3.7 覆叠空间

3.7.1 覆叠空间的概念与例子

¶ 覆叠空间的定义

我们在计算 $\pi_1(S^1)$ 时，核心步骤是证明 S^1 的提升引理即引理3.5.8，而该引理证明的关键要点是投影映射 $p:\mathbb{R}\to S^1$ 的“局部可逆性”，即存在 S^1 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得

- $p^{-1}(U_i)=\bigcup\limits_j V_j^i$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集的不交并，
- 每个 $p_j^i=p|_{V_j^i}:V_j^i\to U_i$ 是一个同胚.

事实上，这样的“覆叠结构”广泛存在于几何中，且与基本群密切相关：不仅覆叠结构可被用于计算特定空间的基本群，而且基本群也可以用于分类覆叠结构. 因此我们定义

定义 3.7.1.（覆叠空间） 设 X 是一个拓扑空间. 若存在拓扑空间 $\widetilde{X}$ 以及连续映射 $p:\widetilde{X}\to X$ 使得对于任意 $x\in X$，存在于 x 的一个开邻域 U 满足如下性质：

(1) $p^{-1}(U)=\cup_\alpha V_\alpha$，其中 V_α 是 $\widetilde{X}$ 中的不交开集.

(2) 对于任意的 α, 映射 $p_\alpha:=p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$ 是一个同胚.

则我们称 $\widetilde{X}$ 为 X 的一个**覆叠空间**（covering space），称映射 p 是一个**覆叠映射**（covering map）, 并且对于任意 $x\in X$, 称 $p^{-1}(x)$ 为该覆叠映射在 x 处的**纤维** (fiber). ♣

注 3.7.2.

(1) 我们总假设 X 和 $\widetilde{X}$ 都是道路连通的. 事实上，

- 若 $\widetilde{X}$ 是 X 的覆叠空间, $X_0\subset X$ 是一个子空间，那么
$$\widetilde{X}_0:=p^{-1}(X_0)$$
是 X_0 的一个覆叠空间. 所以我们总可以通过限制到道路连通分支的方法，使得 X 是道路连通的.
- 如果 X 是道路连通的，$\widetilde{X}$ 是 X 的覆叠空间，那么 $\widetilde{X}$ 的道路连通分支是 X 的覆叠空间. 所以我们总可以通过限制到道路连通分支的方法，使得 $\widetilde{X}$ 是道路连通的.

(2) 在 X 道路连通的条件下，可以验证（留作习题）：

- p 总是满射 (假设 $\widetilde{X}\neq\emptyset$).
- 对于任意 $x\in X$，纤维 $p^{-1}(x)$ 都有着相同的势，称为覆叠的**叶数**（number of sheets）. 若 $|p^{-1}(x)|=n$, 则我们称该覆叠为一个 **n-重覆叠（n-fold covering）**.

¶ 覆叠空间：例子

例 3.7.3. 以下是一些覆叠空间的例子：

(1) $\mathbb{R}$ 是 S^1 的覆叠空间，其覆叠映射 $p:\mathbb{R}\to S^1$，$x\mapsto e^{2\pi ix}$.

(2) S^1 以多种不同的方式成为 S^1 的覆叠空间：对于任意整数 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，

$$p_n : S^1 \to S^1, \quad z \mapsto z^n$$

给出了 S^1 的一个 $|n|$-重覆叠.

(3) 类似地，对于任意整数 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，映射

$$p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^n$$

是一个 $|n|$ 重覆叠映射.

[然而，$p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ 不是一个覆叠映射.]

(4) 复指数映射

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

是一个覆叠映射：对于任意的 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, 我们有

$$\exp^{-1}(z) = \{\log r + (2k\pi + \theta)i \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

由此可以验证 exp 是一个覆叠映射.

(5) S^n 是实射影空间 $\mathbb{RP}^n$（参见例1.4.35）的一个覆叠空间，覆叠映射为

$$p : S^n \to \mathbb{RP}^n = S^n/\sim, \quad x \to [x],$$

其中 $x_1, x_2 \in S^n$, $x_1 \sim x_2 \iff x_1 = \pm x_2$. 这是一个二重覆叠.

[然而，$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 不是 $\mathbb{RP}^n$ 的一个覆叠空间.]

(6) 在例1.4.44(5)中，我们定义透镜空间 $L(p, q)$ (p 和 q 为互质的整数) 为商空间

$$L(p; q) := S^3/\sim,$$

其中 $(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2') \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ 使得$z_1' = e^{2\pi ki/p} z_1$, $z_2' = e^{2\pi kqi/p} z_2$. 可以验证在商映射之下，$S^3$ 是 $L(p, q)$ 的一个 p-重覆叠空间.

