3.5 圆与球的基本群及其应用

3.5.1 S^n （$n \geq 2$）的基本群

我们先计算 S^n（$n \geq 2$）的基本群. 设 $\gamma : [0,1] \to S^n$ 是 S^n 中的一个圈. 若 γ 不是满射，则由第 3.3 节的习题，γ 是零伦的. 然而，遗憾的是，利用空间填充曲线，我们不难构造出映满 S^n 的曲线，从而无法利用上述简单论证说明 S^n 是单连通的.

我们将采用开覆盖的方法计算 S^n（$n \geq 2$）的基本群. 为此我们证明

命题 3.5.1. （并集的单连通性）

如果 $X = U \cup V$, 其中 U, V 是 X 中的单连通开集，且 $U \cap V$ 是道路连通的，则 X 是单连通的.

证明 取 $x_0 \in U \cap V$ 作为基点. 令 $\gamma : [0,1] \to X$ 为任意以 x_0 为基点的圈. 由连续性 $\{\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)\}$ 是 $[0,1]$ 的开覆盖，从而由 Lebesgue 数引理，

$$\exists 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1 \text{ 使得 } \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U \text{ 或 } V.$$

对于任意 i，取一条从 x_0 到 $\gamma(t_i)$ 的道路 λ_i，且使得:

- 若 $\gamma(t_i) \in U$，则取 $\lambda_i \subset U$；
- 若 $\gamma(t_i) \in V$，则取 $\lambda_i \subset V$
- （于是若 $\gamma(t_i) \in U \cap V$，则取 $\lambda_i \subset U \cap V$）.

因为 U, V 以及 $U \cap V$ 都是道路连通的，上述选取是可实现的. 令 γ_i 为沿着 γ 从 $\gamma(t_{i-1})$ 到 $\gamma(t_i)$ 的 (重新参数化后的) 道路. 则

$$\begin{aligned} \gamma &\underset{p}{\sim} \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n \\ &\underset{p}{\sim} (\gamma_1 * \bar{\lambda}_1) * (\lambda_1 * \gamma_2 * \bar{\lambda}_2) * \cdots * (\lambda_{n-1} * \gamma_n) \\ &\underset{p}{\sim} \gamma_{x_0} * \gamma_{x_0} * \cdots * \gamma_{x_0} = \gamma_{x_0}, \end{aligned}$$

其中第三步我们用到了如下事实：每个圈 $\lambda_i * \gamma_{i+1} * \lambda_{i+1}^{-1}$ 都完全位于单连通空间 U 或 V 中，从而这些圈都道路同伦于常值圈. □

我们注意到 S^n（$n \geq 2$）可以被写成两个连通开集的并，即 $U = S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ 和 $V = S^n - \{0, \cdots, 0, -1\}$. 利用球极投影（见第 1.3 节习题）我们知道 U, V 均同胚于 $\mathbb{R}^n$，从而都是单连通的. 又因为当 $n \geq 2$ 时 $U \cap V = S^n - \{(0, \cdots, 0, \pm 1)$ 是道路连通的，所以我们得到

推论 3.5.2

当 $n \geq 2$ 时，$\pi_1(S^n) \cong \{e\}$.

因为 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 同伦等价于 S^{n-1}，由同伦不变性我们得到

推论 3.5.3

对任意 $n \geq 3$，有 $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \{e\}$.

3.5.2 S^1 的基本群

¶ **计算 $\pi_1(S^1)$**

为了计算 $\pi_1(S^1)$，我们将 S^1 嵌入 $\mathbb{C}$ 中并取基点 $x_0 = 1$. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，我们考虑如下“沿着 S^1 逆时针匀速旋转 n 周的圈”,

$$\gamma_n : [0,1] \to S^1, \quad t \mapsto e^{i\cdot 2\pi nt}.$$

我们要证明

定理 3.5.4.（S^1 的基本群）
$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$，且 $\pi_1(S^1, x_0)$ 的生成元为 $[\gamma_1]_p$ 和 $[\gamma_{-1}]_p$.

为证明定理3.5.4，我们需要构造一个从 $\mathbb{Z}$ 到 $\pi_1(S^1, x_0)$ 的群同构. 显然定理3.5.4是如下命题的推论：

命题 3.5.5.（构造群同构）
定义

$$\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0), \quad n \mapsto [\gamma_n]_p,$$

则映射 Φ 是一个群同构.

