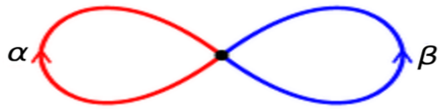
3.6 Van Kampen 定理

在上一节开头，我们通过用两个单连通开集覆盖 S^n 的方法证明了 $\pi_1(S^n) = \{e\}$. 今天我们将会把这种方法拓展到这些开集不必单连通甚至开集个数有很多的情形.

3.6.1 一些群论

¶ $S^1 \vee S^1$ 的基本群

我们考虑以下 "8 字形"$S^1 \vee S^1$:



几何上看，显然 $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ 是由两个生成元生成的，将它们分别记为 $[\alpha]$ 和 $[\beta]$，如上图所示. 然而此时它们没有理由是交换的（即未必有 $[\alpha][\beta] = [\beta][\alpha]$），因为从直觉上看，我们没法将圈 α "移动" 到圈 β. 因此，由乘积 $[\alpha]^3[\beta]^2[\alpha]^{-2}$ 的所表示的圈是先沿着 α 绕三圈，然后沿着 β 绕两圈，最后再沿着 α 反向绕两圈. 它不同于由 $[\alpha][\beta]^2$ 所表示的环路. 更一般地，任何 (有限长的) 由 $[\alpha], [\beta], [\alpha]^{-1}$ 和 $[\beta]^{-1}$ 组成的字都代表了 "8 字形" $S^1 \vee S^1$ 中的一个圈，并且除了平凡的消去关系如

$$[\alpha]^m([\alpha]^{-1})^n = [\alpha]^{m-n}$$

外，不同的字代表了不同 (伦) 的圈. 因此 $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ 的基本群不再是群的直积 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 而应当是 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, 两个 $\mathbb{Z}$ 的**自由积**. 下面我们简要给出自由积的定义和基本性质.

¶ 自由群

我们定义

定义 3.6.1.（自由群）

给定任意集合 S, 我们记 $S^{-1} = \{c^{-1} : c \in S\}$，并称

$$\langle S \rangle = \{c_1c_2\cdots c_n \mid n \geq 0, c_i \in S \cup S^{-1}\}$$

中的元素为由 S 中的字母生成的**字**（word). 我们赋予 $\langle S \rangle$ 群结构:

- 群的乘法运算定义为 $c_1c_2\cdots c_n \cdot c_{n+1}\cdots c_{n+m} := c_1c_2\cdots c_nc_{n+1}\cdots c_{n+m}$,
- 群的单位元定义为 "空字"，用 e 或 1 表示，
- 群的逆运算为 $(c_1c_2\cdots c_n)^{-1} := c_n^{-1}\cdots c_2^{-1}c_1^{-1}$，其中我们规定 $(c^{-1})^{-1} = c$.

这样得到的群 $\langle S \rangle$ 被称为由集合 S 生成的**自由群** (free group). ♣

根据定义，除了上面列出来的乘法和取逆外，$\langle S \rangle$ 中仅有的 "运算关系" 为诸如

$$c^m(c^{-1})^n = c^{m-n}$$

之类的消去关系.

例 3.6.2.

(1) 如果 $S=\{a,b,c\}$, 那么字

$$abbba^{-1}a^{-1}ccb^{-1}\cdot aa^{-1}bbb = abbba^{-1}a^{-1}ccb^{-1}aa^{-1}bbb = ab^3(a^{-1})^2c^2b^2 \in \langle S\rangle,$$

这里我们用到了 $b^{-1}aa^{-1}b=b^{-1}b=e\in\langle S\rangle$.

(2) 如果 $S=\{c\}$, 那么 $\langle S\rangle\simeq\mathbb{Z}$，因为

$$\langle S\rangle=\{c^n \mid n\in\mathbb{Z}\},$$

且群结构恰由 $c^n\cdot c^m=c^{n+m}$ 给出.

