3.4 基本群

3.4.1 基本群的概念

¶ 基本群：定义

一般而言，$\pi(X)$ 和 $\pi(X;x_0,x_1)$ 都不是群. 然而，如果 $x_0=x_1$, 那么

$$\pi_1(X,x_0):=\pi(X;x_0,x_0)$$

是一个群，这是因为

- $\pi_1(X,x_0)$ 中任意两个元素 $[\gamma_1]_p,[\gamma_2]_p\in\pi_1(X,x_0)$ 可以相乘，得到
$$[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p=[\gamma_1*\gamma_2]_p\in\pi_1(X,x_0).$$
- $\pi_1(X,x_0)$ 中有一个单位元 $e=[\gamma_{x_0}]_p\in\pi_1(X,x_0)$, 使得对于任意 $[\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$, 都有
$$[\gamma]_p*[\gamma_{x_0}]_p=[\gamma]_p=[\gamma_{x_0}]_p*[\gamma]_p.$$
- 任意 $[\gamma_1]_p\in\pi(X,x_0)$ 都是可逆的，并且其逆元恰为 $[\gamma]_p^{-1}:=[\bar\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$:
$$[\bar\gamma]_p*[\gamma]_p=[\gamma_{x_0}]_p=[\gamma]_p*[\bar\gamma]_p.$$

于是我们得到

命题 3.4.1.（基本群的运算）

集合 $\pi_1(X,x_0)=\Omega(X,x_0)/\underset{p}{\sim}$ 在乘法运算

$$[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p=[\gamma_1*\gamma_2]_p,\quad\forall\gamma_1,\gamma_2\in\Omega(X,x_0),$$

下形成一个群，其单位元为 $e=[\gamma_{x_0}]_p$，而逆运算为

$$[\gamma]_p^{-1}:=[\bar\gamma]_p,\quad\forall\gamma\in\Omega(X,x_0).$$

♠

这个群最早由著名数学家 Poincaré[6] 引入，叫做基本群：

定义 3.4.2.（基本群）

*我们将 $\pi_1(X,x_0)$ 称为以 x_0 为基点的***基本群***（fundamental group）.*

♣

我们研究一个简单的例子：

例 3.4.3. 令 $X\subset\mathbb{R}^n$ 为星形域，并且令 $x_0\in X$ 为 X 的一个“中心点”，即 x_0 可以跟 X 中任意一个点通过线段相连. 在第 3.3 节我们构造了一个从恒等映射 $F(0,x)=x$ 到常

[6] 庞加莱（Henry Poincare，1854-1912），法国数学家、物理学家、科学哲学家，在数学与应用数学的多个分支以及数学物理、天体力学方面做出了很多原创而基础性的工作，被评价为“史上最后一位数学全才”. 在拓扑学方面，庞加莱开创性地开启了对高维空间拓扑的研究，因而被认为是现代拓扑学的奠基人之一. 他在 1895 年发表了一篇奠基性文章 “Analysis situs”，之后在 1899 年到 1904 年又发表了五篇文章作为补充. 在这些文章中 Poincaré 引入了**基本群**和**单纯同调**的概念，给出了 **Poincaré 对偶定理**的早期表述，引入了链复形的 **Euler–Poincaré 示性数**，并提出了几个重要的猜想（包括著名的 **Poincaré 猜想**）. 根据 Dieudonné 的说法，这一系列论文首次系统地研究了拓扑学，并通过使用代数结构来区分不同胚的拓扑空间，使这一领域发生了革命性的变化，开创了代数拓扑学这一领域.

值映射 $F(1,x)\equiv x_0$ 的同伦

$$F:[0,1]\times X\to X,\qquad (t,x)\mapsto tx_0+(1-t)x.$$

现在我们令 $\gamma\in\Omega(X,x_0)$ 为任意以 x_0 为基点的圈. 则

$$H:[0,1]\times[0,1]\to X,\quad (t,s)\mapsto F(t,\gamma(s))$$

是 γ 和 γ_{x_0} 之间的一个道路同伦(这里我们用到了 $F(t,x_0)\equiv x_0$). 于是我们得到如下结论: 星形域的基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 是平凡群

$$\pi_1(X,x_0)\cong\{e\}.$$

具有平凡基本群的空间被称为单连通空间: [7]

