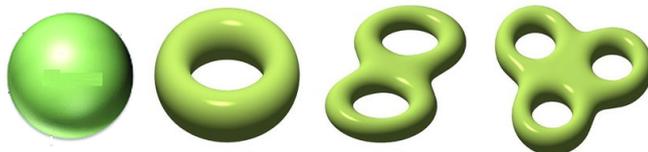


## 4.4 紧曲面及其分类

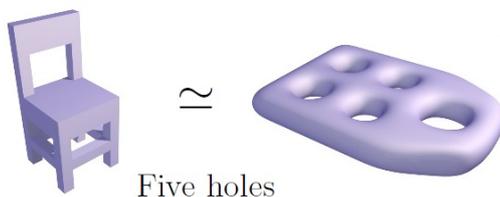
### 4.4.1 曲面和多边形表示

#### ¶ 曲面的多样性

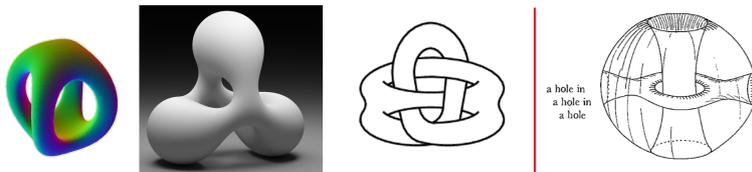
在引言中提到，任意(可定向)无边紧曲面一定同胚于某个  $\Sigma_g$ ，例如



不过，同一个曲面嵌入  $\mathbb{R}^3$  后可能看起来很不一样，例如下面两个曲面都是  $\Sigma_5$ ：

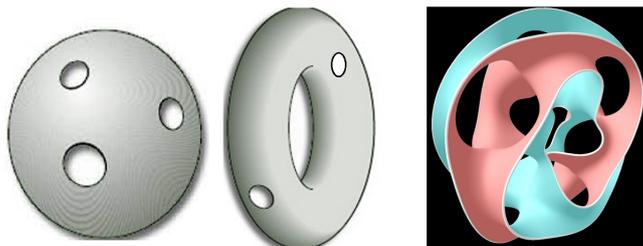


还有很多看起来更复杂的例子(每个都与某个  $\Sigma_g$  同胚)：

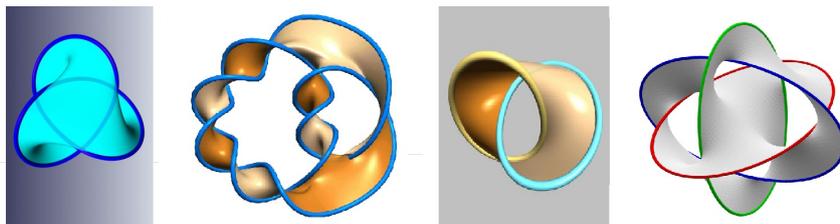


你能数清上面每个曲面的“洞”的数量吗？

我们还可以研究带边紧曲面<sup>12</sup>：



注意任何带边紧曲面的边界都必然是一个无边的紧 1 维流形，即要么是一个圆（当嵌入到  $\mathbb{R}^3$  时就是一个纽结），要么是有限个圆的无交并（当嵌入到  $\mathbb{R}^3$  时就是一个链环）。反之，任给  $\mathbb{R}^3$  中纽结  $K$  或者链环  $L$ ，可以找到  $\mathbb{R}^3$  中的定向曲面  $S$ ，其边界恰好是  $K$  或  $L$ 。这样的曲面被称作 **Seifert 曲面**。



<sup>12</sup>在本书中，我们不考虑非紧曲面及其分类。

此外, 还有很多不可定向的紧曲面 (带边或不带边), 例如



## ¶ 曲面的连通和

连通和是曲面间的一种重要“运算”. 通过使用连通和运算, 我们可以构造更多更复杂的曲面. 事实上, 我们将要证明: 所有复杂的紧曲面在拓扑上都是简单曲面的连通和.

我们回忆一下连通和的定义:

设  $M_1, M_2$  都是  $n$  维连通流形<sup>13</sup>. 从  $M_1, M_2$  中各去掉一个小球  $B_1, B_2$ , 然后通过某个同胚映射  $f: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$  粘合两个小球的边界球面, 使它们“粘接在一起”, 所得的商拓扑空间称为  $M_1$  与  $M_2$  的连通和, 即

$$M_1 \# M_2 = (M_1 - B_1) \cup_f (M_2 - B_2).$$

这个定义颇有些“语焉不详”之处: 所取小球的位置是否会影响连通和? 小球的取法与粘接方式  $f$  是否会影响连通和?