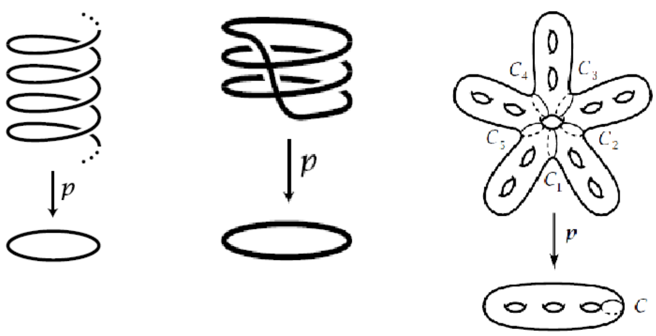
(7) 如果 $p : \widetilde{X} \to X$ 和 $p' : \widetilde{X}' \to X'$ 都是覆叠映射，那么映射

$$p \times p' : \widetilde{X} \times \widetilde{X}' \to X \times X', \ (\tilde{x}, \tilde{x}') \mapsto (p(\tilde{x}), p'(\tilde{x}'))$$

也是覆叠映射. 特别地，$\widetilde{X} = \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 的覆叠空间.

(8) 同上节一样，我们记“亏格”为 g 的紧无边曲面为 Σ_g. 则 Σ_{11} 是 Σ_3 的（5 重）覆叠空间，如下图所示. 类似地，可以构建从 Σ_{kr+1} 到 Σ_{k+1} 的 r 重覆叠映射.

下面这些图给出了 (1),(2),(8) 所描述的覆叠映射：



¶ 覆叠空间 v.s. 群作用

注意到例3.7.3中的 (1), (2), (5), (6) 已经在例1.4.44中作为特定的群作用下的商空间出现过. 一般地，假设 G 是一个群，作用在拓扑空间 $\widetilde{X}$ 上，

$$X = \widetilde{X}/G := \widetilde{X}/\sim,$$

为该群作用下的商空间. 一个自然的问题是：

$\boxed{\text{问题}}$：商映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 是一个覆叠映射吗?

事实上，在习题 1,4 中我们已经给出了商映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 是覆叠映射的一个充分条件：

$$\forall \tilde{x} \in \widetilde{X},\ \exists \tilde{x}\text{的开邻域}\widetilde{U}, \text{使得对}\forall g \neq e \in G, \text{有}(g \cdot \widetilde{U}) \cap \widetilde{U} = \emptyset. \qquad (\bigstar)$$

定义 3.7.4.（纯不连续作用）

如果群 G 在拓扑空间 X 上的作用满足条件 ($\bigstar$)，则我们称该作用是**纯不连续的**（properly discontinuous）. ♣

在习题 1.4 中我们证明了如下结果，为了完整性起见我们给出详细证明：

命题 3.7.5.（特定群作用下商映射是覆叠映射）

假设群 G 作用在拓扑空间 $\widetilde{X}$ 上. 若该作用是纯不连续的, 则 $\widetilde{X}$ 是商空间 $X = \widetilde{X}/G$ 的一个覆叠空间, 且商映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 是一个覆叠映射. ♠

证明 令 $x \in X, \tilde{x} \in p^{-1}(x)$，$\widetilde{U}$ 为 $\tilde{x}$ 的满足条件 ($\bigstar$) 的开邻域. 记 $U = p(\widetilde{U})$. 则由定义，

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(p(\widetilde{U})) = \bigcup_{g \in G} g \cdot \widetilde{U}$$

是 $\widetilde{X}$ 中开集的并集. 因此由商拓扑的定义, 集合 U 为 X 中的开集. (这蕴含了 p 是一个开映射.) 由此 $p(\widetilde{U})$ 是 x 的一个开邻域，且满足覆叠空间中的条件 (1).

下面验证覆叠空间定义中的条件 (2). 我们首先注意到由条件 ($\bigstar$), $p|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$ 是单射，由 U 的定义它是满射. 作为商映射它是连续的. 由上一段相同的论证可得它是一个开映射. 因此 $p|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to p(\widetilde{U})$ 是一个同胚. 由此可知对于任意的 $g \in G$, 映射

$$p_g : g \cdot \widetilde{U} \to p(\widetilde{U})$$

是以下两个同胚的复合

$$g \cdot \widetilde{U} \xrightarrow{g^{-1}} \widetilde{U} \xrightarrow{p} p(\widetilde{U}),$$

从而也是一个同胚. □

可以验证例1.4.44中所涉及的群作用都是纯不连续的，故所得的商映射都是覆叠映射.

例 3.7.6. 考虑 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 在 $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$ 的作用，

$$1 \cdot (z, w) = (z, w), \quad (-1) \cdot (z, w) = (\bar{z}, -w).$$

这是一个纯不连续作用，给出了 $\mathbb{T}^2$ 到 $\cdots\cdots$ Klein 瓶的二重覆叠! [验证!]

