

3.2 道路连通性

3.2.1 道路与道路连通性

道路

接下来我们研究一个跟连通性密切相关的概念：道路连通性。它略强于连通性，更加直观，而且，最重要的是，我们可以对道路做“代数操作”。此外，在后文中，通过考虑特定映射空间的道路，我们可以定义“更高层次的连通性”，这些连通性都是由可计算的代数对象所描述，于是代数成为研究拓扑的重要工具。

定义 3.2.1. (道路)

设 X 是拓扑空间, $x_0, x_1 \in X$.

(1) 若连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 满足条件

$$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = x_1,$$

则我们称 γ 是一条从 x_0 到 x_1 的**道路**，称 x_0 和 x_1 为道路 γ 的**起点/终点**。

(2) 当 $x_0 = x_1$ 时，我们称道路 γ 是以 x_0 为基点的**回路**（或**圈**）。



我们把所有从 x_0 到 x_1 的空间叫做从 x_0 到 x_1 的**道路空间**，记为

$$\Omega(X; x_0, x_1) = \{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], X) \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}.$$

类似地，我们也有以 x_0 为基点的**回路空间**：

$$\Omega(X; x_0) = \{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], X) \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

在需要考虑其拓扑时，我们将赋予 $\Omega(X; x_0, x_1)$ 以及 $\Omega(X; x_0)$ 紧开拓扑。

注 3.2.2. 根据定义，道路是一个连续映射，而不仅仅是一条“几何曲线”（即像空间的一个点集）。同一条“几何曲线”的不同参数化将被视为不同的道路。

注意对于任意 $x \in X$ ，总有一条特殊的从 x 到 x 的回路，即**常值道路** γ_x ，其定义为

$$\gamma_x: [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma_x(t) \equiv x.$$

接下来我们对于道路定义一些“代数运算”：

定义 3.2.3. (道路的“积”与“逆”)

设 X 是拓扑空间。

(1) 对于任意从 x_0 到 x_1 的道路 γ ，我们称由

$$\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t).$$

所定义的（从 x_1 到 x_0 的）道路 $\bar{\gamma}$ 为道路 γ 的**逆**。

(2) 设 γ_1 是从 x_0 到 x_1 的道路， γ_2 是从 x_1 到 x_2 的道路。我们称由

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

所定义的从 x_0 到 x_2 的道路 $\gamma_1 * \gamma_2$ 为道路 γ_1 与 γ_2 的**积**。



这两个定义是非常直观的：道路的逆无非就是把道路“反向”后所得的新道路，而两条道路的积无非就是把这两条道路“首尾接在一起”所得到的新道路。不幸的是，这些操作不是“非常代数的”。例如， $\gamma * \bar{\gamma}$ 与 $\bar{\gamma} * \gamma$ 并不相同，因为前者是从 x_0 到 x_0 的道路，而后者是从 x_1 到 x_1 的道路。即使在 $x_0 = x_1$ 的情况下，它们仍然是不同的道路，因为它们是“方向相反”的两个回路。此外，我们希望常值道路 γ_x 表现得像一个“单位元”，但在上述定义下并非如此。在第 3.3 节我们将致力于解决这些问题，从而发展出一套正确的“回路的代数理论”。

道路连通空间

有了道路的概念，我们就可以定义一种新的连通性：

定义 3.2.4. (道路连通性)

若拓扑空间 X 中的任意两点都可用一条道路相连接，则我们称 X 是道路连通的。



从直观上来看，连通性刻画的是“空间不能被分成相互隔开的两部分”，而道路连通性刻画的则是“空间中任意两点可相连”。容易证明道路连通性比连通性强：

命题 3.2.5. (道路连通 $\implies$ 连通)

如果 X 是道路连通的，则 X 是连通的。



证明 采用反证法。假设存在非空的不相交开集 A 和 B ，使得 $X = A \cup B$ 。取 $x \in A$ ， $y \in B$ 以及从 x 到 y 的路径 γ ，则