证明的核心想法如下：首先注意到 S^1 同胚于商空间 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，商映射为

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{2\pi ix}.$$

因为直接在 S^1 上处理有一点麻烦，我们将 S^1 上以 $x_0 = 1$ 为基点的对象（圈，道路同伦等）都“提升”为 $\mathbb{R}$ 上起点为 0 的对象（道路，同伦等）. **这样处理起来较容易，因为 $\mathbb{R}$ 是单连通的.** 例如，我们可以将 γ_n “提升”为 $\mathbb{R}$ 上起点为 0 的道路 $\widetilde{\gamma}_n$，使得以下图表可交换（即满足 $p \circ \widetilde{\gamma}_n = \gamma_n$）：

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I = [0,1] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\gamma}_n"] \arrow[r, "\gamma_n"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

比较 γ_n 和 p 的表达式并注意到 $\widetilde{\gamma}_n(0) = 0$，我们得到“提升道路” $\widetilde{\gamma}_n$ 的表达式:

$$\widetilde{\gamma}_n(t) = nt.$$

证明 我们分三步证明 Φ 是群同构：

第一步. Φ 是群同态.

由定义，$\Phi(m+n)$ 是一个道路同伦等价类，它的一个代表元是 $\gamma_{m+n}(t) = e^{2\pi i(m+n)t}$. 为了将 γ_{m+n} 的“提升”同 γ_m 和 γ_n 各自的“提升”联系起来，我们引入平移映射

$$T_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + m.$$

因为道路 $\widetilde{\gamma}_{m+n}$ 与道路 $\widetilde{\gamma}_m * (T_m \circ \widetilde{\gamma}_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 中具有相同的起点和相同的终点的道路，而

$\mathbb{R}$ 是单连通的，根据第 3.4 节习题，

$$\widetilde{\gamma}_{m+n} \underset{p}{\sim} \widetilde{\gamma}_m * (T_m \circ \widetilde{\gamma}_n).$$

因此

$$\gamma_{m+n} = p \circ \widetilde{\gamma}_{m+n} \underset{p}{\sim} p \circ (\widetilde{\gamma}_m * (T_m \circ \widetilde{\gamma}_n)) = \gamma_m * \gamma_n.$$

换言之，

$$\Phi(n+m) = [\gamma_{n+m}]_p = [\gamma_m * \gamma_n]_p = [\gamma_m]_p \cdot [\gamma_n]_p = \Phi(m) \cdot \Phi(n).$$

第二步. Φ 是满射.

令 $\gamma : [0,1] \to S^1$ 为任意满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ 的道路. 我们将会证明:

引理 3.5.6. (道路提升性质)

对于 S^1 中任意起点 $\gamma(0) = 1$ 的道路 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$，存在 $\mathbb{R}$ 中唯一一条起点为 $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ 的道路 $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. ♢

先假设这是正确的，那么由 $1 = \gamma(1) = p \circ \widetilde{\gamma}(1)$ 可知 $\widetilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$，即

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ 使得} \widetilde{\gamma}(0) = 0, \quad \widetilde{\gamma}(1) = n.$$

因为 $\mathbb{R}$ 是可缩的，我们得到 $\widetilde{\gamma} \underset{p}{\sim} \widetilde{\gamma}_n$. 令 $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为一个连接 $\widetilde{\gamma}$ 和 $\widetilde{\gamma}_n$ 的道路同伦. 那么

$$F = p \circ \widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to S^1$$

是连接 γ 和 γ_n 的道路同伦. 因此 $[\gamma]_p = [\gamma_n]_p = \Phi(n)$.

第三步. Φ 是单射.

假设 $\Phi(n) = \Phi(m)$, 即存在一个连接 γ_n 和 γ_m 的道路同伦 $F : [0,1] \times [0,1] \to S^1$. 这次我们将该道路同伦从 S^1 “提升” 到 $\mathbb{R}$. 我们将会证明:

引理 3.5.7. (同伦提升性质)

(1) 对于 S^1 中任意具有固定起点 $F(s,0) \equiv 1$ 的同伦 $F : [0,1] \times [0,1] \to S^1$，存在 $\mathbb{R}$ 中唯一具有固定起点 $\widetilde{F}(s,0) \equiv 0$ 的同伦 $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 $p \circ \widetilde{F} = F$.

(2) 若同伦 F 是道路同伦，即还具有固定终点 $F(s,1) = x_0 \in S^1$，则 $\widetilde{F}$ 也是道路同伦，即存在 $x \in p^{-1}(x_0)$ 使得 $\widetilde{F}(s,1) \equiv x$. ♢

先假设这是正确的，则存在同伦 $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得 $p \circ \widetilde{F} = F$，于是我们有

$$p \circ \widetilde{F}(0,t) = \gamma_n(t), \qquad p \circ \widetilde{F}(1,t) = \gamma_m(t).$$

因为 $\widetilde{F}(0,0) = 0$ 且 $\widetilde{F}(1,0) = 0$, 由上面道路提升的唯一性，我们必有

$$\widetilde{F}(0,t) = \widetilde{\gamma}_n(t), \qquad \widetilde{F}(1,t) = \widetilde{\gamma}_m(t).$$

于是由同伦提升性质引理的第二部分，

$$n = \widetilde{\gamma}_n(1) = \widetilde{F}(0,1) = \widetilde{F}(1,1) = \widetilde{\gamma}_m(1) = m.$$