3.7.2 映射的提升

¶ 提升引理

我们先给出映射提升的定义：

定义 3.7.7.（映射的提升）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 为一个覆叠映射，而 $f:Y\to X$ 是一个连续映射. 若连续映射 $\tilde{f}:Y\to\widetilde{X}$ 使得右边的图表交换，即

$$p\circ\tilde{f}=f,$$

则称 $\tilde{f}$ 为 f 的一个**提升**（lifting）. ♣

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

通过重复引理3.5.8的证明，可以得到任意具有“初始提升”的连续映射 $F:P\times I\to X$ 可被唯一提升：

引理 3.7.8.（一般提升引理）

设 P 是拓扑空间，$p:\widetilde{X}\to X$ 是一个覆叠映射. 若映射

$$F_0=F|_{P\times\{0\}}:P\times\{0\}\to X$$

可以被“提升”为连续映射 $\widetilde{F_0}:P\times\{0\}\to\widetilde{X}$，则存在 F 的提升 $\widetilde{F}:P\times I\to\widetilde{X}$，使得 $\widetilde{F_0}=\widetilde{F}|_{P\times\{0\}}$，且满足该条件的提升是唯一的. ♢

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ P\times\{0\} \arrow[ur, "\widetilde{F_0}"] \arrow[r, "F_0"] & X \end{tikzcd} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ P\times I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

特别地，分别取 P 为单点集以及 $P=[0,1]$, 我们可以得到

推论 3.7.9.（道路提升性质）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，则对于 X 中任意起点为 $\gamma(0)=x_0$ 的道路 $\gamma:[0,1]\to X$, 以及任意 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$, 在 $\widetilde{X}$ 中有唯一一条起点为 $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{x}_0$ 的道路 $\tilde{\gamma}:[0,1]\to\widetilde{X}$，使得 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的提升, 即 $p\circ\tilde{\gamma}=\gamma$. ♡

以及

推论 3.7.10.（同伦提升性质）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射

(1) 对于 X 中任意具有固定起始点 $F(s,0)\equiv x_0$ 的同伦 $F:[0,1]\times[0,1]\to X$，和任意 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$，在 $\widetilde{X}$ 中存在唯一具有固定起点 $\widetilde{F}(s,1)\equiv\tilde{x}_0$ 的同伦 $\widetilde{F}:[0,1]\times[0,1]\to\widetilde{X}$，使得 $\widetilde{F}$ 是 F 的一个提升，即 $p\circ\widetilde{F}=F$.

(2) 若同伦 F 是道路同伦，即还具有固定终点 $F(s,1)\equiv x_1\in X$，则 $\widetilde{F}$ 也是道路同伦，即存在 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_1)$ 使得 $\widetilde{F}(s,1)\equiv x_1$. ♡

注 3.7.11.

(1) 若 γ 是一个圈，即 $\gamma(1)=\gamma(0)$，提升后的道路 $\tilde{\gamma}$ 一般不再是圈，即 $\tilde{\gamma}(1)\neq\tilde{\gamma}(0)$. 但是由同伦提升可知，如果 γ 是道路同伦等价于常值道路的圈，则提升后的道路 $\tilde{\gamma}$ 依然是圈. 在习题中我们将给出圈提升后依然是圈的充要条件.

(2) 虽然道路同伦的提升是道路同伦，但是跟 $\tilde{x}_0$ 可以从 $p^{-1}(x_0)$ 中任选不同，只要选定了起点 $\tilde{x}_0$，则终点 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_1)$ 就已经被唯一确定下来了（这是因为道路 $F_s(\cdot)=F(s,\cdot)$ 具有唯一的提升）. 特别地，"圈的道路同伦" 的提升一般不再是 "圈的道路同伦"，而只是一般道路的道路同伦. 当然，如果是同伦于常值圈的 "圈的道路同伦"，那么提升后依然是 "圈的道路同伦" （这还是因为道路具有唯一提升）.

作为推论，我们证明

命题 3.7.12.（覆叠映射诱导基本群的单同态）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，且 $p(\tilde{x}_0)=x_0$. 则 $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 是单射. ♠

证明 设 $\tilde{\gamma}$ 是 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为基点的一个圈，且 $p_*([\tilde{\gamma}]_p)=e$，即 $\gamma:=p\circ\tilde{\gamma}$ 道路同伦于 x_0 处的常值道路 γ_{x_0}. 则由同伦提升引理，$\tilde{\gamma}$（作为 γ 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升道路）与 $\gamma_{\tilde{x}_0}$（作为 γ_{x_0} 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升道路）是道路同伦等价的，从而 $[\tilde{\gamma}]_p=e\in\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)$. □

¶ 提升的唯一性

现在我们考虑一般的提升. 事实上,即使没有引理3.7.8中的额外假设(注意引理3.7.8要求具有初始提升但不要求连通性，而此处要求 Y 连通)，一般的提升也总是唯一的:

命题 3.7.13.（提升的唯一性）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，$f:Y\to X$ 为连续映射，且 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:Y\to\widetilde{X}$ 是 f 的两个提升. 若 Y 是连通的,且存在 $y_0\in Y$ 使得 $\tilde{f}_1(y_0)=\tilde{f}_2(y_0)$，则在 Y 上有 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$. ♠