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$$

是非空的不相交开集的并集，这与 $[0, 1]$ 的连通性矛盾。

□

反过来，我们不难找到连通但不道路连通的例子：

例 3.2.6. 在第 3.1 节我们已经看到拓扑学家的正弦曲线

$$X = \{(x, \sin \frac{\pi}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

是连通的，现在我们说明它不是道路连通的：

证明 假设在 X 中存在道路

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

使得 $\gamma(0) = (0, 0)$ 和 $\gamma(1) = (1, 0)$ 。令

$$s = \sup\{t \mid \gamma_1(t) = 0\}.$$

则 $s < 1$, $\gamma_1(s) = 0$ 且

$$\gamma_1(t) > 0, \quad \forall t > s.$$

因此我们得到

$$\gamma_2(t) = \sin \frac{\pi}{\gamma_1(t)}, \quad \forall t > s.$$

由 s 的定义以及 γ_1 的连续性, 存在递减数列 $t_n \rightarrow s$ 使得 $\gamma_1(t_n) = \frac{2}{2n+1}$. 于是

$$\gamma_2(t_n) = (-1)^n \not\rightarrow \gamma_2(s),$$

矛盾. □

当然, 很多很好的连通空间都是道路连通的, 例如欧氏空间的凸子集都是道路连通的, 因为根据定义, 凸子集中的任意两点都可以由直线段连接. 更一般地, 我们有

命题 3.2.7. (局部欧 + 连通开集 $\implies$ 道路连通)

设 X 是局部欧氏空间, $U \subset X$ 是连通开集, 则 U 是道路连通的. ♠

证明 我们采用连通性论证. 取定点 $x \in U$, 并考虑集合

$$A = \{y \in U \mid \text{在 } U \text{ 中存在从 } x \text{ 到 } y \text{ 的道路}\}.$$

则

- A 是非空的: 常值道路 γ_x 是从 x 到 x 的道路, 故总有 $x \in A$.
- A 是开集: 对任意 $y \in A$, 取 y 的开邻域 V 使得 $V \subset U$ 且 V 同胚于欧氏空间的单位球 $B(0, 1)$. 记同胚映射为 $\varphi: V \rightarrow B(0, 1)$. 令 γ_1 是 U 中从 x 到 y 的一条道路. 对任意 $y_1 \in V$, 令 γ_2 为从 y 到 y_1 的“线段道路”, 即

$$\gamma_2(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(y_1) + (1-t)\varphi(y)).$$

则 $\gamma_1 * \gamma_2$ 是从 x 到 y_1 的道路. 所以 $y_1 \in A$. 故 $V \subset A$, 从而 A 是开集.

- A 是闭集: 通过同样的论证, 我们可以证明如果 $y \notin A$, 那么对于 y 的同胚于欧氏开球的小邻域中的任意点 y_1 , 我们也有 $y_1 \notin A$. 所以 A^c 是开集, 即 A 是闭集.

于是由 U 的连通性可得 $A = U$. 换言之, U 中的任意点都可以通过 U 中的道路与 x 相连. 因此, U 中的任意两点 x_1, x_2 都可以通过 U 中的道路相连: 设 γ_1 是 U 中从 x 到 x_1 的道路, γ_2 是 U 中从 x 到 x_2 的道路, 则 $\gamma_1 * \gamma_2$ 是 U 中从 x_1 到 x_2 的道路. □

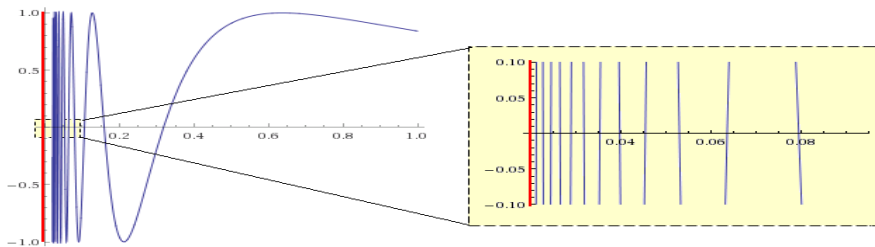
作为推论, 我们得到

推论 3.2.8

拓扑流形是道路连通的当且仅当它是连通的. ♡

局部道路连通性

如果你仔细思考例3.2.6, 你会发现对于任意“坏点”(比如原点), 在其任意小的邻域内, 你都可以找到无限多条不连通的“纵向曲线”:



换言之，空间“在这些坏点的任意小的局部范围内”都不是道路连通的：¹

定义 3.2.9. (局部道路连通)

设 X 是拓扑空间， $x \in X$. 如果对于 x 的任意开邻域 U ，存在 x 的开邻域 $V \subset U$ 使得 V 是道路连通的，则我们称拓扑空间 X 在 x 处局部道路连通. 如果 X 在每个点处都道路连通，则我们称 X 是局部道路连通空间.