这就完成了证明. □

¶ 提升引理

我们记 $I=[0,1]$. 下面我们证明上面出现的道路提升与同伦提升性质. 我们将给出这两个性质的一个统一的证明，即证明下述更强的结果，即任意具有“初始提升”的连续映射 $F:P\times I\to S^1$ 可被唯一提升到 $\mathbb{R}$:

引理 3.5.8.（S^1 情形的提升引理）

设 P 是拓扑空间，$F:P\times I\to S^1$ 是连续映射. 若映射

$$F_0=F|_{P\times\{0\}}:P\times\{0\}\to S^1$$

可以被“提升”为连续映射 $\widetilde{F_0}:P\times\{0\}\to\mathbb{R}$，即 $p\circ\widetilde{F_0}=F_0$，则存在 F 的提升 (lifting) 映射 $\widetilde{F}:P\times I\to\mathbb{R}$，使得 $\widetilde{F_0}=\widetilde{F}|_{P\times\{0\}}$，且满足该条件的提升是唯一的. ♢

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ P\times\{0\} \arrow[ur, "\widetilde{F_0}"] \arrow[r, "F_0"'] & S^1 \end{tikzcd} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ P\times I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

在提升引理里分别取 P 为单点集和 $[0,1]$，即得道路提升性质和同伦提升性质:

证明 [引理3.5.6和引理3.5.7的证明]

取 P 为单点集，则条件 $\gamma(0)=1$ 及 $\widetilde{\gamma}(0)=0$ 就是引理3.5.8中所需的“初始提升”. 类似地，取 $P=[0,1]$，则条件 $F(s,0)\equiv 1$ 以及 $\widetilde{F}(s,0)\equiv 0$ 正是引理3.5.8中所需的“初始提升”. 这就证明了引理3.5.6和引理3.5.7的前半部分.

对于引理3.5.7的后半部分，由 $p\circ\widetilde{F}(s,1)=F(s,1)\equiv x_0$ 可知 $\widetilde{F}(s,1)\in p^{-1}(x_0)$. 但是 $p^{-1}(x_0)$ 是完全不连通的，而 $[0,1]$ 在连续映射 $\widetilde{F}(\cdot,1)$ 下的像是连通的，故存在一个点 $x\in p^{-1}(x_0)$ 使得 $\widetilde{F}(s,1)\equiv x$. □

¶ 提升引理的证明

[证明背后的思想.] 我们想要构造一个提升，即满足条件 $p\circ\widetilde{F}=F$ 的映射 $\widetilde{F}$. 如果 p 是可逆的，那我们可以取 $\widetilde{F}=p^{-1}\circ F$. 但显然这里的 p 不是可逆的!

关键的观察: $\boxed{p\text{ 在“局部”是可逆的!}}$

具体来说，我们可以找到 S^1 的一个覆盖, 例如

$$\widehat{U}_1=S^1\setminus\{1\},\quad \widehat{U}_2=S^1\setminus\{-1\},$$

使得

- $p^{-1}(\widehat{U}_i)=\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}}V_j^i$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集的不交并，其中

$$V_j^1:=(j-1,j),\quad V_j^2:=(j-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}).$$

- 对于任意 $i=1,2$ 以及 $j\in\mathbb{Z}$，$p_j^i:=p|_{V_j^i}:V_j^i\to U_i$ 都是同胚.

因此我们可以通过局部可逆性（即局部同胚 p_j^i）构造“局部提升”，然后再将它们“依次粘合起来”得到“整体提升”.

证明 我们再次把证明分成三步:

$\boxed{\textbf{第一步.}}$ 在 $s_0 \in P$ 附近的局部提升.

任取 $s_0 \in P$. 由 Lebesgue 数引理，存在一个划分

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$$

使得 $F(\{s_0\} \times [t_i, t_{i+1}])$ 要么包含于 $\widehat{U}_1$，要么包含于 $\widehat{U}_2$. 再由管形领域引理，存在 s_0 的开邻域 V，使得 $F(V \times [t_i, t_{i+1}])$ 要么包含于 $\widehat{U}_1$，要么包含于 $\widehat{U}_2$. 为了陈述的简单性起见，对于任意 $0 \leq i \leq n$，我们记

$$U_i = \begin{cases} \widehat{U}_1, & \text{如果 } F(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset \widehat{U}_1, \\ \widehat{U}_2, & \text{如果 } F(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset \widehat{U}_2. \end{cases}$$

类似地，我们也将对应的 V_j^i 和 p_j^i 的指标改变为 $0 \leqslant i \leqslant n, j \in \mathbb{Z}$. 因为

$$p \circ \widetilde{F}_0(s_0, 0) = F_0(s_0, 0) = F(s_0, 0) \subset U_0,$$

必然存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widetilde{F}_0(s_0, 0) \subset V_j^0$. 由连续性，存在 s_0 的开邻域 $V_0 \subset V$，使得

$$\widetilde{F}_0(V_0, 0) \subset V_j^0.$$

现在定义(第一段局部提升)

$$\widetilde{F}_1 = (p_j^0)^{-1} \circ F : V_0 \times [0, t_1] \to V_j^0.$$

因为

- F 在 $V_0 \times [0, t_1]$ 上是连续的，
- $F(V_0 \times [0, t_1]) \subset U_0$，且 $p_j^0 : V_j^0 \to U_0$ 是同胚.

