

4.2 Jordan 曲线定理

4.2.1 弧和 Jordan 曲线

¶ 弧和 Jordan 曲线

最简单的 1 维紧流形是 S^1 , 最简单的 1 维紧带边流形是 $[0, 1]$.

定义 4.2.1. (弧与 Jordan 曲线)

- (1) 我们称同胚于 $[0, 1]$ 的拓扑空间为**简单弧** (simple arc) 或 **Jordan 弧** (Jordan arc).
- (2) 我们称同胚于 S^1 的拓扑空间为**简单闭曲线** (simple closed curve) 或 **Jordan 曲线** (Jordan curve).



定义中“简单”表示无自交. 注意弧(arc)、曲线(curve)和道路(path)、圈(loop)的区别: 弧、曲线是几何对象(点集), 而道路、圈是分析对象(映射).

我们主要研究 $\mathbb{R}^2$ 或 S^2 (或曲面)中的弧和曲线. 我们从三个简单的观察开始:

命题 4.2.2. (补集的连通分支)

设 γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单弧或简单闭曲线. 那么

- (1) $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 恰好有一个无界连通分支.
- (2) $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 的连通分支就是 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 中的道路连通分支.
- (3) 对于 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 的任意连通分支 A , 我们有 $\partial A \subset \gamma$.



证明 (1) 因为 γ 是紧的, 所以存在 $R > 0$ 使得 $\gamma \subset B(0, R)$. 于是连通集 $B(0, R)^c \subset \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$.

(2) 因为 γ 是紧的, 它必然是闭的, 从而 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集. 由命题 3.2.7, 它的连通分支都是道路连通的.

(3) 如果 $x \notin \gamma$, 那么 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, 从而存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon)$ 包含于 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 的一个连通分支. 因此 x 不在 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 的任何一个连通分支的边界上. 特别地, $x \notin \partial A$. $\square$

¶ 弧不分割性质

一般地, 对于一个连通拓扑空间 X 以及子空间 A , 如果 $X \setminus A$ 是不连通的, 则我们称 A **分割** X (A separates X). 我们首先证明平面上的简单弧无法分割平面:

定理 4.2.3. (弧不分割定理)

对于任意简单弧 $C \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 是连通的.



证明 设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 为简单弧. 假设 $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 是不连通的. 根据命题 4.2.2(1), $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 至少有一个有界连通分支 A . 取任意 $x_0 \in A$. 取 $r > 0$ 充分大使得 $C \subset B(x_0, r)$.

事实. 存在一个收缩映射 $f: \overline{B(x_0, r)} \rightarrow C$.

原因: 根据简单弧的定义, 存在一个同胚 $\varphi: [0, 1] \rightarrow C$. 考虑映射 $\varphi^{-1}: C \rightarrow [0, 1]$. 根据 Tietze 扩张定理, 存在连续映射 $g: \overline{B(x_0, r)} \rightarrow [0, 1]$ 使得

在 C 上有 $g = \varphi^{-1}$. 现在令 f 为复合映射

$$f = \varphi \circ g : \overline{B(x_0, r)} \xrightarrow{g} [0, 1] \xrightarrow{\varphi} C.$$

那么 f 是连续的, 并且在 $C \subset \overline{B(x_0, r)}$ 上有 $f = \text{Id}$.

注意到由 r 的选取方式, $A \subset B(x_0, r)$. 我们通过以下方式定义 $h : \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \overline{B(x_0, r)}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A}, \\ x, & x \in A^c \cap \overline{B(x_0, r)}. \end{cases}$$

则 h 在 $\overline{A}$ 和 $A^c \cap \overline{B(x_0, r)}$ 上都是连续的. 由命题 4.2.2(3), 交集

$$\overline{A} \cap (A^c \cap \overline{B(x_0, r)}) = \partial A \cap \overline{B(x_0, r)} = \partial A$$

是 C 的一个子集. 因此 $x \in \partial A \cap \overline{B(x_0, r)}$ 时 $f(x) = x$, 于是 h 在 $\overline{B(x_0, r)}$ 上连续. 此外,

$$x_0 \notin h(\overline{A}) \quad \text{且} \quad x_0 \notin h(A^c \cap \overline{B(x_0, r)}) = A^c \cap \overline{B(x_0, r)}.$$