自由群 $\langle S\rangle$ 最重要的性质是如下的泛性质，该性质常常被用于作为自由群的定义：

命题 3.6.3.（自由群的泛性质）

任给群 G 和映射 $f:S\to G$, 存在唯一的群同态

$$\varphi:\langle S\rangle\to G$$

使得如果我们记 $i:S\hookrightarrow\langle S\rangle$ 为包含映射，则

$$f=\varphi\circ i.$$

$$\begin{tikzcd} \langle S\rangle \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ S \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

作为推论，对于任意群 G 和它任一生成元集 S(可以取 $S=G$), 都存在唯一的满同态 $\varphi:\langle S\rangle\to G$，于是

命题 3.6.4.（任意群是自由群的商）

任意群都同构于某个自由群 $\langle S\rangle$ 的商

$$G\cong\langle S\rangle/\ker\varphi.$$

¶ 群的表现

群同态 $\varphi:\langle S\rangle\to G$ 的核是自由群 $\langle S\rangle$ 的一个正规子群，且我们可以视 G 为在 $\langle G\rangle$ 中将所以 $\ker(\varphi)$ 中的元素等同于单位元而得到群. 当然，因为 $\ker(\varphi)$ 是一个群，所以只要将 $\ker(\varphi)$ 的一组生成元等同于单位元就够了. 这样“将某些群元素等同于单位元”所给出的方程被称作**关系** (relation). 于是，任何一个群都可以用生成元和关系来表示：

$$G=\langle S\mid R\rangle,$$

其中 S 是一组生成元，而 R 是形如 $s_1\cdots s_n=1$ 的方程构成的一组关系. 这种表示方法被称为群 G 的一个**表现** (presentation). 当然，对于任何一个群，它的表现都是不唯一的. 在具体问题中，一般会尽量选取尽可能少的生成元集和关系集.

反之，任给一个具有表现 $\langle S|R\rangle$ 的群 G，其中 S 是生成元集，R 是关系集，我们可以将群 G 写成商群

$$G=\langle S\rangle/N,$$

其中，N 是由 R 生成的 $\langle S\rangle$ 中的最小正规子群.

例 3.6.5.

(1) 令 $G=\mathbb{Z}_n$. 那么 G 由单个元素 a 生成. 令 $\langle S\rangle=\langle a\rangle\simeq\mathbb{Z}$. 那么满同态由

$$\varphi:\langle S\rangle\to G,\ a^k\mapsto[k],$$

给出，它的核 $\ker\varphi=\{\cdots,a^{-2n},a^{-n},1,a^n,a^{2n},\cdots\}$ 为由 a^n 生成的子群. 因此

$$\mathbb{Z}_n=\langle a\mid a^n=1\rangle.$$

(2) 对于 $G=\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, 它是两个生成元生成的交换群，从而有

$$\mathbb{Z}^2=\langle a,b\mid aba^{-1}b^{-1}=1\rangle.$$

¶ 群的自由积

接下来我们定义群的自由积.

定义 3.6.6.（群的自由积）

设 G,H 为两个群. 我们称 (形式上的) 乘积

$$g=g_1g_2\cdots g_n,\qquad (\text{其中 } s_i\in G \text{ 或 } H，\text{且 } n\geq 0)$$

为一个**字** (word). 全体字组成的集合形成了一个群

$$G*H=\{g_1g_2\cdots g_n\mid g_i\in G \text{ 或} H\},$$

其中群的运算跟自由群一样，分别为“字的连接”和“反转取逆”. 我们称这个群为 G 和 H 的**自由积** (free product). ♣

类似地，我们可以定义一族群 G_α 的**自由积**为

$$*_\alpha G_\alpha=\{g_1g_2\cdots g_n\mid \text{对任意}i，\text{存在}\alpha \text{ 使得}g_i\in G_\alpha\}.$$

由定义可知，如果 $G_\alpha=\langle S_\alpha|R_\alpha\rangle$, 那么 $*_\alpha G_\alpha=\langle\cup_\alpha S_\alpha|\cup_\alpha R_\alpha\rangle$.

例 3.6.7.

(1) $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}=\langle a,b\rangle$. (因此交换群的自由积有可能是非交换的.)

(2) $\langle a\mid a^3=1\rangle*\langle b\mid b^4=1\rangle=\langle a,b\mid a^3=b^4=1\rangle$. (因此有限群的自由积可能无限.)

(3) $\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_2=\langle a,b\mid a^2=b^2=1\rangle=\{1,a,b,ab,ba,aba,bab,abab,\cdots\}$.

(4) 对于任意集合 S，$\langle S\rangle=*_{s\in S}\mathbb{Z}$.