所以 $\widetilde{F}_1$ 是连续的，此外，对于 $\forall s \in V_0$，都有

- $\widetilde{F}_0(s, 0) \in V_j^0$，$\widetilde{F}(s, 0) \in V_j^0$，
- $p_j^0 \circ \widetilde{F}_0(s, 0) = F_0(s, 0) = F(s, 0) = p_j^0 \circ \widetilde{F}_1(s, 0)$.

于是 $\widetilde{F}_0(s, 0) = \widetilde{F}_1(s, 0)$，即 $\widetilde{F}_1|_{V_0 \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{V_0 \times \{0\}}$.

接着我们用“新的初值” $\widetilde{F}_1|_{V_0 \times \{t_1\}}$ 取代“旧的初值” $\widetilde{F}_0|_{V_0 \times \{0\}}$，继续这一构造, 可以得到 s_0 的开邻域 $V_1 \subset V_0$ 和一个定义在 $V_1 \times [0, t_2]$ 上的连续映射 $\widetilde{F}_2$，使得在 $V_1 \times [0, t_2]$ 上有 $p \circ \widetilde{F} = F$，并且 $\widetilde{F}_2|_{V_1 \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{V_1 \times \{0\}}$.

具体构造方法如下: 因为 $p \circ \widetilde{F}_1(s_0, t_1) = F(s_0, t_1) \in U_1$, 所以存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widetilde{F}(s_0, t_1) \in V_j^1$. 于是存在 s_0 的开邻域 $V_1 \subset V_0$，使得 $\widetilde{F}_1(V_1, t_1) \subset V_j^1$. 定义

$$\widetilde{F}_2 = (p_j^1)^{-1} \circ F : V_1 \times [t_1, t_2] \to V_j^1 \subset \mathbb{R}.$$

和之前一样，可以验证 $\widetilde{F}_2$ 是连续的，并且 $\widetilde{F}_2|_{V_1 \times \{t_1\}} = \widetilde{F}_1|_{V_1 \times \{t_1\}}$. 于是由粘结引理，$\widetilde{F}_2$ 和 $\widetilde{F}_1|_{V_1 \times [0, t_1]}$ 可以粘接成一个新的连续映射，仍记为

$$\widetilde{F}_2 : V_1 \times [0, t_2] \to \mathbb{R}$$

它是 $F|_{V_1 \times [0, t_2]}$ 的提升，且 $\widetilde{F}_2|_{V_1 \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{V_1 \times \{0\}}$.

重复相同的构造，我们最终得到 s_0 的一个开邻域 $\widetilde{V}$ 以及连续映射 $\widetilde{F} : \widetilde{V} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$，使得 $\widetilde{F}|_{\widetilde{V} \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{\widetilde{V} \times \{0\}}$，且 $\widetilde{F}$ 是 $F|_{\widetilde{V} \times [0,1]}$ 的一个提升，即

$$p \circ \widetilde{F} = F|_{\widetilde{V} \times [0,1]}.$$

第二步. P 是单点集时提升的存在唯一性.

假设 P 是一个单点集，此时 F 为映射 $F:[0,1]\to S^1$. 由第一步, F 可以被提升为 $\widetilde{F}:[0,1]\to\mathbb{R}$. 为了证明这个提升的唯一性，我们假设 $\widetilde{F}':[0,1]\to\mathbb{R}$ 是另一个提升，则 $\widetilde{F}(0)=\widetilde{F}_0(0)=\widetilde{F}'(0)$. 我们采用连通性论证. 记 $S=\{t\in[0,1]\mid\widetilde{F}(t)=\widetilde{F}'(t)\}$. 则

- $S\neq\emptyset$，因为 $0\in S$.
- S 是闭集，因为 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{F}'$ 都是连续的.
- S 是开集：设 $t_0\in S$，即 $\widetilde{F}(t_0)=\widetilde{F}'(t_0)$. 不妨设 $F(t_0)\in\widehat{U}_1$ 且 $\widetilde{F}(t_0)=\widetilde{F}'(t_0)\in V_j^1$. 则由连续性，存在 t_0 的开邻域 T_0 使得
$$F(T_0)\subset\widehat{U}_1,\quad \widetilde{F}(T_0)\subset V_j^1,\quad 且\quad \widetilde{F}'(T_0)\subset V_j^1.$$
于是由 $p:V_j^1\to\widehat{U}_1$ 是同胚以及 $p\circ\widetilde{F}=p\circ\widetilde{F}'$ 可知 $T_0\in S$.