例如， $\mathbb{R}^n$ 中的任意开集（或更一般地，任意拓扑流形或任意局部欧氏空间中的任意开集）是局部道路连通的.

下面我们证明局部道路连通的连通拓扑空间都是道路连通的，其证明与上述连通局部欧氏区域的道路连通性证明相仿：

命题 3.2.10. (连通 + 局部道路连通 $\implies$ 道路连通)

如果 X 是连通的且局部道路连通的，则 X 是道路连通的.



证明 固定点 $x \in X$. 考虑集合

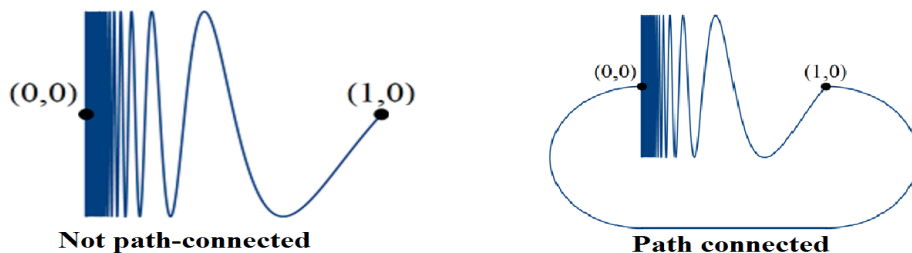
$$A = \{y \in X \mid y \text{ 可以通过道路连接到 } x\}.$$

则 $A \neq \emptyset$. 由局部道路连通性，

- A 是开集：如果一个点落在 A 中，则该点的一个邻域也都落在 A 中，
- A 是闭集：如果一个点落在 A^c 中，则该点的一个邻域也都落在 A^c 中.

故由 X 的连通性可知 $A = X$. □

注意道路连通集合未必是局部道路连通的：我们只要在拓扑学家的正弦曲线上添加一条从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 的曲线，即可得到一个道路连通但不局部道路连通的拓扑空间：



道路连通性的性质

我们知道连通性被连续映射保持. 类似的，我们有

命题 3.2.11. (道路连通性被连续映射保持)

设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射，且 $A \subset X$ 是道路连通子集，则 $f(A)$ 是道路连通的.



证明 对任意 $f(x_1), f(x_2) \in f(A)$ ，取从 x_1 到 x_2 的道路 $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$. 则

$$f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow f(A)$$

是从 $f(x_1)$ 到 $f(x_2)$ 的道路. □

¹类似地可以定义“局部连通性”的概念，其定义与基本性质见习题.

类似的, 我们也可以证明道路连通集的“星形并”以及乘积都是道路连通的, 且证明比连通性时更简单:

命题 3.2.12. (“星形并”的道路连通性)

设 X_α 是道路连通的, 且 $\bigcap_\alpha X_\alpha \neq \emptyset$. 则 $\bigcup_\alpha X_\alpha$ 是道路连通的.



证明 取 $x_0 \in \bigcap_\alpha X_\alpha$. 对于任意 $x_1 \in X_{\alpha_1}$ 和 $x_2 \in X_{\alpha_2}$, 存在 X_{α_1} 中从 x_1 到 x_0 的道路 γ_1 和 X_{α_2} 中从 x_0 到 x_2 的道路 γ_2 . 因此 $\gamma_1 * \gamma_2$ 是 x_1 到 x_2 的道路. $\square$

命题 3.2.13. (任意积的道路连通性)

乘积空间 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_{product})$ 是道路连通的当且仅当每个 X_α 都是道路连通的.



证明 若乘积空间 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_{product})$ 是道路连通的, 则每个 X_α , 作为道路连通空间在连续映射 π_α 下的像, 是道路连通的.