群 G_α 的自由积 $*_\alpha G_\alpha$ 具有如下泛性质:

命题 3.6.8.（自由积的泛性质）

对于任意群 H 和一族群同态 $\varphi_\alpha:G_\alpha\to H$, 存在唯一的群同态

$$\varphi:*_\beta G_\beta\to H,$$

使得对于任意 $g_k\in G_{\alpha_k}$, 都有

$$\varphi(g_1\cdots g_n)=\varphi_{\alpha_1}(g_1)\cdots\varphi_{\alpha_n}(g_n).\qquad (*)$$

♠

$$\begin{tikzcd} *_\beta G_\beta \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ G_\alpha \arrow[u, hook, "i_\alpha"] \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & H \end{tikzcd}$$

注意我们可以用 (*) 去定义提升的群同态 $\varphi:*_\beta G_\beta\to H$.

¶ 群的融合自由积

更一般地，设 F, G, H 为三个群，而

$$\varphi : F \to G, \quad \psi : F \to H$$

为两个群同态. 令 N 为 $G * H$ 中包含所有形如

$$\varphi(a)\psi(a)^{-1},\ a \in F$$

的元素的最小正规子群.

定义 3.6.9.（群的融合自由积）

我们称群

$$G *_F H := G * H/N$$

为 G 和 H 相对于群同态 φ 和 ψ 的**融合自由积** (free product with amalgamation). ♣

设 S 是 F 的一个生成元集. 根据定义，$G *_F H$ 是自由积 $G * H$ 模掉所有关系

$$\varphi(a)\psi(a)^{-1} = 1, \forall a \in S$$

后得到的商群.

例 3.6.10.

(1) 假设 $G = \langle a\rangle, H = \langle b\rangle, F = \langle c\rangle$. 那么 G 和 H 相对于同态

$$\varphi : F \to G,\ c \mapsto a^3, \qquad \text{以及} \qquad \psi : F \to H,\ c \mapsto b^4$$

的融合自由积是 $G *_F H = \langle a, b \mid a^3 \cdot b^{-4} = 1\rangle$

(2) 我们有

- $\{e\} *_F \{e\} = \{e\}$,
- $G *_{\{e\}} H = G * H$,
- 相对于恒等同态：$G *_G G = G$,
- 相对于同态 $\varphi : F \to G$：$G *_F \{e\} = G/N$, 其中 N 是由 $\mathrm{Im}(\varphi : F \to G)$ 生成的最小正规子群.

3.6.2 van Kampen 定理及应用

¶ van Kampen 定理

下面我们陈述本节的主要定理，van Kampen 定理[13]. 该定理跟代数拓扑中用于计算同调群/上同调群的 Mayer-Vietoris 序列类似，都是通过计算（一般而言较为简单的）子空间的拓扑不变量，并细致考察子空间的交相对于全空间的拓扑，最终得到全空间的拓扑量. van Kampen 定理是计算拓扑空间基本群最重要的工具之一，我们将会利用它计算包括紧曲面在内的很多拓扑空间的基本群.

[13]范坎彭（Egbert van Kampen，1908-1942），荷兰数学家，英年早逝的拓扑学家，1933 年证明了用以计算基本群的 van Kampen 定理. 该定理的一个版本在 1930 年已经出现在德国拓扑学家塞弗特 (Herbert Seifert，1897-1996) 的博士论文中，因此这个定理也被称作 Seifert-van Kampen 定理.

定理 3.6.11.（van Kampen 定理）

设 $X = U_1 \cup U_2$，其中 U_1, U_2 是 X 中的道路连通开集，且 $U_1 \cap U_2$ 也是道路连通的. 则对任意 $x_0 \in U_1 \cap U_2$，

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \pi_1(U_2, x_0),$$

其中群同态

$$\varphi : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0) \quad \text{和} \quad \psi : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_2, x_0)$$

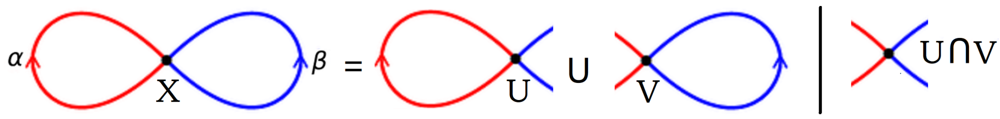
是由相应的包含映射 $U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ 和 $U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ 所诱导的诱导同态. ♡

