

3.3.2 映射与空间的同伦

¶ 映射的同伦

我们定义

定义 3.3.2. (同伦)

设 X 和 Y 是拓扑空间, $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$. 若存在连续映射 $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ 使得

$$F(0, x) = f_0(x) \quad \text{且} \quad F(1, x) = f_1(x), \quad \forall x \in X,$$

则我们称 f_0 和 f_1 是**同伦的** (homotopic), 且称 F 是 f_0 和 f_1 之间的一个**同伦** (homotopy).



记号 如果 f_0 同伦于 f_1 , 将其写作 $f_0 \sim f_1$.

根据定义, 如果 $f_0 \sim f_1$, 则 f_0 可以通过一个“单参数的映射族”被连续地形变到 f_1 . 由命题 3.3.1, $f_0 \sim f_1$ 蕴含了“ f_0 和 f_1 都在 $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{c.o.})$ 的同一道路连通分支中”. 此外, 如果 X 是 LCH 空间, 那么任意从 f_0 到 f_1 的连续形变都由一个同伦给出, 即 $f_0 \sim f_1$ 当且仅当 f_0, f_1 位于 $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{c.o.})$ 中的同一道路连通分支中.

容易验证同伦关系是 $\mathcal{C}(X, Y)$ 上的一个等价关系. [当然, 如果 X 是 LCH 空间, 那么同伦等价关系就是由 $\mathcal{C}(X, Y)$ 中的道路定义的道路等价关系.]

记号 对于每个 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, 我们记

$$[f] = f \text{ 的同伦等价类}$$

并且记

$$[X, Y] = \mathcal{C}(X, Y)/\sim = \mathcal{C}(X, Y) \text{ 中的同伦类集合.}$$

【因此如果 X 是 LCH 空间, 那么 $[X, Y] = \pi_0(\mathcal{C}(X, Y))$.】

一个特殊情况: 如果 $X = \{\text{pt}\}$ 是一个单点集, 那么任一连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 都对应于 Y 中的一个点. 在这种情况下, “两个连续映射 f_0, f_1 是同伦的” 就等价于 “对应的两个点可以由 Y 的道路连接”. 换言之, 我们有

$$[\{\text{pt}\}, Y] = \pi_0(Y).$$

¶ 映射的同伦类上的运算

如同映射可以复合、拉回、前推一样, 我们也可以对映射的同伦类做同样的操作. 为此我们需要 (留作练习)

命题 3.3.3. (复合、拉回、前推不依赖于代表元的选取)

- (1) 若 $f_i \in \mathcal{C}(X, Y), g_i \in \mathcal{C}(Y, Z) (i = 1, 2)$, 且 $f_0 \sim f_1, g_0 \sim g_1$, 则 $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.
- (2) 设 $\varphi \in \mathcal{C}(X_0, X_1), f_i \in \mathcal{C}(X_1, Y) (i = 1, 2)$, 且 $f_0 \sim f_1$, 则 $f_0 \circ \varphi \sim f_1 \circ \varphi$.
- (3) 设 $\psi \in \mathcal{C}(Y_0, Y_1), f_i \in \mathcal{C}(X, Y_0) (i = 1, 2)$, 且 $f_0 \sim f_1$, 则 $\psi \circ f_0 \sim \psi \circ f_1$.



于是, 在同伦类上, 下面定义的复合、拉回、推出都是良定的:

(a) 同伦类的**复合** (composition)

$$\begin{aligned} [X, Y] \times [Y, Z] &\rightarrow [X, Z] \\ ([f], [g]) &\mapsto [g \circ f]. \end{aligned}$$

(b) 同伦类的**拉回** (pull-back)

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{C}(X_0, X_1) &\rightsquigarrow \varphi^* : [X_1, Y] \rightarrow [X_0, Y] \\ [f] &\mapsto \varphi^*([f]) = [f \circ \varphi]. \end{aligned}$$

(c) 同伦类的**推出** (push-forward)

$$\begin{aligned} \psi \in \mathcal{C}(Y_0, Y_1) &\rightsquigarrow \psi_* : [X, Y_0] \rightarrow [X, Y_1] \\ [f] &\mapsto \psi_*([f]) = [\psi \circ f]. \end{aligned}$$

¶ 零伦

最简单的连续映射是常值映射. 故最简单的同伦类是常值映射所在的同伦类:

定义 3.3.4. (零伦)

如果 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 同伦于某个常值映射, 则我们称 f 是**零伦的** (null-homotopic). 