反之设每个 X_α 是道路连通的. 对任意 $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod_\alpha X_\alpha$, 选取 x_α 到 y_α 的道路 $\gamma_\alpha : [0, 1] \rightarrow X_\alpha$. 则

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha, \quad \gamma(t) = (\gamma_\alpha(t))$$

是从 $\gamma(0) = (x_\alpha)$ 到 $\gamma(1) = (y_\alpha)$ 的道路. 故 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_{product})$ 是道路连通的. $\square$

当然, 并不是所有连通性的性质都可以推广到道路连通性上. 比如集合 $\{(x, \sin \frac{\pi}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$, 作为道路连通集合的像, 是道路连通的. 于是例 3.2.6 也告诉我们:

道路连通子集的闭包不一定是道路连通的.

这是连通性与道路连通性的一个区别.

¶ 弧连通

根据定义, 道路是指连续映射 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. 我们并不要求 γ 是单射, 因此道路是允许“自相交”的. 当然, 不自相交的道路在某些问题中更便于应用. 于是我们定义

定义 3.2.14. (弧与弧连通)

设 X 是一个拓扑空间.

- (1) 若道路 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ 是一个拓扑嵌入, 则我们称 γ 为一条**弧**.
- (2) 若 X 中任意两点都可以用弧连接, 则我们称 X 是**弧连通空间**.



根据定义, 弧连通是一种更强的连通性: 弧连通必然是道路连通的, 但反之未必. 例如, 不难证明“带有两个原点的直线”(见习题 2.10) 是道路连通的, 却不是弧连通的. 这个例子同时也告诉我们, 弧连通性不是连续映射下保持的性质.

但是对于度量空间, 一些较弱的连通性就可以保证弧连通性:

命题 3.2.15. (Peano 空间是弧连通的)

任意紧连通且局部连通的度量空间是弧连通的.



证明较为复杂, 这里略去, 有兴趣的读者可参见 Stephen Williard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

作为推论, 我们证明:

推论 3.2.16. (Hausdorff: 弧连通 $\iff$ 道路连通)

Hausdorff 空间是弧连通的当且仅当它是道路连通的.



证明 假设 Hausdorff 空间 X 是道路连通的. 任取 $x, y \in X$ 以及连接 x, y 的道路 γ . 显然 $\gamma(I)$ 是紧连通空间. 此外, 由闭映射引理, γ (作为从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射) 是闭映射, 从而由本节后面的习题, $\gamma(I)$ 是局部连通的. 最后, 由期中考试最后一题可知 $\gamma(I)$ 是度量空间. 于是 $\gamma(I)$ 是弧连通的, 即存在落在 $\gamma(I)$ 里的弧连接 x 与 y . $\square$

于是对于道路连通的 Hausdorff 空间, 我们总可以用没有自相交的弧连接任意两点.

3.2.2 分支

¶ 连通分支和道路连通分支

对任意拓扑空间 X , 根据连通性和道路连通性, 我们可以定义两个等价关系:

$$x \sim y \iff \exists \text{ 连通子集 } A \subset X \text{ 使得 } x, y \in A,$$

$$x \stackrel{p}{\sim} y \iff \exists X \text{ 中的道路连接 } x \text{ 和 } y.$$

不难验证 $\sim$ 和 $\stackrel{p}{\sim}$ 都是等价关系.²

定义 3.2.17. (连通分支与道路连通分支)

设 X 是拓扑空间.

- (1) 我们称等价关系 $\sim$ 的每个等价类为 X 的一个 **连通分支**.
- (2) 我们称等价关系 $\stackrel{p}{\sim}$ 的每个等价类为 X 的一个 **道路连通分支**.



根据定义, 每个连通分支都可以看作 X 的一个 (关于“集合包含”这个偏序关系的) 极大连通子集 (从而跟我们在习题 3.1 中所见的一致), 而每个道路连通分支都可以看作 X 的一个极大道路连通子集. 显然

- 每个道路连通分支都完全包含在某个连通分支中.
- 不同的连通分支是两两无交的; 不同的道路连通分支也是两两无交的.