所以由区间的连通性得 $S=[0,1]$，即在整个 $[0,1]$ 上，都有 $\widetilde{F}=\widetilde{F}'$.

第三步. 一般 P 时提升的存在性和唯一性.

我们在第一步中证明了对于任意 $s\in P$, 存在 P 中的 s 的开邻域 V_s 以及 $F_s=F|_{V_s\times I}$ 的“提升” $\widetilde{F}_s:V_s\times I\to\mathbb{R}$，使得
$$\widetilde{F}_s|_{V_s\times\{0\}}=\widetilde{F}_0|_{V_s\times\{0\}}.$$
现在假设 $s_0\in V_{s_1}\cap V_{s_2}$. 那么
$$\widetilde{F}_{s_1,s_0}:=\widetilde{F}_{s_1}|_{\{s_0\}\times I}:I\to\mathbb{R}\qquad 和\qquad \widetilde{F}_{s_2,s_0}:=\widetilde{F}_{s_2}|_{\{s_0\}\times I}:I\to\mathbb{R}$$
都是 $F_{s_0}=F|_{\{s_0\}\times I}:I\to S^1$ 的提升，并且
$$\widetilde{F}_{s_1,s_0}(0)=\widetilde{F}_0(s_0,0)=\widetilde{F}_{s_2,s_0}(0).$$
于是由第二步, $\widetilde{F}_{s_1,s_0}=\widetilde{F}_{s_2,s_0}$. 因此如果我们定义 $\widetilde{F}:P\times I\to\mathbb{R}$ 为对每个 $s\in P$ 都满足
$$\widetilde{F}|_{V_s\times I}=\widetilde{F}_s$$
的映射，那么由粘接引理，$\widetilde{F}$ 是良定的连续映射. 由构造，它是 F 的提升，且在“初值” $P\times\{0\}$ 上跟给定的初始提升 $\widetilde{F}_0$ 一致.

最后，这样的提升必然是唯一的，因为如果 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{F}'$ 是 F 的两个提升，那么对于每个 $s\in P$, $\widetilde{F}|_{\{s\}\times I}$ 和 $\widetilde{F}'|_{\{s\}\times I}$ 都是 $F|_{s\times\{0\}}$ 的提升，从而由第二步，它们是相同的. □

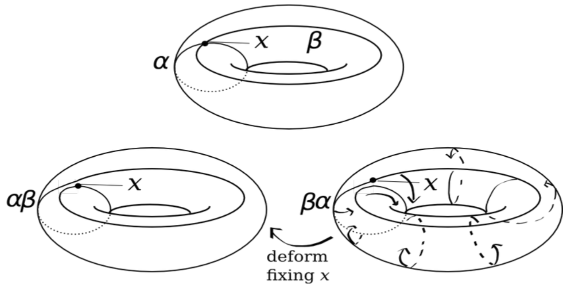
3.5.3 S^n 基本群的应用

$\pi_1(S^1)$ 不仅是我们遇到的第一个非平凡的基本群，而且也是最重要的基本群.

¶ 计算简单空间的基本群

根据基本群的保乘积性，我们可以算出很多基本群，例如我们有
$$\pi_1(S^1\times\mathbb{R}^n)\simeq\mathbb{Z},\ \forall n$$
以及
$$\pi_1(\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{r})\simeq\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{r},\qquad\forall r.$$

注意到 $\pi_1(S^1\times S^1)\simeq\mathbb{Z}^2$，即 $S^1\times S^1$ 的基本群是一个由两个生成元生成的交换群. 下图给出了这两个生成元并说明了为什么它们是交换的：



类似的，基本群的同伦不变性也是计算基本群的重要工具. 例如，

$$\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\simeq\mathbb{Z},\ \forall n\geq 2.$$

右图展示了 Möbius 带的“中心圆”是 Möbius 带的形变收缩核，故 Möbius 带同伦等价于 S^1，从而

$$\pi_1(\text{Möbius 带})\simeq\mathbb{Z}.$$

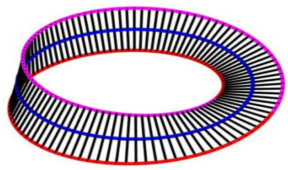


图 3.2: Möbius 带

¶ 区分拓扑空间

基本群作为拓扑不变量，被广泛应用于区分不同的拓扑空间. 例如

$$\pi_1(S^1\times S^2)\cong\mathbb{Z},\qquad \pi_1(S^3)\cong\{e\}$$

蕴含了 $S^1\times S^2\not\simeq S^3$（见第 1.4 节末尾）. 下面我们证明

命题 3.5.9. ($\mathbb{R}^2\not\simeq\mathbb{R}^n(n\geq 3)$)

对于任意 $n\geqslant 3$，$\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^2$ 是不同胚的.