因此 h 事实上是一个映到 $\overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}$ 的连续映射

$$h : \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}.$$

将 h 与标准的收缩映射

$$h_1 : \overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\} \rightarrow \partial B(x_0, r), \quad x \mapsto x_0 + r \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$$

复合, 我们得到一个连续映射

$$\tilde{h} = h_1 \circ h : \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \partial B(x_0, r).$$

因为当 $x \in \partial B(x_0, r)$ 时 $h(x) = x$, 所以此时 $\tilde{h}(x) = x$, 即 $\tilde{h}$ 是一个收缩映射, 矛盾. $\square$

通过类似的论证, 可以证明上述定理的高维版本:

定理 4.2.4. (收缩核不分割定理)

设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集并且是 $\mathbb{R}^n$ 的一个收缩核. 那么 $\mathbb{R}^n \setminus K$ 是连通集.



作为推论, 我们可以把命题 4.2.2(3) 改进为⁵

命题 4.2.5. (补集连通分支的边界)

设 γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单弧或简单闭曲线, 且 A 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 的一个连通分支, 则 $\partial A = \gamma$.



证明 先设 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 是连通的, 即 $A = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. 因为 γ 同胚于 $[0, 1]$ 或 S^1 , 所以作为 $\mathbb{R}^2$ 的子集它没有内点. 于是 $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, 从而 $\partial A = \overline{A} \cap A^c = \gamma$.

再设 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 是不连通的, 并设 B 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 的另一个连通分支. 此时 $\gamma = J$ 必然是 Jordan 曲线. 由命题 4.2.2(3), 我们有 $\partial A \subset J$. 如果假设 $\partial A \neq J$, 那么存在 $a \in J \setminus \partial A$. 由此可得

$$a \notin A \cup \partial A = \overline{A}.$$

⁵在证明命题 4.2.2(3) 时我们只用了 γ 是闭集这一点, 从而该结论对任意闭集都成立. 但是命题 4.2.5 的结论对于更复杂的集合是不成立的: 例如图形 “A”.

因此存在一个开集 $U \ni a$ 使得 $U \cap A = \emptyset$. 因为 $J \simeq S^1, a \in J, \partial A \subset J$, 所以 ∂A 落在包含于 J 内的某条弧 C 中 (这条弧能通过切掉 $J \cap U$ 中包含 a 的一小段弧得到).

由弧不分割定理, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 是连通的. 所以对于任意 $x \in A, y \in B$, 存在一条 $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 中从 x 到 y 的道路 β . 于是 $\beta \cap C = \emptyset$. 但这是不可能的, 因为如果我们令 $t_0 \in [0, 1]$ 为最小的使得 $\beta(t) \in A^c$ 的数, 那么 $\beta(t_0) \in \overline{A} \cap A^c = \partial A \subset C$. $\square$

4.2.2 Jordan 曲线定理

¶ Jordan 曲线

虽然根据定义, Jordan 曲线是“简单”的, 但几何上它可能非常不简单. 我们已经在引言中看到过这样的例子. 以下有一个更复杂的例子:



这是一条 Jordan 曲线, 最早由美国数学家 W. Osgood 发现, 因此被称为 Osgood 曲线, 它具有正测度. [注意, Peano 曲线不是 Jordan 曲线.]

尽管存在各种复杂的 Jordan 曲线, Jordan 曲线在下述意义下依然是简单的:⁶

定理 4.2.6. (Jordan 曲线定理)

对于任意 Jordan 曲线 $J \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 恰好有两个连通分支, 并且每个连通分支的边界都是 J .