我们列举一些连通分支和道路连通分支的不太显然的结论, 其证明均留作习题:

- (1) X 的任意连通分支都是闭子集, 但不一定是开子集. 【然而, “拓扑学家的正弦曲线”这个例子告诉我们, 道路连通分支可能既不是闭集也不开集.】
- (2) 如果 X 是局部连通的, 那么任意连通分支都是开集.
- (3) 如果 X 是局部道路连通的, 那么任意道路连通分支都恰好是连通分支 (从而此时任意道路连通分支都是即开又闭的).

²注意弧连通性不能用于定义等价关系, 因为自反性和传递性都不满足.

¶ 连通分支的空间

我们知道, 拓扑空间上的每个等价关系都定义了一个商映射, 进而定义了一个商拓扑空间. 因此由等价关系 $\sim$ 和 $\mathcal{L}$, 我们得到两个商空间,

$$\pi_c(X) := X/\sim$$

和

$$\pi_0(X) := X/\mathcal{L}.$$

我们先考虑 $\pi_c(X)$ 的拓扑. 从直觉上不难猜测, $\pi_c(X)$ 应该是一个“非常不连通”的空间. 我们可以用一个特例诠释何谓“非常不连通”: 如果 X 是完全不连通空间, 则每个连通分支仅包含一个元素, 因此 $\pi_c(X)$ 就是 X 本身. 特别地, $\pi_c(X)$ 也完全不连通空间. 事实上, 该结论确实对任意拓扑空间 X 都成立:

命题 3.2.18. (连通分支空间完全不连通)

商空间 $\pi_c(X)$ (赋商拓扑) 是完全不连通的. 特别地, $\pi_c(X)$ 是 (T1) 空间.



证明 设 $p: X \rightarrow X/\sim$ 是典范投影映射. 设 $S \subset X/\sim$ 是至少包含两个元素的子集. 则 $p^{-1}(S)$ 是不连通的. 所以存在 (关于子空间拓扑) 既开又闭的非空子集 $A \subsetneq p^{-1}(S)$. 我们断言 A 一定是 X 的连通分支的并集:

如果 X_1 是 X 的一个连通分支且 $A \cap X_1 \neq \emptyset$, 则 $X_1 \subset p^{-1}(S)$ 且 X_1 也是 $p^{-1}(S)$ 的一个连通分支. 因此由

$$X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap (p^{-1}(S) \setminus A))$$

可得 $X_1 \subset A$. 故 A 是 X 的连通分支的并集.

因此 $A = p^{-1}(p(A))$. 根据商拓扑的定义, $p(A)$ 在 $X/\sim$ 中的既开又闭的非空子集. 因为 $A \subsetneq p^{-1}(S)$, 所以 $p(A) \neq S$. 故 S 是不连通的, 从而 $\pi_c(X)$ 是完全不连通的.

最后我们说明 $\pi_c(X)$ 是 (T1) 空间. 事实上, 任意完全不连通的空间都是 (T1) 空间, 因为由完全不连通性, 任意单点集 $\{x\}$ 都是一个连通分支, 连通分支都是闭子集. $\square$

接下来我们考虑 $\pi_0(X)$. 我们当然可以将其视为商拓扑空间. 然而, $\pi_0(X)$ 上的商拓扑可能很糟糕. 比如, 我们自然会猜测, 既然任意道路连通分支都“被捏成一个点”了, 那得到的商空间应该是“完全不道路连通”了. 遗憾的是, 这是不对的:

例 3.2.19. 考虑 X 为“拓扑学家的正弦曲线”, 则商空间 $\pi_0(X)$ 由两个元素组成. 让我们用“ v ”来表示 y 轴上的垂直线段部分, 用“ s ”来表示正弦曲线段部分. 则我们有

$$\pi_0(X) = \{v, s\}, \quad \mathcal{T}_{quotient} = \{\emptyset, \{s\}, \{v, s\}\}.$$

可以证明 (习题): 商空间 $\pi_0(X)$ 是道路连通的, 但不是 (T1) 的.