证明 假设 $\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^2$，那么由习题 1.3，我们有 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\simeq\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. 但是

$$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\sim S^{n-1},\quad \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\sim S^1$$

从而 $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})=\{e\},\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\simeq\mathbb{Z}$，矛盾！ □

注 3.5.10. 注意到

- 用道路连通性 (即 π_0)，可以证明：对 $n\geqslant 2$，$\mathbb{R}$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$.
- 用 π_1，我们证明了：对 $n\geqslant 3$，$\mathbb{R}^2$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$.
- 一般情况下，用 π_k 可以证明：对 $n\geqslant k+1$，$\mathbb{R}^k$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$.

因为 $S^n\setminus\{pt\}$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$，作为推论，我们得到

推论 3.5.11. ($S^2\not\simeq S^n(n\geq 3)$)

对于任意 $n\geqslant 3$，S^n 和 S^2 是不同胚的.

¶ 非收缩核

设 $A \subset X$ 是 X 的收缩核，且 $r: X \to A$ 是收缩映射，则由定义，

$$r \circ \iota = \mathrm{Id}_A,$$

其中 $\iota: A \hookrightarrow X$ 为包含映射. 任取 $a \in A$. 根据 π_1 的函子性，我们得到

$$r_* \circ \iota_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a)}: \pi_1(A,a) \to \pi_1(A,a).$$

由此我们得到

命题 3.5.12.（收缩映射诱导基本群之间的满同态）
如果存在收缩映射 $r: X \to A$，那么对于任意 $a \in A$，$r_*: \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ 是满同态，而 $\iota_*: \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ 是单同态. ♠

利用这个性质，我们可以通过 π_1 证明一个子空间不是全空间的收缩核：

命题 3.5.13.（圆盘不能收缩至边界圆）
单位圆周 S^1 不是闭单位圆盘 $\overline{D}$ 的收缩核. ♠

证明 用反证法. 如果存在收缩映射 $r: \overline{D} \to S^1$，则存在满同态

$$r_*: \{e\} \cong \pi_1(\overline{D}) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z},$$

而这是不可能的. □

类似地可以证明：S^1 (作为赤道) 不是 S^2 的收缩核，或者更一般地，只要 $A \subset X$ 且 A 的基本群 “大于” X 的基本群，则 A 不可能是 X 的基本群.

事实上，即使 A 的基本群 “不大于” X 的基本群，也有可能通过基本群的运算规则判定 A 不是 X 的收缩核：

命题 3.5.14.（Möbius 带不能收缩至边界圆）
Möbius 带的边界圆周（见上页的图）不是 Möbius 带的收缩核. ♠

证明 设 M 是 Möbius 带，B 是它的 “边界圆周” 而 C 是它的 “中心圆”. 记将 M 中的点沿着图中 “纤维” 方向映到 C 中的收缩映射为 f, 则 $f(B)$ 为绕 C 两圈的满射. 令 $\iota: B \to M$ 为包含映射，则诱导映射 ι_* 为

$$\iota_*: \pi_1(B) \simeq \mathbb{Z} \to \pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}.$$

通过合适地选取生成元，我们有 $\iota_*(1) = 2$. 如果存在一个收缩映射 $r: M \to B$，那么 $r \circ i = \mathrm{Id}$ 蕴含着 $r_*(2) = 1$，从而 r_* 不是从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的群同态，矛盾. □

¶ Brouwer 不动点定理 ($n = 2$)

依然记平面上的单位闭圆盘为 $\overline{D}$. 下面我们证明

定理 3.5.15.（Brouwer 不动点定理, $n = 2$）
对于任意连续映射 $f: \overline{D} \to \overline{D}$, 存在 $p \in \overline{D}$ 使得 $f(p) = p$. ♡

证明 假设存在连续映射 $f:\overline{D}\to\overline{D}$ 使得对于任意 $p\in\overline{D}$，都有 $f(p)\neq p$. 那么我们令

$$r(p)=\text{“}S^1\text{与射线}\overline{f(p)p}\text{的交点”}.$$

则 $r:\overline{D}\to S^1$ 是一个从 $\overline{D}$ 到 S^1 的收缩映射，这跟命题3.5.13矛盾. □

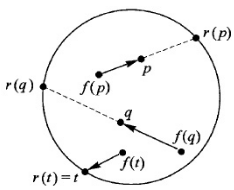


图 3.3: 收缩映射 r

¶ 代数基本定理.

下面我们用基本群证明著名的代数基本定理[9]：

定理 3.5.16.（代数基本定理）

设 $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 为一个复系数的多项式，则存在 $z_0\in\mathbb{C}$ 使得 $p(z_0)=0$. ♡

证明 假设多项式 p 没有根，则 $a_0\neq 0$. 我们考虑连续映射

$$f:S^1\to S^1,\quad z\mapsto p(z)/|p(z)|.$$

则 f 通过同伦

$$F:[0,1]\times S^1\to S^1,\quad (t,z)\mapsto p(tz)/|p(tz)|.$$

与常值映射

$$f_0:S^1\to S^1,\quad f_0(z)\equiv a_0/|a_0|$$

同伦等价，从而 f 是零伦的. 于是由引理3.4.11，f 诱导的群同态 $f_*:\pi_1(S^1)\to\pi_1(S^1)$ 是“零”同态，即对于所有的 $m\in\mathbb{Z}\simeq\pi_1(S^1)$，都有 $f_*(m)=0$ 成立.

