3.8 覆叠空间的分类

3.8.1 万有覆叠

设 $p:(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是覆叠映射. 由命题3.7.11, 我们知道 $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 是单同态. 因此 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0))$ 同构于 $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)$. 在本节中我们将建立 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群与 X 的覆叠空间之间的 (反序) 一一对应. 我们先从 $\pi_1(X,x_0)$ 中最小的子群即 $\{e\}$ 开始. 由定义3.7.18, 若 X 的覆叠空间 $\widetilde{X}$ 满足 $\pi_1(\widetilde{X})\simeq\{e\}$, 则我们称 $\widetilde{X}$ 是 X 的**万有覆叠**. 我们首先证明（在适当的条件下）万有覆叠空间的存在性, 最终我们会发现它确实是 X 的 "最大" 的覆叠空间.

¶ 万有覆叠的存在性

给定拓扑空间 X, 我们想要构造它的万有覆叠空间. 然而, 并非每个空间都有万有覆叠空间. 事实上, 若 $p:\widetilde{X}\to X$ 是一个万有覆叠, 则对于任意 $x\in X$, 存在 x 的邻域 U 和 $\widetilde{X}$ 中一个开集 $\widetilde{U}$ 使得 $p|_{\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to U$ 是一个同胚. 于是 U 每个圈 γ 能够通过映射 $(p|_{\widetilde{U}})^{-1}$ 被提升成 $\widetilde{U}$ 中的一个圈 $\tilde{\gamma}$. 因为 $\pi_1(\widetilde{X})=\{e\}$, 提升的圈 $\tilde{\gamma}$ 在 $\widetilde{X}$ 中是零伦的. 复合上投影映射 p 后, 我们发现 γ 必然是 X 中的零伦圈. 于是我们得到存在万有覆叠的必要条件:

对于任意 x, 存在 x 的一个邻域 U 使得 U 中的任意圈在 X 中都是零伦的.

用基本群的语言来说, 该条件意味着包含映射 $i:U\hookrightarrow X$ 诱导的群同态 $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ 是平凡同态, 即 $i_*(\pi_1(U,x))=\{e\}$. (粗略地讲, 这表明 X 不能有任意小的 "洞" .) 我们把满足该条件的拓扑空间称为半局部单连通空间: [19]

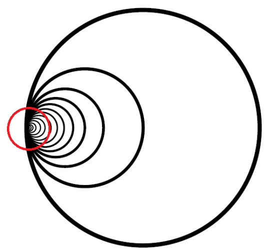
定义 3.8.1. (半局部单连通) 若对于任意 $x\in X$, 存在 x 的邻域 U 使得包含映射 $i:U\hookrightarrow X$ 的诱导同态 i_* 满足

$$i_*(\pi_1(U,x))=\{e\},$$

则我们称 X 是**半局部单连通空间** (semi-locally simply connected space). ♣

于是由上述讨论知, 拓扑空间 X 具有万有覆叠的必要条件是它是半局部单连通的. 注意如果 $i_*(\pi_1(U,x))=\{e\}$ 而 $x\in V\subset U$, 则我们自动有 $i_*(\pi_1(V,x))=\{e\}$.

例 3.8.2. 我们在习题 1.4 中见过的**夏威夷耳环** (Hawaii earing)X 是如图所示的一族越来越小的圆所构成的空间. 它是道路连通且局部道路连通的, 但是不是半局部单连通的, 因此它不存在万有覆叠. 另一方面, 夏威夷耳环的锥空间 $C(X)$ 是可缩的, 因此是半局部单连通的, 但却不是局部单连通的.



[19] 照例, 如果对于 X 中任意点 x 的任意邻域 V, 都存在 x 的邻域 $U\subset V$, 使得 U 是单连通的, 则我们称 X 是**局部单连通的** (locally simply connected). 这个条件比半局部单连通强, 因为它要求 U 中的任意圈在 U 中是零伦的, 而半局部单连通则只要求 U 中的任意圈在 X 中是零伦的.