定义 3.4.4. (单连通空间)

设 X 是道路连通空间. 如果 X 的基本群是平凡群, 即

$$\pi_1(X)=\{e\},$$

则我们称 X 是**单连通空间**(simply connected space). ♣

于是 $\mathbb{R}^n$ 中任意星形域都是单连通的. 特别地, $\mathbb{R}^n$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集都是单连通的. 一般来说, 计算给定空间的基本群是一件不平凡的事情. 我们将会证明

$$\pi_1(S^n,x_0)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=1,\\ \{e\}, & n\geq 2.\end{cases}$$

于是, S^1 不是单连通的, 而 S^n ($n\geq 2$) 是单连通的. 事实上, 我们将采用不同的方法计算 S^1 和 S^n ($n\geq 2$) 的基本群: 映射提升法(该方法最终发展为覆叠空间的理论)以及开覆盖方法(该方法最终发展为 van Kampen 定理).

¶ 基本群元素的几何含义: 圈的形变等价类

因为 $[0,1]$ 是 LCH 空间, 我们有

$$\pi_1(X,x_0)=\Omega(X,x_0)/\underset{p}{\sim}=\pi_0(\Omega(X,x_0)),$$

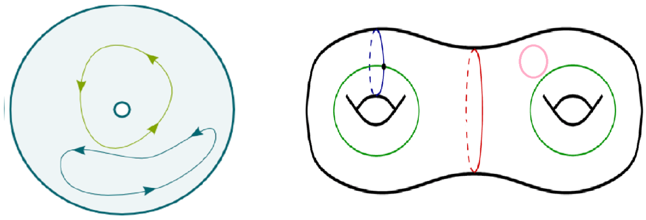
其中 $\Omega(X,x_0)$ 是 X 中以 x_0 为基点的圈的集合(赋予紧开拓扑). 换句话说, 基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 所衡量的是圈空间 $\Omega(X;x_0)$ 的道路连通性:

- 对应于 $\pi_1(X,x_0)$ 中单位元的圈 $\iff$ 能在 X 中连续收缩到一个点的圈.
- 对应于 $\pi_1(X,x_0)$ 中同一元素的两个圈 $\iff$ 能在 X 中通过连续形变相互转化的圈.

特别地, 基本群 $\pi_1(X)$ 群"越大", 圈空间中"拓扑上不同的"圈就越多, 而单连通空间则是"所有圈都能收缩成一个点"的空间.

---

[7] 单连通这个概念最早起源于复分析, 且在其中也扮演了一个基本的角色:
- 单连通的概念是由 Riemann 于 1851 年在他的博士论文中首次引入的, 在这篇文章中他证明了著名的 **Riemann 映照定理**: $\mathbb{C}$ 中任意"边界多于一个点的单连通区域"能够被共形地映为单位圆盘.
- **Cauchy 积分定理** 表明: 如果 U 是一个 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域, 并且 $f:U\to\mathbb{C}$ 是全纯的, 那么"f 沿着 U 中任意道路的线积分的值"仅取决于 f 在该道路两个端点处的值.



¶ 作为函子的 π_1

下面我们说明，类似于 π_0 和 π_c，π_1 也是一个函子. 因为基本群的定义是带基点的，所以我们要考虑“带有标定点的拓扑空间范畴” $\mathcal{PointedTOP}$，其中

- 对象是“带有标定点的拓扑空间” (X, x_0), 即拓扑空间 X 以及标定点 $x_0 \in X$;
- 态射是“带有标定点的连续映射” $f \in \mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0))$，即满足条件 $f(x_0) = y_0$ 的连续映射 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

根据基本群的定义，对于 $\mathcal{PointedTOP}$ 中的任意对象 (X, x_0)，π_1 将它对应到群 $\pi_1(X, x_0)$. 我还需要把把态射即 $f \in \mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0))$ 对应到群范畴 $\mathcal{GROUP}$ 中对应对象之间的态射，即 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(Y, y_0)$ 之间的群同态. 不难找到这样一个自然的群同态：设 $f : X \to Y$ 为连续映射，且 $y_0 = f(x_0)$. 则由命题3.3.17(5)，f 诱导了基本群之间的映射

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma]_p \mapsto [f \circ \gamma]_p. \tag{3.4.1}$$

我们有

命题 3.4.5.（诱导同态 f_* 的函子性）

(1) f_* 是一个群同态：$f_*([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p) = f_*([\gamma_1]_p) * f_*([\gamma_2]_p)$.