证明 对于任意 $y\in Y$, 我们取 $f(y)$ 在 X 中的开邻域 U，使得 $p^{-1}(U)$ 是无交并

$$p^{-1}(U)=\bigcup_\alpha\widetilde{U}_\alpha,$$

且使得每个

$$p_\alpha:=p|_{\widetilde{U}_\alpha}:\widetilde{U}_\alpha\to U$$

都是同胚. 在这些 U_α 中，分别记包含 $\tilde{f}_1(y)$ 和 $\tilde{f}_2(y)$ 的开集为 $\widetilde{U}_1$ 和 $\widetilde{U}_2$. 下面我们采用连通性论证说明 $\tilde{f}_1\equiv\tilde{f}_2$. 为此我们令

$$Y_0=\{y\in Y\mid\tilde{f}_1(y)=\tilde{f}_2(y)\}.$$

则我们有

- $Y_0\neq\emptyset$，因为我们有 $y_0\in Y_0$.
- Y_0 是闭集：假设 $y\notin Y_0$，即 $\tilde{f}_1(y)\neq\tilde{f}_2(y)$. 因为 $p(f_1(y))=p(f_2(y))$，所以 $\widetilde{U}_1\neq\widetilde{U}_2$，从而由无交性，$\widetilde{U}_1\cap\widetilde{U}_2=\emptyset$. 由连续性，存在一个 y 在 Y 中的开邻域 N 使得
$$\tilde{f}_1(N)\subset\widetilde{U}_1,\quad\tilde{f}_2(N)\subset\widetilde{U}_2.$$

由此可得 $N\cap Y_0=\emptyset$. 因此 Y_0^c 是开集，即 Y_0 是闭集.

- Y_0 是开集：假设 $y\in Y_0$，则 $\widetilde{U}_1\cap\widetilde{U}_2\neq\emptyset$，从而 $\widetilde{U}_1=\widetilde{U}_2$. 同理我们可以找到 y 的一个开邻域 N 使得 $f_1(N)\subset\widetilde{U}_1=\widetilde{U}_2$. 因为 p 在 $\widetilde{U}_1=\widetilde{U}_2$ 上是单射, 并且
$$p\circ\tilde{f}_1=p\circ\tilde{f}_2,$$
所以我们能推出在 N 上有 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$. 于是 $N\subset Y_0$, 从而 Y_0 是开集.

最后，由 Y 的连通性可知 $Y_0=Y$, 即在 Y 上恒有 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$. □

¶ 提升的存在性

一般提升的存在性通常更为复杂. 假设映射 f 可被提升为 $\tilde{f}$，那么我们就会有如下带标定点的提升交换图表. 特别地，由 π_1 的函子性，我们得到提升存在的必要条件
$$f_*(\pi_1(Y,y_0))=p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y,y_0)))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)).$$
反之我们证明，只要 Y 是道路连通且局部道路连通的，那么上述必要条件也是充分的：

定理 3.7.14. (提升存在性的判别准则)

设 $p:(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是一个覆叠映射，并且 $f:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 是连续的. 如果 Y 是道路连通且局部道路连通的，那么 f 可被提升[a]为 $\tilde{f}$ 当且仅当
$$f_*(\pi_1(Y,y_0))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)). \qquad (*)$$

[a]注意，此处提升为带有标定点的提升，即还要满足 $\tilde{f}(y_0)=\tilde{x}_0$.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

证明 我们已经看到 (*) 是存在提升 $\tilde{f}$ 的必要条件.

现在我们假设 (*) 成立. 为证明提升的存在性，我们任取 $y\in Y$. 由 Y 的道路连通性，存在一条 Y 中的从 y_0 到 y 的道路 γ. 于是 $f\circ\gamma$ 是一条 X 中的以 x_0 为起点的道路，从而可以被唯一提升为 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为起点的道路 $\widetilde{f\circ\gamma}$. 定义
$$\tilde{f}(y)=\widetilde{f\circ\gamma}(1).$$
下面我们证明 $\tilde{f}:Y\to\widetilde{X}$ 就是我们所求的提升. 因为由定义我们有 $\tilde{f}(y)\in p^{-1}(f(y))$, 我们仅需要验证 $\tilde{f}$ 是良定的并且是连续的.