- 不难看出, 在假定流形连通 (从而道路连通) 的情况下, 小球所在的位置不会影响所得的连通和, 因为我们可以找到一条连接“球心”的简单折线道路, 然后构建它的一个“管状”邻域, 并在该邻域里将小球从一个点附近“滑到”另一个点附近.
- 但是, 小球的取法与粘接方式  $f$  确实有可能会影响所得的连通和:
  - 首先, 我们需要取“充分好且充分小”的小球<sup>14</sup>, 即“局部平坦嵌入球” (locally flat embedded ball).
    - 对于曲面而言, 由 Jordan-Schoenflies 定理, 不会有坏圆盘, 且两个拓扑圆盘之间是一个拓扑圆环, 所以挖掉任意充分小的圆盘都可以.
    - 对于高维流形, 还需要用到拓扑学中一个看似简单但实际上很非平凡的结果, 即所谓的**圆环定理** (Annulus theorem), 该定理的  $n \geq 5$  维情形是 1969 年 Kirby 证明的, 而最难的 4 维情形直到 1982 年才由 Quinn 解决.
  - 其次, 对于一般的  $n$  维流形而言, 连通和确实依赖于粘接方式, 一个经典的例子就是复射影平面  $\mathbb{C}P^2$  和它自身做连通和, 可以给出两种不同的连通和:  $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$  和  $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$  (它们不仅不同胚, 甚至不同伦等价).

<sup>13</sup>不难发现, 如果  $M_1$  或  $M_2$  不连通, 则连通和所得到的结果强烈依赖于做连通和的位置, 且此时连通和本质上只跟做连通和的位置所在的连通分支有关.

<sup>14</sup>这意味着我们希望把小球  $B$  取在某个欧氏邻域里, 且使得  $\partial B$  有一个同胚于  $\partial B \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  的邻域. 特别地, 我们不能取像 Alexander 角球那样的“坏球”.

不过好在情况也没有特别复杂：可以证明，本质上只有两种可能的粘接  $\partial B$  的方法，即“保持定向进行粘接”和“翻转定向粘接”。

于是，一般  $n$  维连通流形之间连通和的良好性跟流形的定向性（后文我们会讨论曲面的定向）有关，且已经超出了本书的范围，我们仅仅列举一下相关结论：

- (1) 若  $M_1$  或  $M_2$  是不可定向的  $n$  维连通流形，则  $M_1 \# M_2$  是良定的。（原因：对于不可定向流形，可以找到一条简单折线闭道路，使得小球沿着闭路一圈后，其边界定向被翻转了）
- (2) 若  $M_1$  或  $M_2$  都是可定向流形，则在规范粘接方式后，总可以定义“定向连通和”。
  - (a). 若  $M_1, M_2$  是可定向的，且其中至少有一个有“翻转定向的同胚”，则  $M_1 \# M_2$  是良定的，即不依赖于粘接的方式（因为可以通过该“翻转定向的同胚”给出两种不同粘接方式所得流形之间的同胚）。
  - (b). 若  $M_1, M_2$  是可定向的，且二者均不存在“翻转定向的同胚”，则可能有至多两个不同的连通和  $M_1 \# M_2$ 。

而对我们而言，一个好消息是：任何定向曲面都存在“翻转定向的同胚”。于是根据上面的结论，我们得到

**命题 4.4.1. (曲面“连通和”是良定的)**

无论所涉及到的曲面是否可定向，两个连通曲面之间的“连通和”总是良定的!

此外，根据定义，球面是连通和运算的“零元”，即对于任意曲面  $M$ ,

$$S^2 \# M \simeq M.$$

此外，连通和运算显然还是“交换”和“结合”的，即对于任意曲面  $M_1, M_2, M_3$ ，我们有

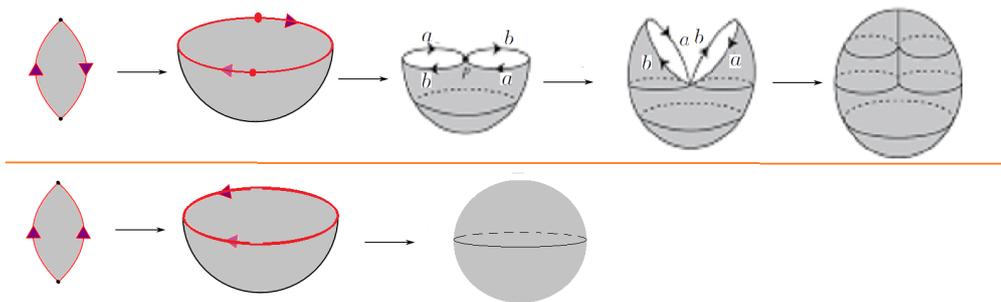
$$M_1 \# M_2 \simeq M_2 \# M_1$$

以及

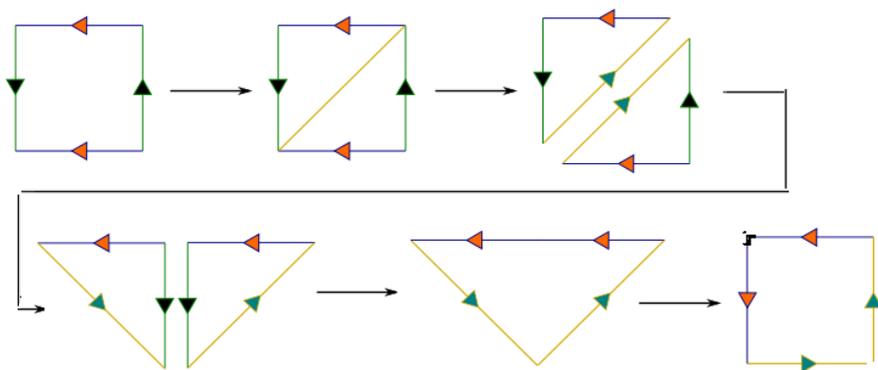
$$(M_1 \# M_2) \# M_3 = M_1 \# (M_2 \# M_3).$$