这个概念在几何中非常有用. 我们给出两个简单而常用的例子:

例 3.3.5.

(1) 令 $X = Y = S^1 \subset \mathbb{C}$, 并取 $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ 为映射

$$f_n(z) = z^n.$$

我们将会看到所有的 f_n 彼此互不同伦, 特别地, 当 $n \neq 0$ 时 f_n 不零伦. 此外, 我们还会看到任何连续映射 $f \in \mathcal{C}(S^1, S^1)$ 都恰好同伦于 f_n 中的某一个.

(2) 令 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 是凸集, 或者更一般的, 设 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 是一个“星形域”, 即

存在“中心点” $y_0 \in Y$ 使得 $\forall y \in Y$, 都有: 线段 $\overline{y_0 y} \subset Y$.

则对于任意拓扑空间 X 和 Z ,

- 任意连续映射 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 是零伦的.

原因: 从 f 到常值映射可以建立下述同伦:

$$F : [0, 1] \times X \rightarrow Y, \quad t \mapsto F(t, x) = ty_0 + (1 - t)f(x).$$

- 任意连续映射 $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ 是零伦的.

原因: 从 f 到常值映射可以建立下述同伦:

$$F : [0, 1] \times Y \rightarrow Z, \quad t \mapsto F(t, y) = f(ty_0 + (1 - t)y).$$

¶ 可缩空间

定义 3.3.6. (可缩空间)

设 X 是拓扑空间. 若恒等映射 $\text{Id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ 是零伦的, 则我们称 X 是**可缩空间** (contractible space).



例 3.3.7.

(1) 由例 3.3.5(2), $\mathbb{R}^n$ 中的任意星形域是可缩的, 而例 3.3.5(1) 则告诉我们 S^1 不是可缩的.

(2) 更一般地, S^{n-1} 不是可缩的.

事实上, 可以证明 (作为练习): S^{n-1} 是可缩的当且仅当存在一个收缩映射

$$f: B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \rightarrow S^{n-1}.$$

(根据定义, $f \in \mathcal{C}(B^n, S^{n-1})$ 是一个收缩映射是指 f 满足条件 $f \circ i = \text{Id}_{S^{n-1}}$, 其中 i 为嵌入映射 $i: S^{n-1} \hookrightarrow B^n$, 见习题 2.9.) 我们将在下一章证明这样的 f 不存在 (这等价于 Brouwer 的不动点定理, 参见习题).

(3) 对于任意拓扑空间 X , 它的锥空间 $C(X)$ (见第 1.4 节) 是可缩空间 (留作习题). 比如, S^{n-1} 的锥空间 B^n 是可缩的. 作为推论我们得到:

任意拓扑空间都能被嵌入到某个可缩空间.

¶ 拓扑空间的同伦等价

回顾一下, 两个拓扑空间 X, Y 是同胚的, 记作 $X \simeq Y$, 是指

$$\exists f \in \mathcal{C}(X, Y), g \in \mathcal{C}(Y, X) \text{ 使得 } f \circ g = \text{Id}_Y \text{ 且 } g \circ f = \text{Id}_X.$$

同胚拓扑空间之间的一个非常强的等价关系: 如果 $X \simeq Y$, 那么 X, Y 有相同的拓扑性质 (紧性, 连通性, 可度量性, 可数性, 分离性质等等). 下面我们用映射的同伦在拓扑空间之间定义一个弱很多的等价关系:

定义 3.3.8. (同伦等价)

对于拓扑空间 X 和 Y , 如果存在 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 和 $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ 使得

$$f \circ g \sim \text{Id}_Y \text{ 且 } g \circ f \sim \text{Id}_X,$$

则我们称 X 和 Y 是**同伦等价的** (homotopy equivalent), 记作 $X \sim Y$, 并称映射 f 和 g 为 X 和 Y 之间的**同伦等价** (homotopy equivalence), 且称 g 为 f 的一个**同伦逆** (homotopy inverse).