- **[$\tilde{f}$ 是良定的]**: 设 γ' 是 Y 中从 y_0 到 y 的另一条道路. 则 $(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})=f\circ(\gamma'*\bar{\gamma})$ 是 X 中以 x_0 为基点的圈，且满足
$$[(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})]_p=f_*([\gamma'*\bar{\gamma}]_p)\in f_*(\pi_1(Y,y_0))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)).$$
因此存在一个道路同伦 $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ 连接了圈 $(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})$ 和 “X 中以 x_0 为基点某个形如 $\gamma_1=p\circ\tilde{\gamma}_1$ 的圈 γ_1”，其中 $\tilde{\gamma}_1$ 是 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为基点的一个圈. 我们可以道路同伦 F 提升成起点为 $\widetilde{F}(s,0)=\tilde{x}_0$ 的道路同伦 $\widetilde{F}:[0,1]\times[0,1]\to\widetilde{X}$. 我们有
  - $\widetilde{F}(0,t)$ 是以 $\tilde{x}_0$ 为起点的道路 $F(0,t)=(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})$ 的唯一提升. 由道路提升的唯一性，我们必然有 $\widetilde{F}(0,t)=(\widetilde{f\circ\gamma'})*(\overline{\widetilde{f\circ\gamma}})$, 其中 $\overline{\widetilde{f\circ\gamma}}$ 是道路 $\overline{f\circ\gamma}$ 的

以 $\widetilde{f\circ\gamma'}(1)$ 为起点的唯一提升.

- 同理 $\widetilde{F}(1,t)$ 是 γ_1 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的唯一提升，因此我们有 $\widetilde{F}(1,t)=\tilde{\gamma}(t)$.

因为 $\widetilde{F}$ 是道路同伦，故 $\widetilde{F}(0,1)=\widetilde{F}(1,1)$，即

$$(\widetilde{f\circ\gamma'})*(\overline{\widetilde{f\circ\gamma}})(1)=\widetilde{F}(0,1)=\widetilde{F}(1,1)=\tilde{\gamma}(1)=\tilde{x}_0.$$

由此 $(\overline{\widetilde{f\circ\gamma}})(1)=\tilde{x}_0$. 因此 $(\overline{\overline{\widetilde{f\circ\gamma}}})$ 是以 $\tilde{x}_0$ 为起点的 $f\circ\gamma$ 的提升，由道路提升的唯一性，$(\overline{\overline{\widetilde{f\circ\gamma}}})=\widetilde{f\circ\gamma}$. 从而有

$$\widetilde{f\circ\gamma}(1)=(\overline{\overline{\overline{\widetilde{f\circ\gamma}}}})(1)=(\overline{\overline{\widetilde{f\circ\gamma}}})(0)=\widetilde{f\circ\gamma'}(1).$$

- **[$\tilde{f}$ 是连续的]**: 我们首先固定一条从 y_0 到 y 的道路 γ. 取 $f(y)$ 的邻域 $U\subset X$ 以及 $\tilde{f}(y)$ 的邻域 $\widetilde{U}\subset\widetilde{X}$，使得 $p|_{\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to U$ 是一个同胚. 由 Y 的局部道路连通性, 我们可以找到一个 y 的道路连通开邻域 $V\subset f^{-1}(U)$. 对于任意 $y'\in V$, 我们令 λ 是 V 中从 y 到 y' 的一条道路. 则 $f\circ\lambda$ 是 U 中的一条从 $f(y)$ 从 $f(y')$ 的道路. 因为 $p|_{\widetilde{U}}$ 是一个同胚，$\widetilde{f\circ\lambda}=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f\circ\lambda$ 是 $f\circ\lambda$ 的以 $\tilde{f}(y)$ 为起点的唯一提升.

  因为 $\widetilde{f\circ\gamma}$ 是 $\widetilde{X}$ 中从 $\tilde{x}_0$ 到 $f(y)$ 的一条道路，道路 $(\widetilde{f\circ\gamma})*(\widetilde{f\circ\lambda})$ 是道路 $(f\circ\gamma)*(f\circ\lambda)=f\circ(\gamma*\lambda)$ 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升道路. 因为 $\gamma*\lambda$ 是 Y 中一条从 y_0 到 y' 的道路, 由 $\tilde{f}$ 的定义，我们有

$$\tilde{f}(y')=(\widetilde{f\circ\gamma})*(\widetilde{f\circ\lambda})(1)=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f\circ\lambda(1)=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f(y').$$

由此可得 $\tilde{f}(V)\subset\widetilde{U}$ 且 $\tilde{f}|_V=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f$. 因此 $\tilde{f}$ 在 V 上连续. □

¶ 应用：零伦的判定

我们给出提升存在性的一个简单应用：

命题 3.7.15.（球到圆的映射零伦）

对任意 $n\geq 2$，任意连续映射 $f:S^n\to S^1$ 是零伦的. ♠

证明 因为 $\mathrm{Im}(f_*)=\{e\}$, f 可以被提升到映射 $\tilde{f}:S^n\to\mathbb{R}$. 但是因为 $\mathbb{R}$ 是可缩的，因此 $\tilde{f}$ 是零伦的，从而 $f=p\circ\tilde{f}$ 也是零伦的. □

翻译成同伦群的语言，该命题告诉我们：对于任意 $n\geq 2$，有 $\pi_n(S^1)=\{e\}$.