(2) 恒等映射 Id_X 诱导了恒等同态：$(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

(3) 如果 $f \in \mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0))$ 且 $g \in \mathcal{C}((Y, y_0), (Z, z_))$, 那么 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. ♠

证明 (1) 因为 $f \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)$，所以

$$f_*([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p) = f_*([\gamma_1 * \gamma_2]_p) = [f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)]_p = [(f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)]_p = [f \circ \gamma_1]_p * [f \circ \gamma_2]_p.$$

从而由 f_* 的定义即得欲证.

(2) 由定义即得.

(3) $(g \circ f)_*([\gamma]_p) = [g \circ f \circ \gamma]_p = g_*([f \circ \gamma]_p) = g_* \circ f_*([\gamma]_p)$. □

于是对应关系 $\pi_1 : \mathcal{PointedTOP} \to \mathcal{GROUP}$，其中

$$(X, x_0) \rightsquigarrow \pi_1(X, x_0),$$

$$f \in \mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0)) \rightsquigarrow \pi_1(f) = f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0).$$

是从范畴 $\mathcal{PointedTOP}$ 到范畴 $\mathcal{GROUP}$ 的一个函子.

函子性的一个基本推论是“等价的对象”会被映为“等价的对象”：

推论 3.4.6.（基本群是拓扑不变量）

如果 $f : X \to Y$ 是一个同胚，那么 f_* 是基本群之间的同构

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

♡

证明 任取 x_0 并记 $f(x_0)=y_0$. 则我们得到

$$f_*\circ(f^{-1})_*=(f\circ f^{-1})_*=(\mathrm{Id}_Y)_*=\mathrm{Id}_{\pi_1(Y,y_0)},$$
$$(f^{-1})_*\circ f_*=(f^{-1}\circ f)_*=(\mathrm{Id}_X)_*=\mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)},$$

于是 f_* 与 $(f^{-1})_*$ 是互为逆的群同构. □

还可以证明，π_1 函子把“乘法对象”映为“乘法对象”（证明留作习题）：

命题 3.4.7.（乘积空间的基本群）

$\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\cong\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0).$ ♠

¶ 作为范畴 $\mathcal{PointedTOP}$ 中同伦类集合的 π_1

根据定义，$\pi_1(X,x_0)$ 中的元素为圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 中元素的道路同伦类，而圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 的元素为满足 $\gamma(0)=\gamma(1)=x_0$ 的连续映射 $\gamma:[0,1]\to X$. 于是，每个圈 γ 自动给出了一个把商空间 $S^1=[0,1]/\{0\sim1\}$ 映到 X 且将等价类 $[0]$ 映为 x_0 的连续映射. 换而言之，如果我们取 $p=[0]=(1,0)\in S^1=\partial D\subset\mathbb{R}^2$，则圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 的元素恰好一一对应于将 (S^1,p) 映入 (X,x_0) 的“带有标定点的连续映射”，从而我们可以将 $\Omega(X,x_0)$ 与 $\mathcal{C}((S^1,p),(X,x_0))$ 等同起来.

更进一步地，我们可以在“带有标定点的连续映射空间” $\mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0))$ 中考虑同伦（即连续形变），此时我们自然需要要求在形变过程中标定点要保持不变：设 $f_1,f_2\in\mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0))$ 是两个带有同样标定点的连续映射，则 f_1,f_2 之间的保持标定点不变的同伦是指连续映射 $F:[0,1]\times X\to Y$，使得

$$F(0,x)=f_1(x),\quad F(1,x)=f_1(x),\qquad\forall x\in X,$$
$$F(t,x_0)=y_0,\qquad\forall t\in[0,1].$$

跟上节一样，可以证明这是一个等价关系. 我们将商空间，即“保持标定点不变的同伦”所给出的同伦类集合，记为 $[(X,x_0),(Y,y_0)]$.