注 3.6.12. 注意我们并不能用 van Kampen 定理去计算 $\pi_1(S^1)$: 如果我们令 $U_1 = S^1 \setminus \{1\}$ 和 $U_2 = S^1 \setminus \{-1\}$, 则 $\pi_1(U_1) = \pi_1(U_2) = \{e\}$, 从而 $\pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \pi_1(U_2, x_0) = \{e\} \neq \pi_1(S^1, x_0)$，其原因在于：$U_1 \cap U_2$ 并不道路连通.

下面我们给出用 van Kampen 定理计算基本群的一些例子.

¶ van Kampen 定理的应用：“8 字型”的基本群

考虑本节开头提到的“8 字形”，即 $X = S^1 \vee S^1$. 取 U, V 为 α 和 β 的开邻域，如下图所示：



因为 U, V 都同伦等价于圆 S^1，我们有

$$\pi_1(U) \cong \langle \alpha \rangle \quad \cong \mathbb{Z}, \qquad \pi_1(V) \cong \langle \beta \rangle \quad \cong \mathbb{Z}.$$

显然 $U \cap V$ 是可缩的，即 $\pi_1(U \cap V) = \{e\}$. 于是由 van Kampen 定理，我们得到

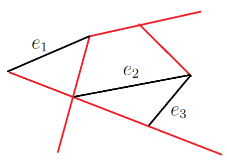
$$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle \alpha \rangle *_{\{e\}} \langle \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \quad (\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}),$$

从而证实了我们在本节开头的观察.

¶ van Kampen 定理的应用：图的基本群

在第 2.2 节我们介绍了图的概念. 我们通过一个例子来解释如何用 van Kampen 定理计算图的基本群.

例 3.6.13.

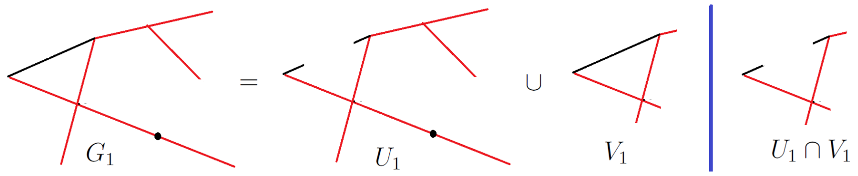
$G =$ 

首先，我们选取图 G 的一个“极大子树”(maximal subtree) G_0，比如图中被标为红色的部分. 剩余 3 条边，我们将它们分别记为 e_1, e_2, e_3.

为了计算 G 的基本群, 我们从 G_0 开始. 因为 G_0 是树，是单连通的，所以

$$\pi_1(G_0) \simeq \{e\}.$$

下面我们添加一条边，比如 e_1，然后计算 $G_1 = G_0 \cup e_1$ 的基本群. 为此我们将 G_1 分解为如下图所示的开集 U_1 与 V_1 的并:



因为 $U_1 \cap V_1$ 是可缩的，而 V_1 同伦等价于 S^1, 我们得到

$$\pi_1(G_1) \simeq \pi_1(G_0) *_{\{e\}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

接下来我们通过添加边 e_2 并重复相同的步骤，得到

$$\pi_1(G_2) = \pi_1(G_1 \cup e_2) \simeq \pi_1(G_1) *_{\{e\}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

最后添加边 e_3，得到

$$\pi_1(G) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

一般地，给定任意连通图 G，我们有以下结论：

(a) 任何图都存在一个极大子树 G_0（它是 G 的包含所有顶点的单连通子图：对有限图可以用归纳法证明存在极大子树，对一般的图可以用 Zorn 引理证明存在极大子树）

(b) 如果我们记 G 中不在 G_0 里面的边的集合为 $\{e_\alpha\}$，那么

$$\pi_1(G) \simeq *_{e_\alpha}\mathbb{Z}.$$

(c) 对于有限图 G, 如果我们记

$$|V(G)| = G\text{中顶点数}, \qquad |E(G)| = G\text{中边数},$$

那么 G_0 的边数为 $|V(G)| - 1$. 由此可得

$$\pi_1(G) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k},$$

其中 $k = |E(G)| - |V(G)| + 1$.