注 3.3.9.

(1) 在定义中, f 和 g 仅在同伦意义上互逆, 它们本身不需要是可逆映射.

(2) 如果 $X \simeq Y$, 那么 $X \sim Y$, 反之显然并不成立.

(3) 不难验证拓扑空间之间的同伦等价是一个等价关系.

(4) 绝大多数拓扑性质 (包括紧性, (T_i) , (A_i) , 可度量性等) 都不能在同伦等价下保持.

例 3.3.10. 我们有 $S^n \sim \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

所需的同伦等价可以由以下方式显式地构造出来: 令

$$f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x$$

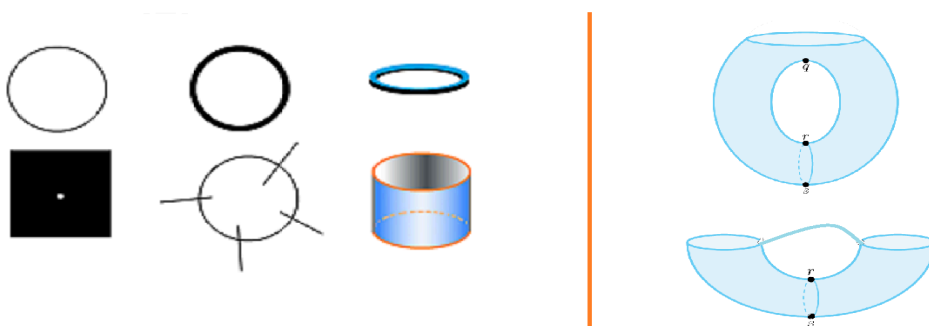
和

$$g: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, \quad x \mapsto x/|x|.$$

那么显然 $g \circ f = \text{Id}_{S^n}$, 而 $f \circ g \sim \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ 可由如下同伦给出:

$$F(t, x) = tx + (1-t)x/|x|.$$

下图是一些同伦等价 (但不同胚) 的例子:



3.3.3 道路同伦

¶ 道路上的运算

下面我们考虑一个特殊的映射空间, $\mathcal{C}([0, 1], X)$ 【即 X 上全体道路 (不固定端点) 所构成的空间】. 在该空间上, 我们定义过两个“代数运算”以及一些预备作为“运算单位元”的特殊道路:

- 任意 $x_0 \in X$ 处的常值道路

$$\gamma_{x_0}(t) = x_0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

- 给定任意从 x_1 到 x_2 的道路 γ , 我们可以“反转”道路得到它的“逆”:

$$\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t).$$

- 给定从 x_1 到 x_2 的道路 γ_1 及从 x_2 到 x_3 的道路 γ_2 , 我们可以将它们接起来得到“积”:

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

遗憾的是, 这些简单运算并不是我们想要的“真正的代数运算”. 例如, 我们希望“道路的积”是一个某个群的乘法, 常值道路扮演该乘法下“单位元”的角色, 而“道路的逆”则是该乘法运算下的“逆元”. 然而, 在仅仅考虑道路的情况下, 这些预期的性质事实上

都不成立:

$$\text{对于 } \gamma_i \in \Omega(X; x_i, x_{i+1}) : (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \neq \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3),$$

$$\text{对于 } \gamma \in \Omega(X; x_1, x_2) : \gamma_{x_1} * \gamma \neq \gamma, \quad \gamma * \gamma_{x_2} \neq \gamma,$$

$$\text{对于 } \gamma \in \Omega(X; x_1, x_2) : \gamma * \bar{\gamma} \neq \gamma_{x_1}, \quad \bar{\gamma} * \gamma \neq \gamma_{x_2}.$$

不过, 情况也并没有那么糟糕. 比如, 对于上面所列的前两组“不相等”, 虽然作为道路, 不等号两边是不同的, 但它们作为“曲线”它们是一样的: 实际上, 不等号两边只是同一曲线的不同参数化.