因为在一般情况下 $\pi_0(X)$ 上的商拓扑结构不够好, 不能给我们提供多少有用的信息, 所以我们宁愿忘记 $\pi_0(X)$ 上的商拓扑结构, 而只是将 $\pi_0(X)$ 视作一个集合: 该集合的势是空间 X 的一个很好用的拓扑不变量. 【然而, 当 X 本身是拓扑群时, $\pi_0(X)$ 也是一个拓扑群.】【事实上, 1980 年 Harris 证明了: 任何拓扑空间均可实现为某个拓扑空间的 π_0 .】

¶ 鸟瞰: 范畴间的函子

回想一下, 在第 1.5 节中我们提到了范畴的概念: 一个范畴 $\mathcal{C}$ 包括

- 由对象构成的类 $\text{Ob}(\mathcal{C})$,
- 由态射构成的类 $\text{Mor}(\mathcal{C})$, 其中我们把从 X 到 Y 的态射全体记为 $\text{Mor}(X, Y)$.

下面我们引入**函子**的概念, 用于在范畴之间建立起联系:

定义 3.2.20. (函子)

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是范畴. 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的 (协变) **函子**^a F 是一个对应, 使得

- (1) 将 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 中的每个对象 X 都对应到 $\text{Ob}(\mathcal{D})$ 中的某个对象 $F(X)$,
- (2) 将范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $f \in \text{Mor}(X, Y)$ 都对应到范畴 $\mathcal{D}$ 中的某个态射 $F(f) \in \text{Mor}(F(X), F(Y))$, 且该对应满足:
 - 对范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 有

$$F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)},$$

- 对范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f \in \text{Mor}(X, Y)$ 和 $g \in \text{Mor}(Y, Z)$ 都有

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

^a类似地我们可以定义**反变函子**的概念: 反变函子也是一个对应, 它将每个态射 $f \in \text{Mor}(X, Y)$ 对应到态射 $F(f) \in \text{Mor}(F(Y), F(X))$ 并且满足 $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ 和 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.



我们给出一些函子的例子.

例 3.2.21.

- (1) 设 $\mathcal{TOP}$ 是拓扑空间范畴, 即:

- 对象是拓扑空间,
- 态射是拓扑空间之间的连续映射.

设 $\mathcal{SET}$ 是集合范畴, 即:

- 对象是集合,
- 态射是关系.

则我们可以定义“遗忘函子”, 将每个拓扑空间映射到其集合本身, 将连续映射映到其图像.

- (2) 类似地, 设 $\mathcal{ALG}$ 是 (结合) 代数范畴, 即

- 对象是 (结合) 代数,
- 态射是代数同态.

则我们可以定义 $\mathcal{TOP}$ 到 $\mathcal{ALG}$ 的反变函子 $\mathcal{C}$, 将每个拓扑空间 X 映射到 X 上的实值连续函数全体构成的代数 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, 将每个连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 映到代数同态

$$\mathcal{C}(f): \mathcal{C}(Y, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \quad \mathcal{C}(f)(\varphi) := \varphi \circ f.$$

- (3) 考虑 $\mathcal{TOP}$ 的两个子范畴, 由局部紧 Hausdorff 空间组成的范畴 $\mathcal{LCH}$ (或者由 Hausdorff 且完全正则空间组成的范畴 $\mathcal{HCR}$) 和由紧 Hausdorff 空间组成的范畴 $\mathcal{CH}$. 则 Stone-Čech 紧化的过程 β 是一个函子 (见习题 2.9).

¶ 函子 π_c 和 π_0

下面设 X, Y 是拓扑空间, $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. 根据习题 3.1, f 将 X 的连通分支映射到 Y 的连通分支中. 这样我们就得到了一个映射

$$\pi_c(f) : \pi_c(X) \rightarrow \pi_c(Y), \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

事实上 π_c 有如下很好的性质: (证明留作练习.)