另一方面，f 同伦于映射

$$f_1:S^1\to S^1,\quad z\mapsto z^n,$$

因为它们之间有同伦[10]

$$G:[0,1]\times S^1\to S^1,\quad (t,z)\mapsto\frac{z^n+a_{n-1}tz^{n-1}+\cdots+a_1t^{n-1}z+a_0t^n}{|z^n+a_{n-1}tz^{n-1}+\cdots+a_1t^{n-1}z+a_0t^n|}.$$

然而，因为 $f_1(\gamma_1)=\gamma_n$，它所诱导的群同态 $(f_1)_*:\pi_1(S^1)\to\pi_1(S^1)$ 由 $(f_1)_*(1)=n$ 给出，从而 f_* 不是零同态，矛盾. □

---

[9]代数基本定理最早由出生于法国的荷兰数学家吉拉德（Albert Girard，1595-1632）在 1629 年提出. 直到 1746 年法国数学家达朗贝尔（Jean d’Alembert，1717-1783）才给出了该定理的第一个证明，但遗憾的是，他的证明并不完整. 之后有很多数学家都曾经试图证明代数基本定理，包括欧拉（1749），佛朗索瓦（1759），拉格朗日（1772），拉普拉斯（1795），伍德（1798），高斯（1799）等，不过这些证明也都是有瑕疵的. 该定理的第一个完整证明是由业余数学家阿尔冈（Jean-Robert Argand, 1768-1822）在 1806 年给出，之后高斯又给出了三个不同证明（1816 年两个，1849 年），并称之为“代数方程的基本定理”. 迄今，人们陆续给出了该定理的上百种不同证明，而所有这些证明都或多或少地涉及到实函数或者复函数的“连续性”这一拓扑概念. 所以在 Aigner 和 Ziegler 所著的《数学天书中的证明》（第 (≥ 5) 版）中，作者写道：“代数基本定理并不真的基本，它也不必是一个定理（因为有时候它是作为定义出现的），而且它的原始形式也不是一个关于代数的结果，而是一个关于分析的定理”.

[10]注意：分母是连续的，在 $t=0$ 时分母是非零的，在 $t\neq 0$ 时分母也是非零的，因为此时它等于 $t^np(z/t)$：换言之，$G(t,z)=p(z/t)/|p(z/t)|$，于是当 $t\to 0$ 时我们实际上在考虑 p 在“无穷远”处的性态.

¶ 阅读材料：Borsuk-Ulam 定理 ($n=2$)

在推论3.1.11中我们用连通性（即 π_0）证明了一维 Borsuk-Ulam 定理，即

任给连续映射 $f: S^1 \to \mathbb{R}$, 都存在 $x_0 \in S^1$ 使得 $f(x_0)=f(-x_0)$.

下面我们使用 π_1 证明二维 Borsuk-Ulam 定理：

定理 3.5.17.（Borsuk-Ulam 定理，$n=2$）
对于任意连续映射 $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$, 存在 $x_0 \in S^2$ 使得 $f(x_0)=f(-x_0)$. ♡

证明 假设结论不成立，即存在连续映射 $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$, 使得对于任意 x, 有 $f(x) \neq f(-x)$. 定义一个映射 $g: S^2 \to S^1$ 为

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}.$$

则 g 是连续的，并且 g 保持对径点，即 $g(-x)=-g(x)$.

令 $\iota: S^1 \to S^2$ 为 “将赤道嵌入球面” 的包含映射，并且令 $h := g \circ \iota : S^1 \to S^1$. 在将 h 复合一个简单的旋转后，我们不妨设 $h(1)=1$. 于是对于任意的 $[\gamma]_p \in \pi_1(S^1, 1)$,

$$h_*([\gamma]_p)=[h\circ\gamma]_p=[g\circ\iota\circ\gamma]_p=g_*([\iota\circ\gamma]_p)=g_*(e)=e.$$

根据本节习题，h 可以被提升到一个连续映射 $\tilde{h}: S^1 \to \mathbb{R}$. 注意到 h 是保持对径点的，即 $h(-x)=-h(x)$. 因此对于任意的 $x \in S^1$,

$$p\circ\tilde{h}(-x)=h(-x)=-h(x)=-p\circ\tilde{h}(x).$$

由此可得 $\tilde{h}(-x)-\tilde{h}(x) \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, 因此由连通性，存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\tilde{h}(-x)-\tilde{h}(x)=m+\frac{1}{2}, \qquad \forall x \in S^1.$$