¶ Poincare-Miranda 定理和它的推论

因为 Jordan 曲线定理在低维拓扑以及复分析中非常重要, 人们先后给出了很多不同的证明. 我们采用 R. Maehara 在 1984 年给出的证明. 我们需要 Brouwer 不动点定理的一个等价形式, Poincare-Miranda 定理, 见习题 4.1:

⁶B. Bolzano 最早明确陈述了这个定理, 并指出它并非是不证自明的, 而是需要一个证明. 在 1893 年, C. Jordan 首次给出了证明. 一些数学家认为他的这个证明不够完备, 因为他假设了该定理对于简单多边形成立 (但这个情形并不难证明). 因此, 不少数学家认为第一个给出完备证明的是美国数学家 O. Veblen (1905).

定理 4.2.7. (Poincare-Miranda 定理)

设 $f = (f_1, \dots, f_n) : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续的. 若对于任意 $1 \leq i \leq n$, 我们有

$$f_i \leq 0 \quad \text{在} \quad \{x \in [0, 1]^n \mid x_i = 0\},$$

$$f_i \geq 0 \quad \text{在} \quad \{x \in [0, 1]^n \mid x_i = 1\}.$$

则存在 $p \in [0, 1]^n$ 使得 $f(p) = 0$.



作为推论, 我们证明

引理 4.2.8. (关键引理)

设

$$h(t) = (h_1(t), h_2(t)) \quad \text{和} \quad v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

是 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的两条连续道路, 满足

$$h_1(0) = 0, h_1(1) = 1, v_2(0) = 0, v_2(1) = 1.$$

那么这两条道路相交, 即存在 $s, t \in [0, 1]$ 使得 $h(s) = v(t)$.



证明 考虑映射 $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(s, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t)) := (h_1(s) - v_1(t), v_2(t) - h_2(s)).$$

我们有

$$\text{当 } s = 0 \text{ 时, } f_1 \leq 0, \quad \text{当 } s = 1 \text{ 时, } f_1 \geq 0,$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时, } f_2 \leq 0, \quad \text{当 } t = 1 \text{ 时, } f_2 \geq 0.$$

由 Poincaré-Miranda 定理, 存在 $(s, t) \in [0, 1]^2$ 使得 $f(s, t) = 0$, 即

$$h_1(s) = v_1(t) \quad \text{和} \quad h_2(s) = v_2(t).$$

□

¶ Jordan 曲线定理的证明

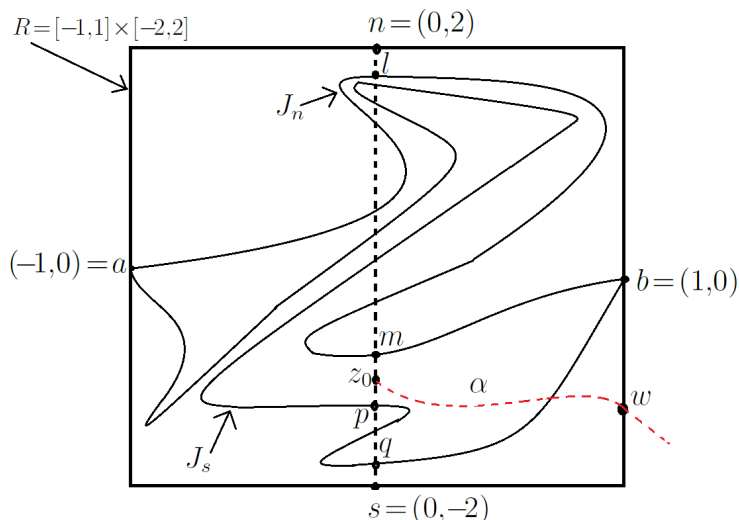
下面我们证明 Jordan 曲线定理: 根据命题 4.2.2(1), $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 恰好有一个无界连通分支. 因此我们需要找到一个有界连通分支并证明它是唯一的.

第一步. 曲线 J 的两段弧.

因为 J 是紧致的, 存在 $a, b \in J$ 使得

$$d(a, b) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in J\} = \text{diam}(J).$$

不失一般性, 我们可以假设 $a = (-1, 0), b = (1, 0)$. 记 $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$, 那么 $J \subset R$ 且 $J \cap \partial R = \{a, b\}$. 记 $n = (0, 2), s = (0, -2)$.