¶ 重新参数化的同伦不变性

定义 3.3.11. (重新参数化)

设 $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ 和 $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ 都是 X 中的道路. 如果存在连续映射 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 且使得

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ f,$$

则我们称 f_2 是 f_1 的**重新参数化** (reparametrization) .



例 3.3.12.

- 以下分段线性映射 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 将 $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ 重参数化为 $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$:

$$f([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{1}{4}], \quad f([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \quad f([\frac{3}{4}, 1]) = [\frac{1}{2}, 1].$$

- 以下分段线性映射 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 将道路 γ 重参数化为道路 $\gamma_{x_1} * \gamma$:

$$f([0, \frac{1}{2}]) = 0, \quad f([\frac{1}{2}, 1]) = [0, 1].$$

- 以下分段线性映射 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 将道路 γ 重参数化为 $\gamma * \gamma_{x_2}$:

$$f([0, \frac{1}{2}]) = [0, 1], \quad f([\frac{1}{2}, 1]) = 1.$$

道路的运算最终能够被“包装”成代数运算, 最关键的观察在于:

命题 3.3.13. (重新参数化的道路是同伦的)

令 $\gamma_2 = \gamma_1 \circ f$ 为 γ_1 的重新参数化, 那么 $\gamma_2 \sim \gamma_1$.



证明 [我们要用到 $[0, 1]$ 的凸性. 可以与例3.3.5(2)做比较.] 令

$$F(t, s) = \gamma_1((1-t)s + tf(s)).$$

则 F 是 $F(0, s) = \gamma_1(s)$ 和 $F(1, s) = \gamma_1(f(s)) = \gamma_2(s)$ 之间的同伦. □

¶ 同伦类的代数运算

现在我们证明前面所列的“我们希望相等但实际上不相等的道路”, 其实都在同一个同伦类中:

命题 3.3.14. (道路运算保同伦类)

对于任意 $\gamma_i \in \Omega(X; x_i, x_{i+1})$ ($i = 1, 2$) 以及 $\gamma \in \Omega(X; x_1, x_2)$, 我们有

$$(1) (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3).$$

$$(2) \gamma_{x_1} * \gamma \sim \gamma, \quad \gamma * \gamma_{x_2} \sim \gamma.$$

$$(3) \gamma * \bar{\gamma} \sim \gamma_{x_1}, \quad \bar{\gamma} * \gamma \sim \gamma_{x_2}.$$



证明 (1)(2) 由例 3.3.12 和命题 3.3.13 可得. 下证 (3). 因为“推出”在同伦类上的良定性, 有
如果 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 且在 X 中 $\gamma_1 \sim \gamma_2$, 则在 Y 中 $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$. (a)

现在我们取 $[0, 1]$ 上的两条从 0 映射到 0 的道路, 即

$$\lambda_1(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2s, & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{和} \quad \lambda_2(s) \equiv 0.$$

$[0, 1]$ 的凸性蕴含着 $\lambda_1 \sim \lambda_2$, 从而我们得到

$$\gamma * \bar{\gamma} = \gamma \circ \lambda_1 \sim \gamma \circ \lambda_2 = \gamma_{x_1}.$$

同理可证 $\bar{\gamma} * \gamma \sim \gamma_{x_2}$. □

由上述命题并结合“复合”在同伦类上的良定性, 我们可以得到:

推论 3.3.15

设 $\gamma_i \in \Omega(X, x_i, x_{i+1})$ ($i = 1, 2$), 则

$$\gamma_1 * (\gamma_2 * \bar{\gamma}_2) \sim \gamma_1, \quad (\bar{\gamma}_1 * \gamma_1) * \gamma_2 \sim \gamma_2.$$

**道路同伦**

上述结果启发我们去研究道路的同伦类的代数运算. 例如, 我们自然想去定义

$$[\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2].$$

但是这里仍然有一个问题: 对于任意 $\tilde{\gamma}_1 \in [\gamma_1], \tilde{\gamma}_2 \in [\gamma_2]$, 一般而言 $\tilde{\gamma}_2(0) \neq \tilde{\gamma}_1(1)$, 从而 $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$ 没有意义. 为了解决这个问题, 我们需要考虑同伦类中具有相同端点的道路, 即固定端点的同伦. 我们将这样的同伦称为道路同伦, 区别于之前定义的一般的同伦.