下面我们证明半局部单连通条件也是充分的：

定理 3.8.3.（万有覆叠的存在性）

假设 X 是道路连通且局部道路连通的，那么 X 存在万有覆叠 $\widetilde{X}$ 当且仅当 X 是半局部单连通的.

思路. 如何从 S^1 出发构造拓扑空间 $\mathbb{R}$? 在 S^1 中固定起点 $x_0=1$，在 $\mathbb{R}$ 中固定起点 $\tilde{x}_0=0$. 则 $\mathbb{R}$ 中任意一点都是 S^1 中一条道路的提升道路的终点，且两条提升道路具有相同终点当且仅当它们投影到 S^1 的道路是道路同伦的. 因此 $\mathbb{R}$ 中的点与 S^1 上的道路同伦类是一一对应的！

那么，如何在道路同伦类空间上定义拓扑呢？一种备选是取道路空间上的紧开拓扑，然后取同伦类空间上的商拓扑. 但是为了我们的目的即得到覆叠（局部同胚），我们采取另一种更为直接的方法：先证明“局部上”商映射是双射，然后选定 S^1 的一组由“很小的开集”组成的拓扑基，并将这些集合的“提升”定义为道路同伦类空间的开集，用它们在道路同伦类空间生成一个拓扑基. 这就是我们所需要的.

证明 我们已经看到半局部单连通是必要条件. 下面证明充分性.

第零步. 术语：基本开集.

为简单起见，若 U 是 X 中的道路连通开集，且 $i_*(\pi_1(U,x))=\{e\}$，则我们称 U 是 X 中的基本开集. 注意任意 $x\in X$ 都有邻域是基本开集：由半局部单连通性，存在 x 的邻域 V 使得 $i_*(\pi_1(V,x))=\{e\}$. 再由局部道路连通性，存在 x 的更小的邻域 $U\subset V$ 使得 U 是道路连通的. 于是 U 就是 x 的一个基本开邻域.

第一步. 构造集合 $\widetilde{X}$.

设 X 道路连通，局部道路连通且半局部单连通，$x_0\in X$. 我们定义

$$\widetilde{X}=\{[\gamma]_p \mid \gamma \text{ 是以} x_0 \text{ 为起点的一条} X \text{ 中的道路}\}.$$

考虑投影映射

$$p:\widetilde{X}\to X,\quad [\gamma]_p\to\gamma(1).$$

因为 X 道路连通，所以 p 是满射.

第二步. p 是“局部”双射.

对于任意起点 $\gamma(0)=x_0$ 的道路 $\gamma:[0,1]\to X$, 令 $U\subset X$ 为 $\gamma(1)$ 的一个基本开邻域. 考虑

$$U_{[\gamma]_p}=\{[\gamma*\lambda]_p \mid \lambda \text{ 是 } U \text{ 中满足} \lambda(0)=\gamma(1) \text{ 的一条道路}\}\subset\widetilde{X}.$$

注意 $U_{[\gamma]_p}$ 是良定的，即仅依赖于集合 U 跟道路同伦类 $[\gamma]_p$，而不依赖于同伦类中道路 γ 的选取. 我们有

(a) 如果 $[\gamma']_p\in U_{[\gamma]_p}$，那么 $U_{[\gamma]_p}=U_{[\gamma']_p}$.

原因：设 $[\gamma']_p=[\gamma*\lambda]_p$, 则 $U_{[\gamma']_p}$ 中的元素都形如 $[\gamma*\lambda*\lambda']_p$, 从而在 $U_{[\gamma]_p}$ 中. 同理 $U_{[\gamma]_p}$ 中的元素都形如 $[\gamma*\lambda']_p=[\gamma*\lambda*\bar{\lambda}*\lambda']_p$, 从而也在 $U_{[\gamma']_p}$ 中.