回到 $\pi_1(X,x_0)$ 的情形. 不难看出，不仅仅圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 的元素对应于将 (S^1,p) 映入 (X,x_0) 的“带有标定点的连续映射”，而且在该对应关系下，圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 中元素的道路同伦类恰好对应于“带有标定点的连续映射空间” $\mathcal{C}((S^1,p),(X,x_0))$ 中的同伦类. 于是我们得到基本群的另一个解释，即 $\pi_1(X,x_0)$ 是“在带标定点的范畴里，连续映射 $f:(S^1,p)\to(X,x_0)$ 的同伦类的集合”：

$$\pi_1(X,x_0)=[(S^1,p),(X,x_0)].$$

¶ 作为范畴 $\mathcal{PointedTOP}$ 中同伦类集合的 π_0

类似地，我们也可以把 $\pi_0(X)$ 解释为“在带标定点的范畴里，连续映射的同伦类的集合”，跟 π_1 唯一的差别在于 (S^1,p) 被换为 (S^0,p)，其中 $p=1\in S^0=\{\pm1\}=\partial I\subset\mathbb{R}$：

$$\pi_0(X)=\pi_0(X,x_0)=[(S^0,p),(X,x_0)].$$

我们来解释为什么：

- 一个从 (S^0,p) 到 (X,x_0) 的带标定点的连续映射 f
  $\Longleftrightarrow$ 一个满足条件 $f(1)=x_0$ 的映射 $f:\{\pm1\}\to X$
  $\Longleftrightarrow$ 一个点 $f(-1)\in X$.
- 两个带标定点的映射 $f_1,f_2(\{\pm1\},1)\to(X,x)$ 是同伦的
  $\Longleftrightarrow$ 存在一个连续形变 $F:[0,1]\times\{\pm1\}\to X$ 使得
  $$F(t,1)\equiv x, F(0,-1)=f_1(-1), F(1,-1)=f_2(-1)$$
  $\Longleftrightarrow$ 存在连接 $f_1(-1)$ 和 $f_2(-1)$ 的连续曲线 $\gamma(t):=F(t,-1)$
  $\Longleftrightarrow$ $f_1(-1)$ 和 $f_2(-1)$ 位于 X 的同一道路连通分支中.

¶ 阅读材料：高阶同伦群 π_n

更一般地，对于 $n\geqslant 2$, 我们可以取 $p=(1,0,\cdots,0)\in S^n=\partial B^{n+1}\subset\mathbb{R}^{n+1}$，并考虑带标定点的连续映射空间 $\mathcal{C}((S^n,p),(X,x_0))$ 的同伦类的集合 $[(S^n,p),(X,x_0)]$.

跟基本群类似，我们可以在 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 上定义群运算，为此我们需要给出集合 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 的一个略微不同的描述方式. 记 $I=[0,1]$, 从而 $I^n\subset\mathbb{R}^n$ 是单位方体. 我们可以将 S^n 视作商空间 $I^n/\partial I^n$，并且将点 $p\in S^n$ 与 $[\partial I^n]\in I^n/\partial I^n$ 等同起来. 由此我们得到 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 的一种等价描述：

$$[(S^n,p),(X,x_0)]=[(I^n,\partial I^n),(X,x_0)].$$

现在对于任意 $f_1,f_2\in\mathcal{C}((I^n,\partial I^n),(X,x_0))$，通过分别 “收缩"$I^n$ 的第一个坐标”，我们可以得到两个连续映射

$$\widetilde{f_1}:[0,1/2]\times I^{n-1}\to X,\qquad \widetilde{f_2}:[1/2,1]\times I^{n-1}\to X.$$

因为 $\widetilde{f_1}$ 和 $\widetilde{f_2}$ 将各自定义域的“边界”均映为 x_0，这两个映射可以被粘合到一起得到 $f_1*f_2\in\mathcal{C}((I^n,\partial I^n),(X,x_0))$. 重复前面对基本群运算的处理方式，可以证明该乘法给出了同伦类集合 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 的一个群结构.

于是，对于任意拓扑空间，我们得到一系列的群，他们被称为同伦群[8]：

定义 3.4.8. (同伦群)

我们称赋予了上述群结构的同伦类的集合

$$\pi_n(X,x_0):=[(S^n,p),(X,x_0)]$$

为 X 的以 x_0 为基点的 n **阶同伦群**. ♣

跟基本群类似，π_n 是一个从 $\mathcal{PointedTOP}$ 到 $\mathcal{GROUP}$ 的函子. 不同之处在于，对于任意 $n\geqslant 2$, $\pi_n(X,x_0)$ 是一个交换群，而基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 则未必是交换群. 同伦群是代数拓扑的重要研究对象，我们在此不做过多展开.