¶ 在复分析中的一个应用

我们之前就已经看到指数映射

$$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

是一个覆叠映射. 现在我们尝试去定义**复对数函数**. 我们知道，对于 $0\neq z=re^{i\theta}$, 我们有一个多值函数 $\log z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$. 现在我们希望对于某些给定的子集 $U\subset\mathbb{C}^*$, 定义一个 (单值的) 复函数 $\log:U\to\mathbb{C}$，使得

$$\exp\circ\log=\mathrm{Id}.$$

核心观察：因为 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ 是覆叠映射，所以如果在 U 上存在单值的对数函数 $\log : U \to \mathbb{C}$，那么它就是嵌入映射 $\iota : U \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ 的提升映射.

根据提升存在性的判别准则：

(1) 因为 $\mathrm{Id}_*(\pi_1(\mathbb{C}^*)) \not\subset \exp_*(\pi_1(\mathbb{C}))$，故 $\mathrm{Id} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ 不能被提升，从而 log 不能被定义在 $\mathbb{C}^*$ 上.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[ur, dashed, "\nexists\log"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[ur, dashed, "\exists\log?"] \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

(2) 对数函数 $\log : U \to \mathbb{C}$ 存在当且仅当

$$i_*(\pi_1(U)) \subset \exp_*(\pi_1(\mathbb{C})) = \{e\},$$

即当且仅当 $i_*(\pi_1(U)) = \{e\}$，即 U 不包含任何环绕原点的圈. 特别地，我们看到

- 若区域 $U \subset \mathbb{C}^*$ 单连通，则 log 是良好定义的（但单连通并非必要条件）.
- 若 $i_*(\pi_1(U)) = \{e\}$，即 U 不包含任何环绕原点的圈. 则对于任意 t，函数

$$z^t = e^{t\log z}$$

是在 U 上良定的连续函数. 注意：$F(t,z) := z^t$ 不是一个在 S^1 上良定的函数，因而并不是 S^1 上的恒等映射和常值映射之间的同伦.

类似地，对于任意正整数 $d > 1$, 映射

$$p_d : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^d$$

是一个 p-重覆叠映射，而 $z \mapsto z^{1/d}$ 是在该覆叠映射下包含映射 ι 的提升：

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^* \arrow[d, "p_d(z)=z^d"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[ur, dashed, "\nexists z^{1/d}"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C}^* \arrow[d, "p_d(z)=z^d"] \\ U \arrow[ur, dashed, "\exists z^{1/d}?"] \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

于是，由

$$(p_d)_*(\pi_1(\mathbb{C}^*)) \simeq d\mathbb{Z} \not\supset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Id}_*(\pi_1(\mathbb{C}^*))$$

可知不存在定义在整个 $\mathbb{C}^*$ 上的映射 $z^{1/d}$. 事实上，重复之前的论证，易见 $z^{1/d}$ 在 $U \subset \mathbb{C}^*$ 上良定的当且仅当 U 不包含任何环绕原点的圈（因为 $i_*(\pi_1(U))$ 要么是 $\mathbb{Z}$ 要么是 $\{e\}$）.

更一般地，给定任意多项式 $f = f(z)$, 记 Z_f 是 f 的零点集. 我们可以问：

问题：能否在区域 $U \subset \mathbb{C} \setminus Z_f$ 上定义 $f^{1/d}$?

答案是：$f^{1/d}$ 在 U 上良定当且仅当

$$f_*(\pi_1(U)) \subset d\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{C}^*).$$

例如，如果 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$ 为实数，并且

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2n}),$$

那么我们可以在集合

$$U = \mathbb{C} \setminus \cup_{1\le k\le n}[a_{2k-1}, a_{2k}]$$

上定义 $\sqrt{f(z)}$，因为 U 中每条闭曲线必然环绕 f 的零点偶数次，从而 $[\gamma]_p$ (和 $f_*([\gamma]_p)$)

是一个“偶”的类. 这个事实在黎曼面 (Riemann surface) 的理论中扮演了重要角色.

3.7.3 用覆叠计算基本群

¶ 基本群与终点集

下面我们用覆叠空间的方法去研究底空间的基本群. 在第 3.5 节中我们用覆叠映射

$$p:\mathbb{R}\to S^1,\quad t\mapsto e^{2\pi it},$$

证明了 $\pi_1(S^1,1)\simeq\mathbb{Z}$, 其中 $\mathbb{Z}$ 实际上是所有 $\tilde{\gamma}_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto nt$ 的终点，换言之，作为集合，$\mathbb{Z}=p^{-1}(1)$. 一般情况下，我们有

命题 3.7.16. (基本群与终点集)

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 为一个覆叠映射，$\tilde{x}_0\in\widetilde{X}$ 且 $x_0=p(\tilde{x}_0)$. 我们定义**提升对应**

$$\alpha:\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0),\qquad \alpha([\gamma]):=\tilde{\gamma}(1)\ \in p^{-1}(x_0)$$

其中 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的满足条件 $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{x}_0$ 的唯一提升. 则

(1) $\alpha:\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0)$ 是良定的.