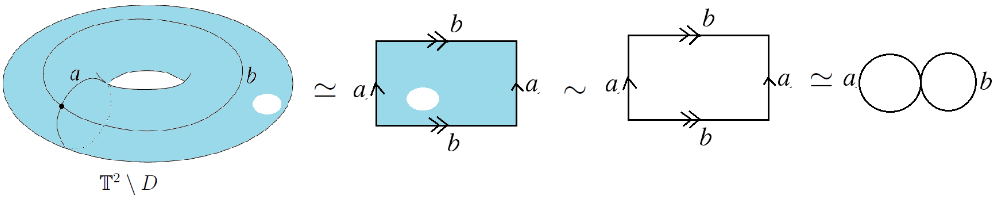
¶ van Kampen 定理的应用：再次计算 $\mathbb{T}^2$ 的基本群

接下来, 我们计算 $\Sigma_1 = \mathbb{T}^2$ 的基本群. 虽然我们已经知道 $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z}^2$, 但我们将利用 van Kampen 定理重新计算它的基本群，因为这个方法为如何计算 Σ_g (有 g 个洞的可定向闭曲面）的基本群提供了思路.

我们首先将 $\mathbb{T}^2$ 写作

$$U_1 = \mathbb{T}^2 \setminus \overline{D} \qquad \text{和} \qquad U_2 = \widetilde{D}$$

的并集，其中 D 是一个小圆盘，$\widetilde{D}$ 是一个包含 $\overline{D}$ 的稍微大一点点的开圆盘. 我们首先计算基本群 $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \overline{D})$. 根据下图，



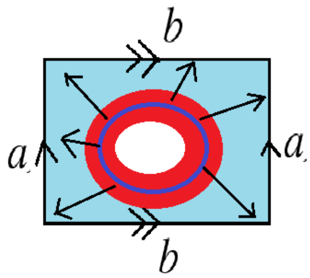
我们得到

$$\pi_1(U_1) \simeq \pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle.$$

另一方面，显然 U_2 是可缩的，而 $U_1 \cap U_2$ 是一个同伦等价于圆周的“细圆环”，因此

$$\pi_1(U_2) \simeq \pi_1(\text{“pt”}\ ) = \{e\} \quad \text{和} \quad \pi_1(U_1 \cap U_2) \simeq \pi(S^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

不幸的是，以上信息不足以决定 $\pi_1(\mathbb{T}^2)$, 因为我们仍然需要显式地写出映射



$$\varphi = \iota_* : \pi_1(U_1 \cap U_2) \to \pi_1(U_1).$$

这个群同态由包含映射诱导. 根据右图，$\pi_1(U_1 \cap U_2)$ 的生成元是一个在 U_1 中可被形变到边界环路 $aba^{-1}b^{-1}$ 的圆周. 换句话说，

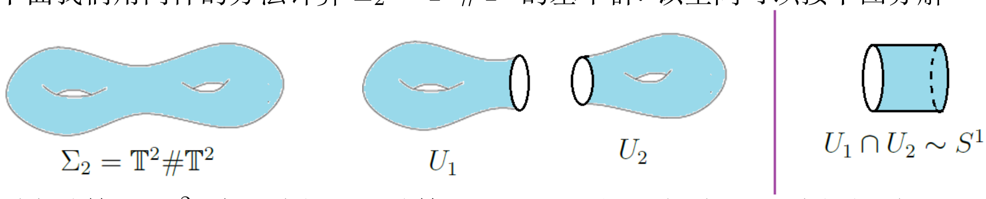
$$\varphi(1) = aba^{-1}b^{-1}.$$

因此我们得到

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} \{e\} = \langle a, b \,|aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^2.$$

¶ van Kampen 定理的应用：$\Sigma_g = \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2$ 的基本群

下面我们用同样的方法计算 $\Sigma_2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ 的基本群. 该空间可以按下图分解：



注意到在计算 $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ 中，我们已经计算了 U_1 和 U_2 的基本群. 因此我们得到了

$$\pi_1(U_1) \simeq \langle a_1, b_1 \rangle, \quad \pi_1(U_2) \simeq \langle a_2, b_2 \rangle, \quad \pi_1(U_1 \cap U_2) \simeq \mathbb{Z}.$$