命题 3.2.22. (π_c 的函子性)

映射 $\pi_c(f) \in \mathcal{C}(\pi_c(X), \pi_c(Y))$, 且满足

$$\pi_c(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\pi_c(X)}, \quad \text{和} \quad \pi_c(g \circ f) = \pi_c(g) \circ \pi_c(f).$$

换言之, π_c 是从拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$ 到完全不连通拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}_{totdis}$ 的函子:

$$\pi_c : \mathcal{TOP} \rightarrow \mathcal{TOP}_{totdis}$$

- $(X, \mathcal{T}) \rightsquigarrow \pi_c(X) = (X/\sim, \mathcal{T}_{quotient})$,
- $f \in \mathcal{C}(X, Y) \rightsquigarrow \pi_c(f) \in \mathcal{C}(\pi_c(X), \pi_c(Y))$

类似地, 因为任意连续映射 $f : X \rightarrow Y$ 也将 X 中的道路连通分支映射到 Y 中的道路连通分支中去, 我们自然得到一个良定义的 (集合之间的) 映射

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y), \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

我们有 (证明留作练习.)

命题 3.2.23. (π_0 的函子性)

映射 $\pi_0(f)$ 满足

$$\pi_0(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\pi_0(X)} \quad \text{和} \quad \pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f).$$

换言之, π_0 是从拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$ 到集合范畴 $\mathcal{SET}$ 的函子³:

$$\pi_0 : \mathcal{TOP} \rightarrow \mathcal{SET}$$

- $(X, \mathcal{T}) \rightsquigarrow \pi_0(X) = X/\sim$,
- $f \in \mathcal{C}(X, Y) \rightsquigarrow \pi_0(f) \in \mathcal{M}(\pi_0(X), \pi_0(Y))$

注 3.2.24. 当然, 在应用函子 π_c 或 π_0 时, 我们丢失了原空间的很多信息. 但这正是代数拓扑背后的哲学: 区分拓扑空间可能非常困难, 但通常区分更简单的范畴 (如 $\mathcal{SET}$, $\mathcal{GROUP}$ 或 $\mathcal{VECTORSPACE}$) 中的对象更容易. 例如, 通过计算 $\pi_c(X)$ 或 $\pi_0(X)$ 的基数, 我们能够区分许多拓扑空间. 例如, 我们知道

3 ≠ 4 THREE ≠ FOUR

第二组图形在拓扑上是不同的, 因为它们有不同的 π_0 . 对于第一组图形, 可以用 π_0 , 方法是小心地删除每边的点, 也可以考察基本群 π_1 , 即计算图中“洞”的个数.

³事实上 $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ 关于商拓扑也是连续的, 因此是从拓扑空间范畴到拓扑空间范畴的函子. 因为我们习惯于“忘掉” $\pi_0(X)$ 上的商拓扑, 这里 π_0 实际上是“拓扑 π_0 函子”和“遗忘函子”的复合.

3.3 同伦

3.3.1 连续形变

¶ 作为连续映射族的连续形变

我们知道,“连续形变”在几何拓扑中是最基本的操作之一,但我们还没有给出其精确定义.现在有了一般拓扑学的知识,当我们谈及抽象的“连续”对象时,我们可以给出其精确的含义:

在抽象拓扑空间中,元素 a 的一个**连续形变**是指一个从某个参数空间 T 到该空间的连续映射,使得对于参数空间的某元素 t_0 ,有 $f(t_0) = a$ (并且 f 往往需要满足其他由问题而定的额外条件).

例如,我们可以把以一点 x_0 为起点的道路视为对该点的一个连续形变.更一般地,设映射 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, 其中 X, Y 是拓扑空间.则 f 的以某个拓扑空间 T 为“形变参数空间”的**连续形变**就是一个连续映射 (其中 $\mathcal{C}(X, Y)$ 上的拓扑是**紧开拓扑** $\mathcal{T}_{c.o.}$)

$$F : T \rightarrow \mathcal{C}(X, Y), \quad t \mapsto F(t) = f_t \in \mathcal{C}(X, Y)$$

使得对某个 $t_0 \in T$ 有 $f_{t_0} = f$.