(2) 如果 $\widetilde{X}$ 是道路连通的，那么 α 是满射.

(3) 如果 $\widetilde{X}$ 是单连通的，那么 α 是双射. [a]

[a] 注：这可以告诉我们基本群这个集合有多“大”，但并没有告诉我们群结构.

证明

(1) 因为 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的提升，$p(\tilde{\gamma}(1))=\gamma(1)=x_0$. 因此

$$\tilde{\gamma}(1)\in p^{-1}(x_0).$$

现在假设 $\gamma'\in[\gamma]_p$, 即 $\gamma'\underset{p}{\sim}\gamma$. 由道路提升引理，$\gamma'$ 可被唯一提升为具有起点 $\tilde{x}_0$ 的道路 $\tilde{\gamma}'$. 由同伦提升引理，$\tilde{\gamma}'$ 与 $\tilde{\gamma}$ 是道路同伦的，从而 $\tilde{\gamma}'(1)=\tilde{\gamma}(1)$. 因此映射 α 是良定的.

(2) 设 $\widetilde{X}$ 是道路连通的. 对于任意 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$, 令 λ 为 $\widetilde{X}$ 中从 $\tilde{x}_0$ 到 $\tilde{x}_1$ 的道路，则 $\gamma=p\circ\lambda:I\to X$ 是一个以 x_0 为基点的圈，从而 $[\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$. 由道路提升的唯一性，$\gamma$ 的满足 $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{x}_0$ 的提升 $\tilde{\gamma}$ 必然是道路 λ. 由此可得

$$\alpha([\gamma]_p)=\tilde{\gamma}(1)=\lambda(1)=\tilde{x}_1.$$

因此 α 是满射.

(3) 最后设 $\widetilde{X}$ 单连通，γ,γ' 都是以 x_0 为基点的圈并且

$$\alpha([\gamma]_p)=\alpha([\gamma']_p).$$

也就是说，若 $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\gamma}'$ 分别是 γ 和 γ' 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升，那么 $\tilde{\gamma}(1)=\tilde{\gamma}'(1)$. 于是 $\tilde{\gamma}*\overline{\tilde{\gamma}'}$ 是 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为基点的圈. 因为 $\widetilde{X}$ 是单连通的，我们有

$$\tilde{\gamma}*\overline{\tilde{\gamma}'}\underset{p}{\sim}c_{\tilde{x}_0}.$$

故

$$\gamma * \overline{\gamma'} = p(\tilde{\gamma} * \overline{\tilde{\gamma}'}) \underset{p}{\sim} p(c_{\tilde{x}_0}) = c_{x_0}.$$

因此我们得到 $[\gamma]_p = [\gamma']_p \in \pi_1(X, x_0)$, 即 α 是单射.

□

注 3.7.17. 更一般地，在 $\widetilde{X}$ 不是单连通时，可以证明：$\pi_1(X, x_0)$ 的子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ 的指标是 $|p^{-1}(x_0)|$. 换句话说，存在一个 $\pi_1(X, x_0)$ 中 $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ 的陪集到纤维 $p^{-1}(x_0)$ 之间的双射.

¶ 在万有覆叠空间上的群作用 $\rightsquigarrow$ 基本群

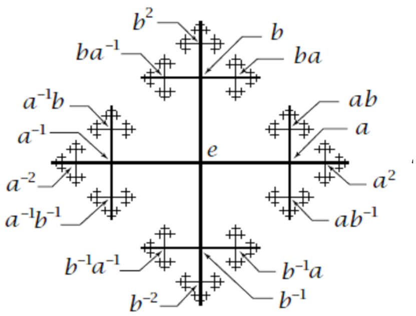
因为单连通的覆叠空间非常重要，我们定义

定义 3.7.18.（万有覆叠空间）

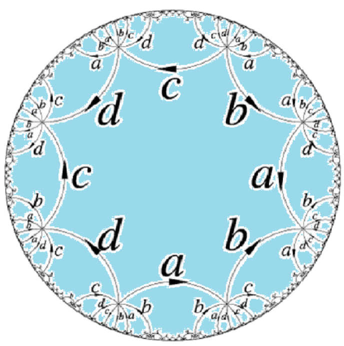
如果 $\widetilde{X}$ 是 X 的覆叠空间，且 $\widetilde{X}$ 是单连通的，则我们称 $\widetilde{X}$ 是 X 的**万有覆叠空间**（universal covering space）. ♣

例 3.7.19.