定义 3.3.16. (道路同伦)

令 $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ 为具有相同端点的两条道路, 即

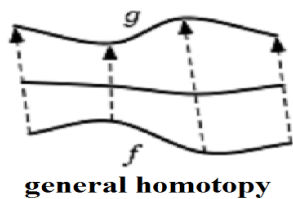
$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x_0, \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = x_1.$$

如果存在连续映射 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ 满足

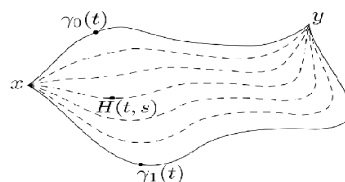
$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$H(0, s) = x_0, \quad H(1, s) = x_1, \quad \forall s \in [0, 1],$$

则我们称 γ_0 和 γ_1 是**道路同伦的** (path homotopic), 并称 H 是 γ_0 和 γ_1 之间的一个**道路同伦** (path homotopy). ♣



general homotopy



path homotopy

记号

- γ_0 和 γ_1 是道路同伦: $\gamma_0 \sim_p \gamma_1$.
- γ 的道路同伦类: $[\gamma]_p$.
- 固定端点 x_0, x_1 的道路同伦类集合: $\pi(X; x_0, x_1)$.

可以验证, 前面出现的各种运算/操作下道路之间的同伦, 都可以取为道路同伦:

命题 3.3.17. (运算与道路同伦)

- (1) 对于 $\gamma_i \in \Omega(X; x_i, x_{i+1})$, 有 $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim_p \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.
- (2) 对于 $\gamma \in \Omega(X; x_1, x_2)$, 有 $\gamma_{x_1} * \gamma \sim_p \gamma$, $\gamma * \gamma_{x_2} \sim_p \gamma$.
- (3) 对于 $\gamma \in \Omega(X; x_1, x_2)$, 有 $\gamma * \bar{\gamma} \sim_p \gamma_{x_1}$, $\bar{\gamma} * \gamma \sim_p \gamma_{x_2}$.
- (4) 对于 $\gamma_i \in \Omega(X; x_i, x_{i+1})$, 有 $\gamma_1 * (\gamma_2 * \bar{\gamma}_2) \sim_p \gamma_1$, $(\bar{\gamma}_1 * \gamma_1) * \gamma_2 \sim_p \gamma_2$.
- (5) 若 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 且在 X 中 $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$, 则在 Y 中有 $f \circ \gamma_1 \sim_p f \circ \gamma_2$.
- (6) 如果 γ_2 是 γ_1 的一个重新参数化, 则 $\gamma_2 \sim_p \gamma_1$.



¶ 道路同伦类上的运算

有了前面的准备工作, 我们最终可以在道路同伦类之前定义代数运算:

(a) 乘法运算:

$$m: \pi(X; x_1, x_2) \times \pi(X; x_2, x_3) \rightarrow \pi(X; x_1, x_3)$$

$$([\gamma_1]_p, [\gamma_2]_p) \mapsto [\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p := [\gamma_1 * \gamma_2]_p,$$

(b) 取逆运算:

$$i: \pi(X; x_1, x_2) \rightarrow \pi(X; x_2, x_1), \quad [\gamma]_p \mapsto [\gamma]_p^{-1} := [\bar{\gamma}]_p.$$

我们需要验证这两个运算是良定的, 为此我们需要证明

命题 3.3.18. (乘法与取逆的良定性)

- (1) 若 $\gamma_i \sim_p \gamma'_i$ ($i = 1, 2$), 则 $\gamma_1 * \gamma_2 \sim_p \gamma'_1 * \gamma'_2$.
- (2) 若 $\gamma \sim_p \gamma'$, 则 $\bar{\gamma} \sim_p \bar{\gamma}'$.



证明 (1) 设 $H_1: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ 是 γ_1 与 γ'_1 之间的一个道路同伦, $H_2: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ 是 γ_2 与 γ'_2 之间的一个道路同伦, 则

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(t, s) = \begin{cases} H_1(t, 2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ H_2(t, 2s - 1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

是 $\gamma_1 * \gamma_2$ 与 $\gamma'_1 * \gamma'_2$ 之间的一个道路同伦.