(b) 映射 $p_{U,[\gamma]_p} = p|_{U_{[\gamma]_p}} : U_{[\gamma]_p} \to U$ 是双射.

原因：因为 U 是道路连通的，所以 $p_{U,[\gamma]_p}(U_{[\gamma]_p}) = U$，即 $p_{U,[\gamma]_p}$ 是满射. 下证它是单射. 若 $p_{U,[\gamma]_p}([\gamma*\lambda_1]_p) = p_{U,[\gamma]_p}([\gamma*\lambda_2]_p) = x$，则 λ_1 和 λ_2 都是 U 中从 $\gamma(1)$ 到 x 道路，于是 $\overline{\lambda_1}*\lambda_2$ 是 U 中的圈，从而在 X 中是零伦的，于是 $[\gamma*\lambda_1]_p = [\gamma*\lambda_1*\overline{\lambda_1}*\lambda_2]_p = [\gamma*\lambda_2]_p$. 即 $p_{U,[\gamma]_p}$ 是单射.

第三步. 在 $\widetilde{X}$ 上定义拓扑.

为了在 $\widetilde{X}$ 上定义一个拓扑，我们首先考虑 X 中的开集族

$$\mathcal{U} = \{U \subset X \mid U \text{ 是基本开集.}\}$$

则 $\mathcal{U}$ 是 X 的拓扑的一个拓扑基：由命题1.4.10，只需验证“对于 X 中任意开集 V 以及 $x \in V$，存在 x 的基本开邻域 U 使得 $x \in U \subset V$”. 为此，我们只要取 x 的任意一个基本开邻域 V_1，然后取 U 为 $V_1 \cap V$ 的包含 x 的道路连通分支即可.

断言： 集族

$$\widetilde{\mathcal{U}} := \{U_{[\gamma]_p} \mid U \in \mathcal{U}, \gamma \text{ 是} X \text{ 中一条从} x_0 \text{ 到} U \text{中某点的道路}\}$$

构成了 $\widetilde{X}$ 上的一个拓扑基.

原因：显然这些集合之并是 $\widetilde{X}$. 现在假设 $[\gamma'']_p \in U_{[\gamma]_p} \cap V_{[\gamma']_p}$，则 $\gamma''(1) \in U \cap V$. 因为 $\mathcal{U}$ 是 X 上的一组拓扑基，存在集合 $W \in \mathcal{U}$ 使得 $\gamma''(1) \in W \subset U \cap V$. 根据第二步的 (a), 我们有 $U_{[\gamma]_p} = U_{[\gamma'']_p}$ 和 $V_{[\gamma']_p} = V_{[\gamma'']_p}$. 由此可得

$$[\gamma'']_p \in W_{[\gamma'']_p} \subset U_{[\gamma'']_p} \cap V_{[\gamma'']_p} = U_{[\gamma]_p} \cap V_{[\gamma']_p}.$$

第四步. p 是一个覆叠映射.

我们在第二步已经看到了 $p_{U,[\gamma]_p} : U_{[\gamma]_p} \to U$ 是双射. 进一步的，对于任意基本开集 $V \subset U$，以及任意满足 $\gamma'(1) \in V$ 的道路同伦类 $[\gamma']_p \in U_{[\gamma]_p}$，我们有 $V_{[\gamma']_p} \subset U_{[\gamma]_p}$，且 $p_{U,[\gamma]_p}|_{V_{[\gamma']_p}} = p_{V_{[\gamma']_p}}$，于是 $p_{U,[\gamma]_p}$ 同样也给出了从 $V_{[\gamma']_p} \subset U_{[\gamma]_p}$ 到 V 的双射. 由此可知，关于第三步所构造的拓扑，$p_{U,[\gamma]_p} : U_{[\gamma]_p} \to U$ 是一个同胚.