- $\mathbb{R}$ 是 S^1 的一个万有覆叠，而 S^1 并不是.
- S^2 是 S^2 的一个万有覆叠, $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{T}^2$ 的一个万有覆叠，单位圆盘 D 是 $\Sigma_2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ 的一个万有覆叠 (如下所示)[16].
- S^n 是 $\mathbb{RP}^n$ $(n \geq 2)$ 的一个万有覆叠. S^3 是 $L(p;q)$ 的一个万有覆叠. $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的一个万有覆叠[17].
- $S^1 \vee S^1$ 的万有覆叠是 $\langle a, b \rangle$ 的 Cayley 图，如下所示. [18]



The universal covering of $S^1 \vee S^1$



The universal covering of $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$

¶ 在万有覆叠空间上的群作用 $\rightsquigarrow$ 基本群

如果 $\widetilde{X}$ 是 X 的万有覆叠, 那么作为集合，我们有

$$\pi_1(X, x_0) = p^{-1}(x_0).$$

[16] 根据**单值化定理**, D 是所有 Σ_n 的万有覆叠，其中 $n \geq 2$.

[17] 一般地，**旋量群** $Spin(n)$ 是 $SO(n)$ 的一个万有覆叠，其中 $n \geq 3$.

[18] 一般地，由 n 个生成元生成的自由群的 Cayley 图是 $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ 的一个万有覆叠.

这里没有给出 $\pi_1(X,x_0)$ 的群结构，因为我们在 $p^{-1}(x_0)$ 上没有群结构. 然而，如果覆叠映射是由某个群作用给出的商映射，那么我们将会有一个群结构：

命题 3.7.20.（群作用与基本群的群结构）

设群 G 在 $\widetilde{X}$ 上的作用是纯不连续的，从而 $p:\widetilde{X}\to X=\widetilde{X}/G$ 为覆叠映射，则

(1) 对于任意 $x_0\in X=\widetilde{X}/G$ 以及 $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$，存在一个群同态

$$\beta:\pi_1(X,x_0)\to G.$$

(2) 如果 $\widetilde{X}$ 是道路连通的，那么 β 是满射，.

(3) 如果 $\widetilde{X}$ 是单连通的，那么 β 是双射.

证明 令 $\alpha:\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0)$ 为由 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ 确定的提升对应. 由 (★) 和定义，对于任意 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$, 存在唯一元素 $g\in G$ 使得 $g\cdot\tilde{x}_0=\tilde{x}_1$. 记

$$\rho:p^{-1}(x_0)\to G,\ \tilde{x}_1\mapsto g,$$

于是我们得到一个映射

$$\beta=\rho\circ\alpha:\pi_1(X,x_0)\to G,\qquad [\gamma]\stackrel{\alpha}{\longmapsto}\tilde{\gamma}(1)=\tilde{x}_1\stackrel{\rho}{\longmapsto}g\in G$$

因为 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)\stackrel{\rho}{\longleftrightarrow}g\in G$ 是双射，从命题3.7.16中得到 (2) 和 (3).

现在我们证明 β 是一个群同态. 为此我们令 $g_1=\beta([\gamma_1]_p),g_2=\beta([\gamma_2]_p)$，即

$$g_1\cdot\widetilde{x}_0=\widetilde{\gamma}_1(1),\qquad g_2\cdot\widetilde{x}_0=\widetilde{\gamma}_2(1).$$

则 $g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2$ 是 $\widetilde{X}$ 中从 $g_1\cdot\widetilde{x}_0=\widetilde{\gamma}_1(1)$ 到 $g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2(1)=g_1g_2\cdot\widetilde{x}_0$ 的一条道路. 由道路提升唯一性可知 $\widetilde{\gamma}_1*(g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2)$ 是 $\widetilde{X}$ 中 $\gamma_1*\gamma_2$ 的以 x_0 为起点的提升, 即

$$\widetilde{\gamma_1*\gamma_2}=\widetilde{\gamma}_1*(g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2).$$

于是 $\widetilde{\gamma_1*\gamma_2}(1)=g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2(1)=g_1g_2\cdot\widetilde{x}_0$. 从而由定义我们得到

$$\beta([\gamma_1]_p\cdot[\gamma_2]_p)=\beta([\gamma_1*\gamma_2]_p)=\rho((\widetilde{\gamma_1*\gamma_2})(1))=g_1g_2=\beta([\gamma_1]_p)\beta([\gamma_2]_p),$$

从而完成了证明. □

作为推论，我们立刻得到

推论 3.7.21

- $\pi_1(\mathbb{RP}^n)\simeq\mathbb{Z}_2$.
- $\pi_1(L(p;q))\simeq\mathbb{Z}_p$.

有了这些基本群，我们马上得到

推论 3.7.22.（更多的零伦）

任意从 $\mathbb{RP}^2$ 或者 $L(p;q)$ $(p>1)$ 映到 S^1 的连续映射都是零伦的.

证明 因为从 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_p$ 到 $\mathbb{Z}$ 的群同态一定是平凡同态，故我们有 $\mathrm{Im}(f_*)=\{e\}$，从而可以被提升为到 $\mathbb{R}$ 的映射 $\widetilde{f}$. 因为 $\mathbb{R}$ 可缩，所以 $\widetilde{f}$ 是零伦映射，于是 $f=p\circ\widetilde{f}$ 也零伦. □