$S = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, y = \sin\frac{1}{x}\} \cup C \quad \subset \mathbb{R}^2$$

是连通的. ♡

## ¶ 并集的连通性

下一个命题虽然看起来很简单，但非常有用：

**命题 3.1.14.（"星形并"的连通性）**

设 $A_\alpha \subset X$ 是 $X$ 中的非空连通子集族. 若 $\cap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$，则 $\cup_\alpha A_\alpha$ 是连通的.

**证明** 记 $Y = \cup_\alpha A_\alpha$. 设 $Y = Y_1 \cup Y_2$, 满足 $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, 且

$$Y_1 = Y \cap U_1, \quad Y_2 = Y \cap U_2,$$

其中 $U_1, U_2$ 是 $X$ 中的开集. 任取 $x \in \cap_\alpha A_\alpha$. 不失一般性, 设 $x \in Y_1$. 对任意 $\alpha$, 我们有

$$A_\alpha = (A_\alpha \cap U_1) \cup (A_\alpha \cap U_2),$$

且 $A_\alpha \cap U_1 \neq \emptyset$（因为 $x \in A_\alpha \cap U_1$）. 故由 $A_\alpha$ 的连通性，我们得出 $A_\alpha \cap U_2 = \emptyset$. 因此

$$Y_2 = (\bigcup_\alpha A_\alpha) \cap U_2 = \bigcup_\alpha (A_\alpha \cap U_2) = \emptyset.$$

所以 $Y$ 是连通的. □

**推论 3.1.15.（"链形并"的连通性）**

设 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ $(N \leq +\infty)$ 是连通的，且对任意 $n < N$ 都有 $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$，则 $\cup_{n=1}^N A_n$ 是连通的.

**证明** 根据归纳法和命题3.1.14，对于每个 $n$，集合

$$B_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

是连通的. 又因为 $\cap_{n=1}^N B_n \neq \emptyset$，故 $\cup_{n=1}^N A_n = \cup_{n=1}^N B_n$ 是连通的. □

## ¶ 乘积的连通性

命题3.1.14的另一个推论是

**推论 3.1.16.（有限积的连通性）**

如果 $X, Y$ 是连通的, 则 $X \times Y$ 也是连通的

**证明** 不妨设 $X, Y$ 非空. 固定 $b \in Y$. 则集合 $X \times \{b\}$，作为连通集 $X$ 在连续映射

$$j_b : X \to X \times Y, \quad x \mapsto (x, b).$$

下的像集，是连通的. 因此对于任意 $x \in X$, 集合 $(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$ 是连通的. 而且，因为

$$\bigcap_x (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\}) \neq \emptyset,$$

所以

$$X \times Y = \bigcup_x ((\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\}))$$

是连通的 □

**推论 3.1.17**

$\mathbb{R}^n, [0,1]^n$ 和 $S^n$ 都是连通的.

**证明** 对于 $S^n$, 我们可以写成 $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$, 其中 $S^n_\pm = S^n \setminus \{0, \cdots, 0, \pm 1\}$ 是连通的，因为他们通过球极投影映射同胚于 $\mathbb{R}^n$ □

事实上，连通性是可乘性质的：

**命题 3.1.18.（任意积的连通性）**

乘积空间 $\prod_\alpha X_\alpha$ 关于乘积拓扑是连通的当且仅当每个 $X_\alpha$ 是连通的.

**证明** 如果 $\prod_\alpha X_\alpha$ 是连通的, 则每个 $X_\alpha$（作为 $\prod_\alpha X_\alpha$ 在投影映射下的像集）是连通的.

反之, 设每个 $X_\alpha$ 是连通的. 对任意 $\alpha$, 取定元素 $a_\alpha \in X_\alpha$. 对任意有限指标集 $K \subset \Lambda$, 由归纳法，乘积空间 $\prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ 是连通的. 不妨设指标集 $\Lambda$ 是无限集. 令

$$X_K = \{(x_\alpha) \mid x_\alpha = a_\alpha, \forall \alpha \notin K\}.$$

则 $X_K$ 是典范嵌入映射

$$j_K : \prod_{\alpha \in K} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \simeq \prod_{\alpha \in K} X_\alpha \times \prod_{\alpha \notin K} X_\alpha, \quad (x_\alpha)_{\alpha \in K} \mapsto ((x_\alpha)_{\alpha \in K}, (a_\alpha)_{\alpha \notin K})$$

下的像集. 因为映射 $j_K$ 是连续的, 所以 $X_K$ 是连通的. 注意到根据构造, $(a_\alpha) \in \cap_K X_K$. 所以由命题 3.1.14, 集合

$$X := \bigcup_{\text{有限的}K \subset \Lambda} X_K$$

是连通的. 下证 $\overline{X} = \prod_\alpha X_\alpha$. 事实上，由乘积拓扑定义，若 $U$ 是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 中的非空开集，则存在有限指标集 $K'$ 以及非空开集 $U_\alpha \subset X_\alpha (\alpha \in K)$ 使得

$$U \supset \prod_{\alpha \in K'} U_\alpha \times \prod_{\alpha \notin K'} X_\alpha.$$

特别地，若取有限指标集 $K$ 使得 $K' \cap K = \emptyset$, 则 $X_K \cap U \neq \emptyset$, 从而 $X \cap U \neq \emptyset$. 这就证明了 $\overline{X} = \prod_\alpha X_\alpha$. 于是由命题 3.1.12，$\prod_\alpha X_\alpha$ 是连通的. □

**注 3.1.19.** 该结论对箱拓扑不成立：考虑

$$X = \prod_{s \in S} \mathbb{R} = \mathbb{R}^S = \mathcal{M}(S, \mathbb{R})$$

其中 $S$ 是任何无限集. 则

$$A = \{f : S \to \mathbb{R} \mid \exists M \text{ 使得} |f(x)| \leq M, \forall x \in S\},$$

$$B = \{f : S \to \mathbb{R} \mid \sup_{x \in S} |f(x)| = +\infty\}$$

都是 $(X, \mathscr{T}_{box})$ 中的非空开集，且 $\mathbb{R}^S = A \cup B$. 所以 $(X, \mathscr{T}_{box})$ 是不连通的.