因为 p 在每个开集 $U_{[\gamma]_p}$ 上是连续的, 所以 $p : \widetilde{X} \to X$ 是连续的. 又因为对于任意 $U \in \mathcal{U}$，$p^{-1}(U) = \bigcup_{[\gamma]_p} U_{[\gamma]_p}$, 且由第二步的结论 (a)，该并集是无交并，故 p 是覆叠映射

第五步. $\widetilde{X}$ 是道路连通的.

我们取常值道路类 $[\gamma_{x_0}]_p$ 作为 $\widetilde{X}$ 中的基点. 对于任意起点 $\gamma(0) = x_0$ 的道路 $\gamma : [0,1] \to X$，我们令 $\gamma_t(s) = \gamma(st)$, 则 γ_t 是起点为 x_0 的道路，从而我们得到一个映射

$$f : [0,1] \to \widetilde{X}, \qquad f(t) := [\gamma_t]_p.$$

下证 f 是 $\widetilde{X}$ 中一条连接 $[\gamma_{x_0}]_p$ 和 $[\gamma]_p$ 的道路，从而 $\widetilde{X}$ 是道路连通的. 为此我们只要证明

断言： f 是连续的.

原因：任取 $U_{[\gamma']_p}$. 设 $f(t_0) \in U_{[\gamma']_p}$，即 $[\gamma_{t_0}]_p \in U_{[\gamma']_p}$，则存在 U 中起点为 $\gamma'(1)$ 而终点为 $\gamma_{t_0}(1)$ 的道路 λ，使得 $[\gamma_{t_0}]_p = [\gamma'*\lambda]_p$. 由 γ 的连续性，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\gamma(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset U$. 对于任意 $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$，令 λ_t 为沿着 γ 从 $\gamma(t_0)$ 到 $\gamma(t)$ 的道路，则由 U 是基本开集可知 $[\gamma_t]_p = [\gamma_{t_0}*\lambda_t]_p = [\gamma'*\lambda*\lambda_t]$，即对于任意 $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ 都有 $f(t) \in U_{[\gamma']_p}$. 这就证明了 f 的连续性.

第六步. $\widetilde{X}$ 是单连通的.

设 $f:[0,1]\to\widetilde{X}$ 是基点为常值道路同伦类 $[\gamma_{x_0}]_p$ 的任意圈，则 $p\circ f$ 是 X 中基点为 x_0 的一个圈. 我们想要证明 f 是零伦的. 注意到 p_* 是单同态，故只需证明 $[p\circ f]_p=p_*([f]_p)=e$. 为此，我们在 $\widetilde{X}$ 中找一条连接 $[\gamma_{x_0}]_p$ 和 $[p\circ f]_p$ 的道路：令

$$\mu_t:[0,1]\to X \qquad \mu_t(s):=p\circ f(st).$$

则 μ_t 为 X 中起点为 x_0 的道路，且 $\mu_1=p\circ f$. 由第五步的断言，

$$g:[0,1]\to\widetilde{X}, \qquad g(t):=[\mu_t]_p$$

是连续映射，从而是 $\widetilde{X}$ 中一条从 $[\gamma_{x_0}]_p$ 到 $[p\circ f]_p$ 的道路. 我们有

$$p(g(t))=p([\mu_t]_g)=\mu_t(1)=p\circ f(t),$$

即道路 g 是圈 $p\circ f$ 在 $\widetilde{X}$ 中以 $[\gamma_{x_0}]_p$ 为起点的提升. 另一方面，根据定义，f 也是 $p\circ f$ 的以 $[\gamma_{x_0}]_p$ 为起点的提升. 由道路提升的唯一性，我们有 $g(t)=f(t)$. 于是我们得到

$$[p\circ f]_p=[\mu_1]_p=g(1)=f(1)=[\gamma_{x_0}]_p=e\in\pi_1(X,x_0).$$

因此 $p\circ f$ 是零伦的，从而 $\widetilde{X}$ 是单连通的. □

3.8.2 覆叠空间的分类

在构造了万有覆叠空间以后，下面我们建立 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群和 X 的覆叠空间之间的一一反序对应. 该理论被称为覆叠空间的 Galois 理论，因为它跟代数中所学的域论中的Galois 理论的基本定理有很大的相似性：