由引理4.2.8, $\overline{ns} \cap J \neq \emptyset$. 因为 $\overline{ns} \cap J$ 是紧致的, 在 $\overline{ns} \cap J$ 存在唯一具有最大 y -坐标的点, 记为 l . 点 a, b 将 J 分为两段弧. 记 J_n 为包含 l 的弧, J_s 为另一条弧. 令 $m \in \overline{ns} \cap J_n$ 为 $\overline{ns} \cap J_n$ 中使得 y -坐标最小的点. (它可以与 l 相同).

断言: $\overline{ms} \cap J_s \neq \emptyset$.

事实上, 如果 $\overline{ms} \cap J_s = \emptyset$, 那么

$$(\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{ms}) \cap J_s = \emptyset,$$

这与关键引理矛盾.

令 p, q 分别为 $\overline{ms} \cap J_s$ 中使得 y -坐标最大和 y -坐标最小的点 (其存在性由紧性保证).

第二步. $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 至少有两个连通分支.

令 z_0 为 m 和 p 的中点, 并且令 U 为 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 中包含 z_0 的连通分支. 我们要证明 U 是一个有界连通分支. 假设结论不成立, 即 U 是 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 中唯一的无界连通分支. 那么存在一条道路 $\alpha \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$, 连接了 z_0 到 R 以外的某点. 令 w 为道路 α 与 ∂R 首次相交的点, 并且将道路 α 中从 z_0 到 w 的部分记为 α_w (其位于 R 中). 注意到 $w \neq a, b$, 因为 $\alpha \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$.

情形 1: w 位于 ∂R 的下半段.

如果我们将 ∂R 中从 w 到 s , 既不包含 a 也不包含 b 的道路记为 $\widehat{ws}$, 那么

$$(\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mz_0} + \alpha_w + \widehat{ws}) \cap J_s = \emptyset,$$

这与关键引理矛盾.

情形 2: w 位于 ∂R 的上半段. 那么

$$(\widehat{nw} + \alpha_w + \overline{z_0s}) \cap J_n = \emptyset,$$

再次导致矛盾.

因此 U 必然是 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 的有界连通分支.

第三步. $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 恰好有两个连通分支.

假设 U 是包含 z_0 的有界连通分支. 如果 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 还有另一个有界连通分支 $\widetilde{U}$, 我们记

$$\beta = \overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mp} + \widehat{pq} + \overline{qs},$$

则 $\beta \cap \widetilde{U} = \emptyset$. 因为 $a, b \notin \beta$, 由 β 的紧性, 存在小圆盘 $V_a \ni a, V_b \ni b$ 使得

$$V_a \cap \beta = V_b \cap \beta = \emptyset.$$

由命题 4.2.5, $a, b \in \partial \widetilde{U} \subset \widetilde{U}$, 因此存在 $a_1 \in V_a \cap \widetilde{U}$ 和 $b_1 \in V_b \cap \widetilde{U}$. 因为 $\widetilde{U}$ 是连通的, 所以可以找到连接 a_1 和 b_1 的道路 $\gamma \subset \widetilde{U}$. 于是我们得到

$$(\overline{aa_1} + \gamma + \overline{b_1b}) \cap \beta = \emptyset,$$

这与关键引理矛盾. 从而我们完成了定理的证明.

¶ 一些注记

注 4.2.9.

- (1) 我们可以将 $\mathbb{R}^2$ 视作 $S^2 - \{pt\}$. 从而 $\mathbb{R}^2$ 的一条 Jordan 曲线也是 S^2 的一条 Jordan 曲线. 在这个框架下我们有:

定理 4.2.10. (S^2 的 Jordan 曲线定理)

S^2 中任意 Jordan 曲线将 S^2 分为两部分, 每个部分都以 J 为边界.



事实上, Jordan 曲线定理可以被加强为:

定理 4.2.11. (Jordan-Schoenflies 定理)

对于 S^2 中的任意 Jordan 曲线 J , 存在一个同胚 $\rho: S^2 \rightarrow S^2$ 使得 $\rho(J)$ 为 S^2 中的赤道 (从而 $S^2 \setminus J$ 的每个连通分支是可缩的).