此外，我们刚才也解释了包含映射给出的两个诱导同态分别由

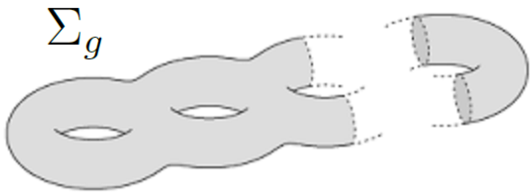
$$\varphi(1) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, \quad \psi(1) = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$$

给出，因此由 van Kampen 定理可以得到

$$\pi_1(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) \simeq \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid \underbrace{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}}_{\varphi(1)\psi(1)^{-1}} = 1 \rangle$$

注意这个群不再是交换群.

一般地，由归纳法可以计算“亏格”为 g 的紧无边曲面即 $\Sigma_g = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_{g}$ 的基本群，



其结果为

$$\pi_1(\underbrace{\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2}_{g}) \simeq \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1\rangle$$

3.6.3 阅读材料：van Kampen 定理的证明

¶ van Kampen 定理（多个开集的版本）

van Kampen 定理可以被推广为 X 被多个开集 U_α 所覆盖的情形，此时我们取基点 $x_0 \in \cap_\alpha U_\alpha$ 并分别记由包含映射 $U_\alpha \hookrightarrow X$ 和 $U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha$ 所诱导的群同态为

$$j_\alpha : \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \quad \text{和} \quad \iota_{\alpha\beta} : \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0) \to \pi_1(U_\alpha, x_0)$$

根据泛性质，j_α 诱导了唯一的从自由积到 $\pi_1(X, x_0)$ 的群同态

$$\Phi : *_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

van Kampen 定理告诉我们如何由群同态 Φ 计算 $\pi_1(X, x_0)$. 下面我们陈述并证明它：

定理 3.6.14.（van Kampen 定理, 一般版本）

设 $\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个由道路连通开集组成的开覆盖，且设 $x_0 \in \cap_\alpha U_\alpha$.

(1) 若每个交集 $U_\alpha \cap U_\beta$ 都是道路连通的，则 Φ 是满射.

(2) 若除此之外，每个交集 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 也都是道路连通的，则 Φ 诱导了群同构

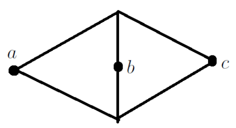
$$*_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0)/N \simeq \pi_1(X, x_0).$$

其中 N 是由全部形如 $\iota_{\alpha\beta}(\omega)\iota_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ 的元素生成的正规子群.

♡

我们通过注记3.6.12中 S^1 的例子可以看到，没有 "$U_\alpha \cap U_\beta$ 是道路连通" 这个条件，Φ 不一定是满射. 现在我们给一个例子说明条件 "$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 是道路连通的" 对于定理中的断言 (2) 也是必要的：

例 3.6.15.

$X =$ 

令 X 为左边的图. 那么通过同伦等价或者应用上述计算图的基本群时所得的公式，我们有 $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

但是如果我们令 $U_1 = X \setminus \{a\}, U_2 = X \setminus \{b\}$ 和 $U_3 = X \setminus \{c\}$ 并对覆盖 $\{U_1, U_2, U_3\}$ 应用 van Kampen 定理的结论，则由 $\pi_1(U_i) \simeq \mathbb{Z}$ $(1 \le i \le 3)$ 我们会错误地得出 $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.[14]这里 van Kampen 定理不适用的原因在于 U_1, U_2, U_3 的交集不是道路连通的.

[14]我们并不能简单地认为 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ 比 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ "小"，因为 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ 有子群同构于 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$，甚至由子群同构于有可数个生成元的自由群！所以 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ 并不显然. 证明该结论的方法之一是去证明它们有不同的交换化（这又是通过函子把复杂问题简单化的一个例子）. 参见本节习题.

¶ 一般版本 van Kampen 定理的证明

证明

(1) 映射 Φ 是满射.