[8]高阶同伦群的概念是由 Čech 在 1932 年首次定义的. 他在文章中证明了这些群是交换群，但遗憾的是，他在 Alexandroff 和 Hopf 的建议下撤回了该文章，因为他们认为这些群不包含比同调群更多的信息，然后也该被视为是基本群的合理推广，因为基本群一般来说非交换的. 最终事实证明他们错了！例如，跟当 $n>k$ 时同调群 $H_n(S^k)=0$，然而此时同伦群 $\pi_n(S^k)$ 一般来说是非平凡的，例如，用所谓的 Hopf 不变量可以证明，在第 1.4 节末尾给出的 Hopf 纤维化映射是非零伦的，从而 $\pi_3(S^2)\neq\{0\}$. 而且令人惊讶的是，球面同伦群的计算远远难于基本群的计算.

3.4.2 基本群的基本性质

¶ 基本群与基点选取的无关性

我们首先考虑如下问题：给定拓扑空间 X 和两个基点 $x_0, x_1 \in X$，$\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之间的关系是什么？

不难看出，若 X_0 是 x_0 所在的道路连通分支，则 $\Omega(X, x_0) = \Omega(X_0, x_0)$，从而 $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_0, x_0)$. 于是，如果 x_0 与 x_1 在不同的道路连通分支中，则 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之前是没有关联的.

但是，如果 x_0, x_1 位于 X 的同一个道路连通分支中，则跟据命题3.3.17，任意连接 x_0, x_1 的道路 $\lambda \in \Omega(X; x_0, x_1)$ 都诱导了基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 与 $\pi_1(X, x_1)$ 之间的一个映射

$$\Gamma_\lambda : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \qquad [\gamma]_p \mapsto [\bar{\lambda} * \gamma * \lambda]_p. \tag{3.4.2}$$

我们证明

命题 3.4.9.（基本群的基点无关性）
假设 x_0 和 x_1 位于 X 的同一道路连通分支中，则对于任意从 x_0 到 x_1 的道路 λ，映射 $\Gamma_\lambda : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ 是一个群同构.

证明 我们首先说明 Γ_λ 是一个群同态，为此我们作如下计算

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p) = \Gamma_\lambda([\gamma_1 * \gamma_2]_p) &= [\bar{\lambda} * \gamma_1 * \gamma_2 * \lambda]_p \\
&= [\bar{\lambda} * \gamma_1 * \lambda * \bar{\lambda} * \gamma_2 * \lambda]_p \\
&= [\bar{\lambda} * \gamma_1 * \lambda]_p * [\bar{\lambda} * \gamma_2 * \lambda]_p \\
&= \Gamma_\lambda([\gamma_1]_p) * \Gamma_\lambda([\gamma_2]_p).
\end{aligned}$$

注意到映射 Γ_λ 是可逆的，且 $(\Gamma_\lambda)^{-1}$ 恰好是由道路 $\bar{\lambda}$ 所诱导的映射：

$$(\Gamma_\lambda)^{-1}([\tilde{\gamma}]_p) = [\lambda * \tilde{\gamma} * \bar{\lambda}]_p = [\bar{\bar{\lambda}} * \tilde{\gamma} * \bar{\lambda}]_p = \Gamma_{\bar{\lambda}}([\tilde{\gamma}]_p).$$

所以 $(\Gamma_\lambda)^{-1}$ 也是一个群同态，从而 Γ_λ 是一个群同构. □

注 3.4.10. 一个自然的问题是：群同态 Γ_λ 是如何依赖于 λ 的选取的？注意若 λ_1, λ_2 是两条从 x_0 到 x_1 的道路，则 $\lambda_1 * \bar{\lambda}_2$ 是以 x_0 为基点的一个圈. 在习题中我们将证明：

$\Gamma_{\lambda_1} = \Gamma_{\lambda_2}$ 当且仅当 $\lambda_1 * \bar{\lambda}_2$ 是零伦的，即 $[\lambda_1 * \bar{\lambda}_2]_p = e \in \pi_1(X, x_0)$.