对于 $\mathbb{R}^2$ 中的 Jordan 曲线 J , Jordan-Schoenflies 定理告诉我们 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 的有界连通分支同胚于圆盘 D , 而 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 的无界连通分支同胚于 $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

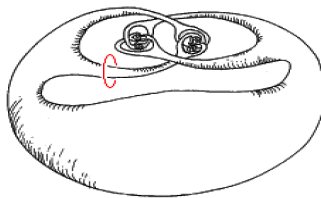
- (2) 1911 年 Brouwer 将 Jordan 曲线定理推广至高维:

定理 4.2.12. (Jordan-Brouwer 分割定理)

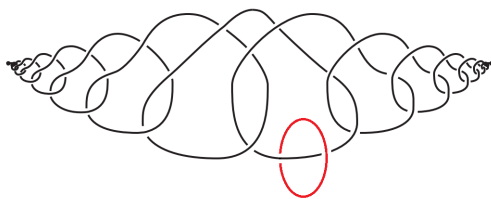
假设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 并且 $X \simeq S^{n-1}$, 那么 $\mathbb{R}^n \setminus X$ 恰好有两个连通分支, 其中一个是有界的, 另一个是无界的, 并且 X 是它们公共的边界.



不过, Jordan-Schoenflies 定理在高维情况不成立. 一个著名的反例是 Alexander 角球.



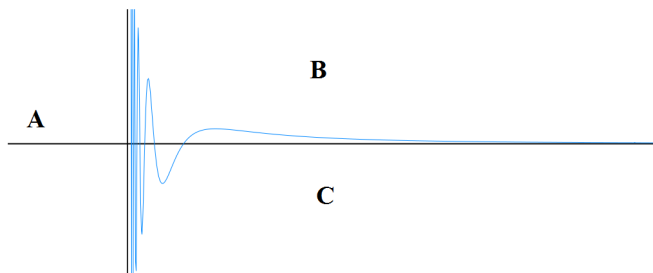
下面是一个类似的 (反) 例. 我们知道如果我们移除 $\mathbb{R}^3$ 中一条线段, 剩余部分是单连通的. 但是如果我们移走 $\mathbb{R}^3$ 中一条弧, 同样的结论可能不成立, 虽然弧是同胚于 $[0, 1]$ 的. 例如, $\mathbb{R}^3$ 中如下所示的弧的补集不是单连通的:



(3) $\mathbb{R}^2$ 中“非紧的曲线”即 $\mathbb{R}$ 在同胚映射下的像集可能会更复杂. 例如, 考虑“曲线”

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (e^t, e^{-t} \sin(e^{-t}))$$

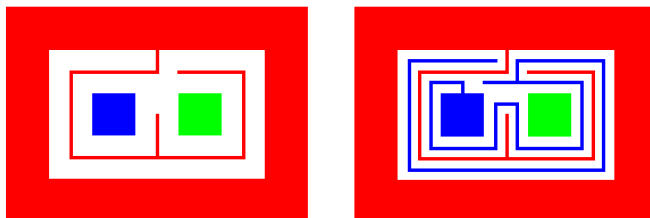
则 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 仅有一个连通分支, 但是有三个道路连通分支.



(4) 平面几何甚至会更加复杂. 例如, 存在三个 (甚至更多) 开集 $U_1, U_2, U_3 \subset \mathbb{R}^2$, 使得

- U_1, U_2, U_3 是不相交的;
- U_1, U_2, U_3 是连通开集;
- $\partial U_1 = \partial U_2 = \partial U_3$ (因此边界不可能是一条 Jordan 曲线)

这样的集合被称作**和田湖** (Wada lake), 最早由日本数学家和田健雄 (Takeo Wada) 发现并由他的学生米山国藏 (Kunizo Yoneyama) 于 1917 年发表. 后来人们发现这样的结构很“自然地”出现在动力系统理论之中.



每个人都知道什么是曲线, 直到他学习了足够多的数学,
于是在层出不穷的例外情况里迷惘彷徨.

— F. 克莱因