- Galois 理论的基本定理：对于给定的域 k 及其有限 Galois 扩张 E/k，在介于 k 与 E 的中间域扩张 F 与 Galois 群 $Gal(E/k)$ 的子群之间有一一反序对应.
- 覆叠空间的 Galois 理论：对于道路连通，局部道路连通且半局部单连通空间 X，在 X 的覆叠空间与基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群之间有一一反序对应.

¶ 具有一般基本群的覆叠空间的存在性

首先我们证明对于 $\pi_1(X,x_0)$ 的任意子群 H，存在一个以 H 为基本群的覆叠空间：

定理 3.8.4. （一般覆叠空间的存在性）

设 X 是道路连通，局部道路连通且半局部单连通空间. 则对于 $\pi_1(X,x_0)$ 的任意子群 H, 存在 X 的覆叠空间 $p:\widetilde{X}_H\to X$ 和基点 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ 使得

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}_H,\tilde{x}_0))=H.$$

♡

证明 给定 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群 H，我们在所构造的 X 的万有覆叠空间 $\widetilde{X}$ 中定义等价关系

$$[\gamma]_p\underset{H}{\sim}[\gamma']_p\iff\gamma(1)=\gamma'(1)\text{ 且}[\gamma*\bar{\gamma'}]_p\in H.$$

因为 H 是一个子群，不难验证这是一个等价关系. 我们定义 $\widetilde{X}_H$ 为商空间

$$\widetilde{X}_H=\widetilde{X}/\underset{H}{\sim},$$

并且令 $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X}_H$ 为包含 $[\gamma_{x_0}]_p$ 的等价类. 只需要验证

- 由 $[\gamma]_p \mapsto \gamma(1)$ 诱导的自然投射 $p : \widetilde{X}_H \to X$ 是一个覆叠映射.

  原因：假设 $[\gamma]_p \underset{H}{\sim} [\gamma']_p$, 并且假设 $U \subset X$ 是 $\gamma(1)$ 的基本开邻域. 则对于 U 中任意满足 $\lambda(0) = \gamma(1)$ 的道路 λ, $\lambda * \bar{\lambda}$ 在 X 中是零伦的，从而

  $$[\gamma * \lambda * \overline{\gamma' * \lambda}]_p = [\gamma * \lambda * \bar{\lambda} * \overline{\gamma'}]_p = [\gamma * \overline{\gamma'}]_p \in H,$$

  即 $[\gamma * \lambda]_p \underset{H}{\sim} [\gamma' * \lambda]_p$. 换言之，邻域 $U_{[\gamma]_p}$ 和 $U_{[\gamma']_p}$ 在 $\widetilde{X}_H$ 中是相同的. 因此由 $\widetilde{X}$ 是 X 的一个覆叠空间可知 p 是一个覆叠映射.

- $p_*(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)) = H$.

  原因：令 γ 为 X 中以 x_0 为基点的一个圈. 根据定理3.8.3证明的第六步，γ 在 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0 = [\gamma_{x_0}]_p$ 为起点的提升道路 $\tilde{\gamma}$ 的终点是 $[\gamma]_p$. 因此这个提升的道路 $\tilde{\gamma}$ 在商映射 $\widetilde{X} \to \widetilde{X}_H$ 下的像 $\tilde{\gamma}_H$ 是 $\widetilde{X}_H$ 中的圈当且仅当 $[\gamma]_p \underset{H}{\sim} [\gamma_{x_0}]_p$, 即当且仅当 $[\gamma]_p \in H$. 另一方面，$\tilde{\gamma}_H$ 恰好是 γ 在 $\widetilde{X}_H$ 中的提升，从而由习题 3.7，$\tilde{\gamma}_H$ 是圈当且仅当 $[\gamma]_p \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0))$. 于是结论得证.