最后我们令 $F(x)=\tilde{h}\circ p(x)$，则对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x+\frac{1}{2})=\tilde{h}\circ p(x+\frac{1}{2})=\tilde{h}(-p(x))=\tilde{h}(p(x))+m+\frac{1}{2}=F(x)+m+\frac{1}{2}.$$

从而我们得到

$$F(1)=F(\frac{1}{2})+m+\frac{1}{2}=F(0)+2m+1\neq F(0),$$

这跟 $p(0)=p(1)$ 矛盾. □

作为 Borsuk-Ulam 定理的推论，不存在从 S^2 到 $\mathbb{R}^2$ 的连续单射，于是我们得到

推论 3.5.18.（S^2 不同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的子集）
$\mathbb{R}^2$ 中没有同胚于 S^2 的子集. ♡

注 3.5.19. 用高阶的不变量例如同伦群 π_k 或同调群，可以证明高维 Borsuk-Ulam 定理：

定理 3.5.20.（Borsuk-Ulam 定理）
对于任意连续映射 $f: S^n \to \mathbb{R}^n$, 存在 $x_0 \in S^n$ 使得 $f(x_0)=f(-x_0)$. ♡

该定理最早由 Ulam[11] 所猜测，并在 1933 年被 Borsuk[12]证明. 该定理有很多等价形式，如

- 不存在一个保持对径点的连续映射 $f: S^n \to S^{n-1}$.
- 对于任意保持对径点的连续映射 $f: S^n \to \mathbb{R}^n$, 存在 $x_0 \in S^n$ 使得 $f(x_0) = 0$.
- 不存在连续映射 $f: B^n \to S^{n-1}$ 使得 f 限制到边界 S^{n-1} 上是保持对径点的.
- 令 $F_1, F_2, \cdots, F_{n+1}$ 为 S^n 的一个闭覆盖, 那么存在 $1 \leqslant i \leqslant n+1$ 使得 $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.
- 令 $U_1, U_2, \cdots, U_{n+1}$ 为 S^n 的一个开覆盖, 那么存 $1 \leqslant i \leqslant n+1$ 使得 $U_i \cap (-U_i) \neq \emptyset$.

上面最后两条一般被称为 Lusternik-Schnirelmann-Borsuk 定理，最早由前苏联数学家 Lusternik 和 Schnirelmann 在 1930 年证明. 此外，Borsuk-Ulam 定理定理跟组合学中的 Tucker 引理也等价. 关于 Borsuk-Ulam 定理及其应用，尤其是在组合和几何中的应用，可参见 J. Matousek，Using the Borsuk-Ulam Theorem，Springer-Verlag, 2002.

¶ 烙饼定理

作为二维 Borsuk-Ulam 定理的应用，我们证明如下的烙饼定理（Pancake Theorem）:

推论 3.5.21.（烙饼定理）

任给 $\mathbb{R}^2$ 中两个有界可测集, 存在一条直线将每个集合都平分成测度相等的两部分. ♡

证明 [证明摘要.] 对于 $u = (u_0, u_1, u_2) \in S^2$, 如果 u_1 或 $u_2 \neq 0$, 那么记

$$L_u = \{(x_1, x_2) | u_1 x_1 + u_2 x_2 < u_0\};$$

如果 $u = (\pm 1, 0, 0)$, 那么记

$$L_{(1,0,0)} = \mathbb{R}^2, \quad L_{(-1,0,0)} = \emptyset.$$

将两个集合记为 A 和 B. 我们可以验证映射

$$f: S^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad u \mapsto (\mathrm{area}(A \cap L_u), \mathrm{area}(B \cap L_u))$$

是连续的. 因此存在 $u^0 = (u_0^0, u_1^0, u_2^0) \in S^2$ 使得 $f(u) = f(-u)$, 蕴含了直线

$$u_1^0 x_1 + u_2^0 x_2 = u_0^0$$

将每个集合分割为测度相等的两部分. □

类似地，用 n 维版本的 Borsuk-Ulam 定理，可以证明

推论 3.5.22

任给 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个有界可测集, 存在一个超平面将每个集合都平分成测度相等的两部分. ♡

当 $n = 3$ 时该推论就是所谓的“火腿三明治定理”(Ham-Sandwitch Theorem).

---

[11] 乌拉姆（Stanislaw Ulam，1909-1984），波兰数学家、核物理学家，曾参与曼哈顿计划. 在纯数学方面，他主要研究集合论、拓扑学、遍历论等. 他是波兰利沃夫学派重要成员，该学派 1930-1940 年代在利沃夫（Lvov，现属乌克兰）的苏格兰咖啡馆讨论数学问题（主要是泛函分析和拓扑学方面），这些问题后来被集结成册，即《苏格兰咖啡馆数学问题集》，共 193 个问题，其中有 40 个是 Ulam 提出的，另有 26 个是 Ulam 跟别的数学家共同提出的.

[12] 博苏克（Karol Borsuk，1905-1982），波兰数学家，主要研究拓扑学和泛函分析.