任给以 x_0 为基点的圈 $\gamma:[0,1]\to X$, 由 Lebesgue 数引理，存在区间 $[0,1]$ 的一个划分 $0=s_0<s_1<\cdots<s_m=1$，使得每个 $\gamma([s_i,s_{i+1}])$ 都被包含于某个 U_α 中. 重复命题3.5.1的证明过程，即对每个 i 取定一个 U_i，使得 $\gamma([s_i,s_{i+1}])\subset U_{i+1}$，并取 λ_i 为道路连通集合 $U_i\cap U_{i+1}$ 中从 x_0 到 $\gamma(s_i)$ 的一条道路，则我们得到

$$\gamma \underset{p}{\sim} (\gamma_1 * \bar{\lambda}_1)*(\lambda_1*\gamma_2*\bar{\lambda}_2)*\cdots*(\lambda_{m-1}*\gamma_m).$$

因为每个圈 $\lambda_i*\gamma_{i+1}*\bar{\lambda}_{i+1}$ 都在某个 U_α 中，所以 $[\gamma]_p\in \mathrm{Image}(\Phi)$, 即 Φ 是满射.

[注意：以上论证也说明了 Φ 通常而言不是单射，因为 $f([s_i,s_{i+1}])$ 有可能同时被包含于 U_α 和 U_β 中，因此圈 $\lambda_i*\gamma_{i+1}*\bar{\lambda}_{i+1}$ 同时位于 U_α 和 U_β 中, 从而既可以被视作 U_α 中的圈，也可以被视作 U_β 中的圈, 于是我们得到了 $[\gamma]_p$ 在$*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 中两个不同的表示方法.]

(2) 我们分三步证明.

第一步. 转化问题.

我们记 $k_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\hookrightarrow X$ 为包含映射，则由

$$\Phi(\iota_{\alpha\beta}(\omega)\iota_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}) = j_\alpha\iota_{\alpha\beta}(\omega)\cdot j_\beta\iota_{\beta\alpha}(\omega^{-1}) = (k_{\alpha\beta})_*(\omega)k_{\alpha\beta}(\omega^{-1}) = e$$

可知 $N\subset\ker(\Phi)$. 于是满同态 Φ 诱导了满同态

$$\overline{\Phi}: *_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)/N\to\pi_1(X,x_0).$$

我们需要证明 $\overline{\Phi}$ 是单射. 为此，我们考虑 $*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 中的字的如下两种操作:

操作 1: 若一个字中的相邻两项 $[\gamma_i]_p,[\gamma_{i+1}]_p$ 都在同一个 $\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 中，则用 $[\gamma_i*\gamma_{i+1}]_p$ 代替 $[\gamma_i]_p[\gamma_{i+1}]_p$.

操作 2: 若一个字中有一项 $[\gamma_i]_p\in\pi_1(U_\alpha,x_0)$，且 γ_i 是 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中的圈，则将该项替换为 $[\gamma_i]_p\in\pi_1(U_\beta,x_0)$.

注意操作 1 不改变该字所对应的$*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 的元素，而操作 2 不改变该字在商群$*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)/N$ 中的像. 于是为证 $\overline{\Phi}$ 是单射，我们只要证明:

转化后的问题: 如果 $\Phi([\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p)=\Phi([\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p)$, 则 $[\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p$ 可以通过有限次运用上述两种操作（及其逆操作）变成 $[\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p$.

第二步. 准备工作: $[0,1]\times[0,1]$ 的“砖块分解”.

现在假设 $\Phi([\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p)=\Phi([\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p)=[\gamma]_p$. 由定义,

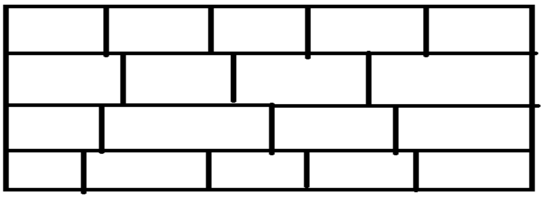
$$\gamma_1*\cdots*\gamma_M \underset{p}{\sim} \gamma \underset{p}{\sim} \gamma_1'*\cdots*\gamma_N',$$

且每个 γ_i 或 γ_i' 都是一个基点为 x_0 且完全落在某个 U_α 中的圈. 令 $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ 为连接 $\gamma_1*\cdots*\gamma_M$ 和 $\gamma_1'*\cdots*\gamma_N'$ 的一个道路同伦. 由管形邻域引理以及 Lebesgue 数引理，我们能够将 $[0,1]\times[0,1]$ 分解为有限多个小矩形 $R_{ij}=[t_j^i,t_{j+1}^i]\times[s_i,s_{i+1}]$,