□

¶ 覆叠空间的同构

在证明了子群 $H \subset \pi_1(X, x_0)$ 与 X 的覆叠空间之间的对应的存在性后，接下来我们研究这种对应的唯一性. 我们需要如下定义以区分 X 上不同的覆叠空间.

定义 3.8.5.（覆叠空间同构）

设 $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ 和 $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ 是 X 上的两个覆叠空间. 如果存在一个同胚 $h : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ 使得

$$p_1 = p_2 \circ h,$$

则我们称这两个覆叠空间是**同构的**（isomorphic），并称映射 h 为一个**覆叠空间同构**（covering space isomorphism）. ♣

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "h", "\simeq"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

注 3.8.6.

(1) 不难验证同构关系是 X 上所有覆叠空间所构成的集合上的等价关系.

(2) 设 $p : \widetilde{X} \to X$ 为一个覆叠空间，则

$$\mathrm{Aut}(p) := \{h : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \mid h\text{是一个覆叠空间的同构}\}$$

在映射的复合下构成了一个群.

定义 3.8.7.（覆叠变换群）

我们称群 $\mathrm{Aut}(p)$ 为覆叠映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 的**覆叠变换群** (covering transformation group). [该群也被称为该覆叠的 **Deck 变换群**或 **Galois 群**.] ♣

对于任意纤维 $p^{-1}(x)$，根据定义覆叠变换群 $\mathrm{Aut}(p)$ 的每个元素都给出了 $p^{-1}(x)$ 中元素的一个置换. 注意由道路提升的唯一性，只要 $h \in \mathrm{Aut}(p)$ 不是恒等映射（且 $\widetilde{X}$ 道路连通），则该置换没有不动点.

现在假设 $h : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ 是一个 X 上覆叠空间的同构. 那么对于任意 $x_0 \in X$, h 是一个从集合 $p_1^{-1}(x_0)$ 到集合 $p_2^{-1}(x_0)$ 之间的一一映射. 特别地，如果我们选取 $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ 并且令 $\tilde{x}_2 = h(\tilde{x}_1) \in p_2^{-1}(x_0)$, 则如下“带标定点的图表”交换：

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \arrow[rr, "h", "\simeq"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

即 $p_2 \circ h = p_1, p_1 \circ h^{-1} = p_2$. 对这两个等式应用基本群的函子性，我们得到

$$(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)).$$

这给出了同一个拓扑空间 X 上两个覆叠空间之间存在（保基点）同构的必要条件：同构的覆叠空间对应于 $\pi_1(X, x_0)$ 中相同的子群.

¶ 覆叠空间的唯一性

下面我们证明在同构的意义下，具有给定基本群的覆叠空间是唯一的：

命题 3.8.8.（覆叠空间的唯一性）

设 X 是道路连通且局部道路连通的拓扑空间，那么 X 的两个道路连通的覆叠空间 $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ 和 $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ 之间存在保基点的覆叠空间同构 $h : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ 当且仅当

$$(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)).$$

♠

证明 刚才已经证明了必要性，下证充分性，即如果条件成立，那么存在一个覆叠空间的同构 $h : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. 由提升存在性的判别准则，我们可以将 p_1 提升为一个连续映射 $\tilde{p}_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$，使得

$$p_1 = p_2 \circ \tilde{p}_1.$$

类似地，我们将 p_2 提升为连续映射 $\tilde{p}_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)$，使得

$$p_2 = p_1 \circ \tilde{p}_2.$$

由提升的唯一性，我们得到

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_2} \quad 且 \quad \tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_1}.$$

因此 $\tilde{p}_1$ 就是我们所寻找的覆叠同构. □

特别地，我们得到：对于任意道路连通，局部道路连通且半局部单连通空间，其万有覆叠空间在同构的意义下是唯一的.