根据上面的论述，在研究 X 的基本群时，我们通常假设 X 是道路连通的，从而由命题3.4.9，对于任意 x_0, x_1，都有

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1),$$

即 X 的基本群"与基点的选取无关". 此时我们可以省略基点，把 X 的基本群记为 $\pi_1(X)$. 然而，需要注意的事情是：虽然在这种情况下 $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$，但是这两个群之间的群同构 Γ_λ 是依赖于从 x_0 到 x_1 的道路 λ 的选取的，即不同的 λ 所诱导的群同构 Γ_λ 可以是不同的. 因此，跟群 $\pi_1(X, x_0)$ 不同的是，群 $\pi_1(X)$ 不是一个具体的群，而只是一个群的同构类！（换而言之，群 $\pi_1(X, x_0)$ 中的元素有具体的几何意义，而 $\pi_1(X)$ 则只是用以表征群元素之间的关系，其中的元素则并没有确定的几何意义.）

¶ 诱导映射 f_* 的“同伦不变性”

在 π_1 的函子性中我们知道，任意 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ 诱导了一个从 $\pi_1(X,x_0)$ 到 $\pi_1(Y,f(x_0))$ 的群同态，见公式 (3.4.1). 下面我们考察该诱导同态对 f 的依赖性. 假设 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,Y)$，且 $f_1 \sim f_2$. 固定 $x_0 \in X$. 令 $F : [0,1] \times X \to Y$ 为 f_1 和 f_2 之间的一个同伦. 则

$$\lambda(t) := F(t, x_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是从 $y_1 = f_1(x_0)$ 到 $y_2 = f_2(x_0)$ 的一条道路，从而诱导了群同态

$$\Gamma_\lambda : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(Y, y_2), \quad [\gamma]_p \mapsto [\bar{\lambda} * \gamma * \lambda]_p.$$

我们证明

引理 3.4.11.（诱导映射的“同伦不变性”） 若 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,Y)$，且 $f_1 \sim f_2$，则作为从 $\pi_1(X,x_0)$ 到 $\pi_1(Y,y_2)$ 的群同态，我们有 $(f_2)_* = \Gamma_\lambda \circ (f_1)_*$. ♢

证明 任取 $[\gamma]_p \in \pi_1(X,x_0)$. 我们想要构造 $f_2 \circ \gamma$ 和 $\bar{\lambda} * (f_1 \circ \gamma) * \lambda$ 之间的一个道路同伦. 令

$$G : [0,1] \times [0,1] \to Y, \quad G(t,s) = F(t, \gamma(s)).$$

取 λ_t 为从 $\lambda(t)$ 到 $\lambda(1) = y_2$ 沿着 λ 的道路(对 λ 里相应的参数作线性重新参数化即可). 那么 $\bar{\lambda}_t * G(t,s) * \lambda_t$ 是从 $\bar{\lambda} * (f_1 \circ \gamma) * \lambda$ 到 $f_2 \circ \gamma$ 的一个道路同伦. □

¶ 基本群的同伦不变性

在推论3.4.6中我们证明了同胚的拓扑空间具有相同的基本群. 下面我们证明一个非常有用的定理，即同伦等价的拓扑空间具有相同的基本群：

定理 3.4.12.（基本群的同伦不变性） 设 X, Y 是同伦等价的拓扑空间，则 $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$. ♡

证明 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$ 为同伦等. 从 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$，我们得到

$$\Gamma_\lambda \circ f_* \circ g_* = \mathrm{Id} : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, f(x_0)),$$

从而由 Γ_λ 是群同构可知 f_* 是满射. 同理，$g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ 蕴含

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}} \circ g_* \circ f_* = \mathrm{Id} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

因此 f_* 是单射. 所以 $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 是群同构. □

因为弱形变收缩核同伦等价于原空间（见上节习题），我们得到

推论 3.4.13.（形变收缩 $\Longrightarrow$ 相同基本群） 若 A 是 X 的（弱）形变收缩核，则 $\pi_1(A)$ 同构于 $\pi_1(X)$. ♡

特别地，我们得到：

推论 3.4.14.（可缩 $\Longrightarrow$ 单连通） 任意可缩空间都是单连通的. ♡