其中 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_K < s_{K+1} = 1$ 且 $0 = t_0^i < t_1^i < \cdots < t_{k(i)}^i = 1$, 使得

- 每个 $F(R_{ij})$ 都被包含于某个 U_α 中, 我们将其记为 U_{ij}.
- $k(0) = M, k(K) = N$, 且 $t_j^0 = j/M, t_j^K = j/N$. (此处我们用了管形邻域引理)
- $[0,1] \times [0,1]$ 中的每个点位于至多三个矩形 R_{ij} 当中.

这样的分解[15] 看起来如下图:



为方便起见,我们将这些"砖块"按从左到右、从下到上的顺序,记为 $R_1, R_2, \cdots, R_L$.

注意同伦 F 将矩形 $[0,1] \times [0,1]$ 的左边线和右边线都映到 x_0. 因此如果 λ 是 $[0,1] \times [0,1]$ 中从左边线到右边线的道路，那么 $F|_\lambda$ 是以 x_0 为基点的一个圈. 此外，砖块分解图中每个砖块的每个顶点 v 落在至多三个砖块里，从而 $F(v)$ 属于至多三个砖块所对应的开集 U_{ij} 的交集中. 由定理条件，在这样的交集中存在一条从 x_0 到 $F(v)$ 的道路 λ_v. （若 $F(v) = x_0$，我们取该道路为常值道路.)

第三步. 从 "底" 到 "顶"，完成证明.

对于每个 $0 \le r \le L$, 我们令 λ_r 为从左边线到右边线的将前 r 个矩形 $R_1, R_2, \cdots, R_r$ 和剩余的矩形分隔开的 "折线道路"，每条折线 λ_r 是由若干段矩形的边（含多条水平线段和至多一条竖直线段）组成. 和满射性的证明类似，对于 λ_r 途径的每个顶点 v，我们可以在圈 $F|_{\lambda_r}$ 中插入一些道路 μ_v 和 $\bar{\mu}_v$，从而将圈 $F|_{\lambda_r}$ 分解为若干以 x_0 为基点的环路，使得每个圈都位于某个 U_α 当中. 于是，每条折线给出了$*_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0)$ 中的一个字. 例如 λ_0 就是下边线，对应于字 $[\gamma_1]_p[\gamma_2]_p \cdots [\gamma_M]_p$，而 λ_L 就是上边线，对应于字 $[\gamma_1']_p[\gamma_2']_p \cdots [\gamma_N']_p$.

下面我们证明 λ_r 对应的字可以通过有限次运用上述操作 1 和操作 2 (及它们的逆操作）变成 λ_{r+1} 对应的字. 因为 λ_r 跟 λ_{r+1} 的差别只是把 R_r 的左、下两条边换成上、右两条边，所以对应的字只有连续若干个元素（主要取决于矩形 R_r 的上下水平边上的顶点个数) 不同. 我们首先通过操作 2, 把所有涉及到的这些 "有变化的线段（在添加上前述 λ_v 以及 $\overline{\lambda}_v$ 后）所得到的圈的道路同伦类" 全部换成 "该圈在 R_r 所对应的 U_{ij} 中的圈所对应的道路同伦类" . 因为 $F|_{R_r}$ 给出了这两组替换后的圈在 U_{ij} 中的道路同伦，所以可以通过操作 1 把第一组圈的道路同伦类替换成第二组圈的道路同伦类. 于是我们证明了 λ_r 对应的字可以通过有限次运用操作 1 和操作 2 (及它们的逆操作) 变成 λ_{r+1} 对应的字. 于是从 λ_0 对应的字 $[\gamma_1]_p[\gamma_2]_p \cdots [\gamma_M]_p$ 开始，通过重复上述过程，可以通过有限次运用操作 1 和操作 2 (及它们的逆操作) 变成，得到 λ_L 对应的字 $[\gamma_1']_p[\gamma_2']_p \cdots [\gamma_N']_p$，这样我们就完成了证明.

□

[15]这是一个 "砖块" 分解. 也可以用 "六边形分解" 替代，同样能让每个点位于分解中的至多三个元素中.