在很多问题中,我们取参数空间 $T = [0, 1]$ 或 $T = \mathbb{R}$ (“单参数”) 并取 $t_0 = 0$. 例如,设 γ 是空间 X 内从 x_0 到 x_1 的一条道路,道路 γ 的端点固定的**连续形变**是连续映射

$$F : [0, 1] \rightarrow \Omega(X; x_0, x_1) = \{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], X) \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$$

且满足

$$\begin{aligned} F(0) &= \gamma, \\ F(t)(0) &= x_0, \\ F(t)(1) &= x_1. \end{aligned}$$



当然,在谈及映射 F 的连续性时,我们需要在 $\Omega(X; x_0, x_1)$ 上指定一个拓扑.因为根据道路的定义, $\Omega(X; x_0, x_1)$ 是 $\mathcal{C}([0, 1], X)$ 的子空间,所以我们同样可以采用紧开拓扑.⁴

¶ 作为一个连续映射的连续形变

现在假设我们有一个映射 $F \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$, 即一个连续族的连续映射.这在概念上仍然很复杂.但是任意给定这样的 F , 我们可以定义一个更简单的映射

$$G \in \mathcal{M}(T \times X, Y), \quad G(t, x) := F(t)(x).$$

事实上在较弱的条件下, F 是连续的当且仅当 G 是连续的!

⁴我们不希望在这里使用逐点收敛拓扑,因为逐点收敛拓扑丢失了“道路参数区间” $[0, 1]$ 本身的拓扑信息,而且即使道路列 γ_n 在逐点收敛拓扑下收敛于某道路 γ , 该收敛过程也没有好的“局部控制”.

命题 3.3.1. (连续形变 v.s. 乘积空间的连续映射)

设 X, Y, T 为拓扑空间. 考虑对应关系 (即双射)

$$\mathcal{M}(T, \mathcal{M}(X, Y)) \longleftrightarrow \mathcal{M}(T \times X, Y)$$

$$F(t)(x) \longleftrightarrow G(t, x) := F(t)(x)$$

则我们有

(1) 若 $G \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$, 则 $F \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$.

(2) 若 X 是 LCH 空间, 则 $F \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$ 当且仅当 $G \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$.



证明 ($\Leftarrow$) 设 $G \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$. 则给定任意 $t \in T$, 映射 $F(t): X \rightarrow Y$ 是连续的, 因为 $F(t)$ 可以写成连续函数的复合:

$$X \xrightarrow{j_t} T \times X \xrightarrow{G} Y,$$

其中 $j_t(x) = (t, x)$ 是“在 t 处的典范嵌入”. 故 F 将 T 映到 $\mathcal{C}(X, Y)$.

为了证明 F 作为 T 到 $\mathcal{C}(X, Y)$ 的映射是连续, 只需证明

对任意紧集 $K \subset X$ 和开集 $U \subset Y$, $F^{-1}(S(K, U))$ 在 T 中是开集. (*)

设 $F(t) \in S(K, U)$. 则根据 G 的定义, $G(\{t\} \times K) \subset U$, 即

$$\{t\} \times K \subset G^{-1}(U).$$

由 G 的连续性, $G^{-1}(U)$ 在 $T \times X$ 中是开集. 又因为 K 是紧集, 由引理 2.2.1 即管形邻域引理, 存在 T 中的开集 $V \ni t$ 使得

$$V \times K \subset G^{-1}(U).$$

因此对任意 $t \in V$,

$$F(t)(K) \subset G(V \times K) \subset U.$$

所以 $V \subset F^{-1}(S(K, U))$, 这就证明了 (*).

($\Rightarrow$) 设 $F \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$. 为了证明 G 是连续的, 我们需要证明

对任意开集 $U \subset Y$, $G^{-1}(U)$ 在 $T \times X$ 中是开集. (**)

设 $(t, x) \in G^{-1}(U)$, 则由定义, $F(t) \in S(\{x\}, U)$. 因为 X 是 LCH 空间, 由习题 2.4,

$$S(\{x\}, U) = \bigcup_{x \text{ 的紧邻域 } K} S(K, U).$$

所以存在 x 的开邻域 W_x 使得 $\overline{W_x}$ 是紧集, 且

$$F(t) \in S(\overline{W_x}, U).$$

因为 F 是连续的, 而且 $t \in F^{-1}(S(\overline{W_x}, U))$, 故存在 t 的开邻域 V 使得

$$V \subset F^{-1}(S(\overline{W_x}, U)),$$

即 $G(V, \overline{W_x}) \subset U$. 因此

$$V \times W_x \subset V \times \overline{W_x} \subset G^{-1}(U).$$

这就完成了证明. □