¶ 覆叠空间的分类

结合定理3.8.4和命题3.8.8，我们得到

定理 3.8.9.（带基点覆叠空间的分类定理）

设 X 为道路连通，局部道路连通且半局部单连通拓扑空间. 那么对应关系

$$(\widetilde{X},\tilde{x}_0) \quad \leftrightsquigarrow \quad p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)).$$

给出了集合

$$\{道路连通覆叠空间\ p:(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)\ 在保基点同构下的同构类\}$$

与集合

$$\{\pi_1(X,x_0)\ 的子群\}$$

之间的一个一一对应，且该对应是反序的，即如果 $p_1:(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(X,x_0)$ 和 $p_2:(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)\to(X,x_0)$ 是 X 的两个道路连通覆叠空间，则

$$(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1))\subset(p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2))$$

当且仅当存在一个覆叠映射 $p_3:(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ 使得 $p_1=p_2\circ p_3$. ♡

我们还可以忽略对应中的基点，此时我们有

定理 3.8.10.（无基点的覆叠空间分类定理）

设 X 是道路连通，局部道路连通且半局部单连通的拓扑空间. 那么集合

$$\{道路连通覆叠空间\ p:\widetilde{X}\to X\ 的同构类\}$$

和集合

$$\{\pi_1(X,x_0)\ 的子群的共轭类\}$$

之间存在一一对应. ♡

证明 由习题 3.7，对于一个覆叠空间 $p:(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$, 如果我们将基点从 $\tilde{x}_0$ 变为 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$, 两个子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0))$ 和 $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_1))$ 是彼此共轭的.

另一方面，假设我们给定任意子群 $H=p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0))$ 和任意 $H'=g^{-1}Hg$, 其中 $g=[\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$. 我们令 $\tilde{\gamma}$ 为 γ 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升，并且记 $\tilde{x}_1=\tilde{\gamma}(1)\in p^{-1}(x_0)$, 则不难证明 $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_1))=g^{-1}Hg$. □

作为覆叠空间分类定理的推论，我们可以说明为什么万有覆叠空间是“万有”的:

推论 3.8.11.（万有覆叠的万有性）

如果 $\widehat{X}$ 是 X 的一个万有覆叠空间，并且 $\widetilde{X}$ 是 X 的任意覆叠空间，那么 $\widehat{X}$ 是 $\widetilde{X}$ 的（万有）覆叠空间. ♡

¶ 在代数中的应用：Nielsen-Schreier 定理

应用覆叠空间理论及图的基本群的结论，可以给出如下代数定理的简单拓扑证明:

定理 3.8.12.（Nielsen-Schreier 定理）

自由群的任意子群都是自由群. ♡

证明 [概要] 设 F 是自由群，而 H 是它的一个子群. 取一个线性图 G 使得 $\pi_1(G) \simeq F$. 可以验证 G 道路连通，局部道路连通且半局部单连通. 因此存在覆叠空间 $p : \widetilde{G} \to G$ 使得 $\pi_1(\widetilde{G}, \widetilde{e}) \simeq H$. 但 $\widetilde{G}$ 也是线性图，故 $\pi_1(\widetilde{G})$ 是自由群.（参见 Munkres 的书 §83 和 §84.）□

¶ 应用：寻找所有的覆叠空间

由分类定理，我们可以通过基本群得到一个拓扑空间的所有覆叠空间.

例 3.8.13. 因为

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{e, a\} \oplus \{e, b\}$$

的子群为

$$\{e\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, ab\}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

所以 $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m$ 全部的覆叠空间是：

$$S^n \times S^m, \quad \mathbb{RP}^n \times S^m, \quad S^n \times \mathbb{RP}^m, \quad \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m, \quad S^n \times S^m/(v, w) \sim (-v, -w).$$