(2) 设 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ 是 γ 与 γ' 之间的一个道路同伦, 则 $\overline{H}(t, s) := H(1-t, s)$ 是 $\bar{\gamma}$ 与 $\bar{\gamma}'$ 之间的道路同伦. $\square$

由前面所列的运算与道路同伦之间的关系, 不难得到

命题 3.3.19. (道路同伦类运算的性质)

(1) 乘法是结合的: 如果 $[\gamma_i]_p \in \pi(X; x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, 3$, 则

$$([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p) * [\gamma_3]_p = [\gamma_1]_p * ([\gamma_2]_p * [\gamma_3]_p),$$

特别地, 表达式 $[\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p * [\gamma_3]_p$ 是良好定义的.

(2) $[\gamma_{x_1}]_p$ 和 $[\gamma_{x_2}]_p$ 分别是左单位元和右单位元: 对于 $[\gamma]_p \in \pi(X; x_1, x_2)$,

$$[\gamma_{x_1}]_p * [\gamma]_p = [\gamma]_p, \quad [\gamma]_p * [\gamma_{x_2}]_p = [\gamma]_p.$$

(3) i 是逆运算: 对于 $[\gamma]_p \in \pi(X; x_1, x_2)$.

$$[\gamma]_p * [\gamma]_p^{-1} = [\gamma_{x_1}]_p, \quad [\gamma]_p^{-1} * [\gamma]_p = [\gamma_{x_2}]_p, \quad ([\gamma]_p^{-1})^{-1} = [\gamma]_p$$

并且对于 $[\gamma_i]_p \in \pi(X; x_i, x_{i+1})$,

$$([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p)^{-1} = [\gamma_2]_p^{-1} * [\gamma_1]_p^{-1}.$$

(4) 特别地, 如果 $[\gamma_i]_p \in \pi(X; x_i, x_{i+1}), i = 1, 2$, 则

$$[\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p * [\gamma_2]_p^{-1} = [\gamma_1]_p, \quad [\gamma_1]_p^{-1} * [\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p = [\gamma_2]_p.$$

注 3.3.20. 注意“道路同伦类之间的乘法”运算不是对于所有道路同伦类都有定义的: 只有“首尾相连”的道路同伦类之间才能(按照给定的顺序)相乘. 所以如果我们令

$$\pi(X) = \bigcup_{x, y \in X} \pi(X; x, y),$$

那么“取逆运算”是在整个 $\pi(X)$ 上处处有定义的一元运算, 但“乘法运算”只是一个在部分元素间有定义的二元运算:

- 如果 $a * b$ 和 $b * c$ 是有定义的, 则 $(a * b) * c$ 和 $a * (b * c)$ 是有定义的并且它们相等. 反之, 如果 $(a * b) * c$ 或 $a * (b * c)$ 是有定义的, 则 $a * b$ 和 $b * c$ 都是有定义的, 并且 $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- $a^{-1} * a$ 和 $a * a^{-1}$ 都是有定义的.
- 如果 $a * b$ 是有定义的, 那么 $a * b * b^{-1} = a$ 并且 $a^{-1} * a * b = b$.

一般来说, 一个带有逆运算和满足上述条件的“部分定义的乘法”的集合被称作一个**群胚**或者**广群** (groupoid).⁵ 特别地, 我们称集合 $\pi(X)$ (赋予该群胚结构) 为**基本群胚** (fundamental groupoid).

⁵群胚最早是由德国数学家 H. Brandt 在 1927 年引入的, 后来被广泛用于代数几何 (始于 Grothendieck 的工作)、代数拓扑、李理论、辛几何等. 可以证明: 对于一个广群, 我们有

- $(a^{-1})^{-1} = a$.
- 如果 $a * b$ 是定义良好的, 那么 $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

关于群胚性质以及它在代数拓扑中的应用 (基本群胚), 参见 R. Brown, *Topology and Groupoids*, BookSurge Publishing, 2006.