## ¶ 曲面的多边形表示

在第 1.4 节，我们介绍过一种非常有用的方式以构造和理解曲面，即商空间的方法。事实上，对于任意紧曲面，我们总可以从某个平面多边形开始，通过某些特定的方式“粘合”边界，得到该紧曲面。例如，我们在第 1.4 节已经看到了如何通过以不同方式粘合矩形的边界得到圆柱，Möbius 带，环面和 Klein 瓶，以及如何粘合一个八边形的边界得到一个 2-洞环面。我们甚至可以从“两角形”开始得到  $\mathbb{RP}^2$  或  $S^2$ ：

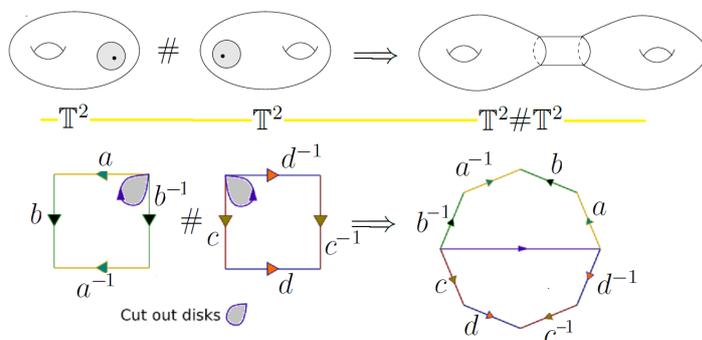


当然，曲面的多边形表示不是唯一的. 例如以下都是 Klein 瓶的多边形表示：



### ¶ 连通和的多边形表示

如果我们有曲面的多边形表示，那么可以轻易的得到它们连通和的多边形表示. 下图展示了如何从  $T^2$  的多边形表示中得到 2-洞环面  $\Sigma_2 = T^2 \# T^2$  的多边形表示：



同样的构造方法在一般情况也有效. 于是我们得到

#### 命题 4.4.2. (连通和的多边形表示)

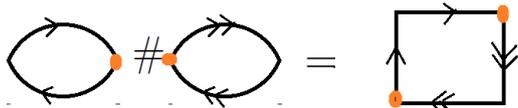
设  $X, Y$  是紧曲面，则  $X \# Y$  的多边形表示可以通过将  $X$  的多边形表示和  $Y$  的多边形表示中各“打开一个顶点，再将它们连接成一个多边形”而得到.

利用这个方法，我们证明：

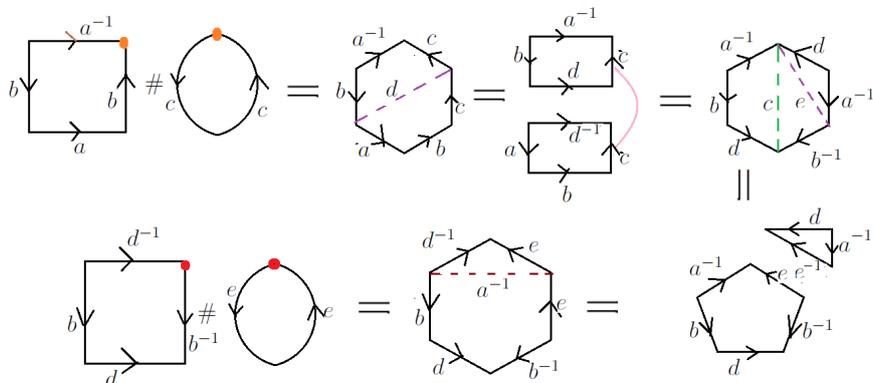
#### 推论 4.4.3

- (1)  $RP^2 \# RP^2 \simeq$  Klein 瓶.
- (2)  $RP^2 \# RP^2 \# RP^2 \simeq T^2 \# RP^2$ .

证明 (1)



(2)



□

注 4.4.4. 特别地, “连通和” 没有消去律, 因为

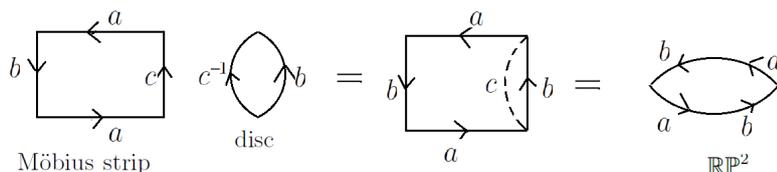
$$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \simeq \text{Klein 瓶} \not\cong T^2.$$

另一方面, 由归纳我们得到

$$\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{2n+1} \simeq \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_n \# \mathbb{R}P^2.$$

### ¶ 沿着边界圆粘合带边曲面

我们也可以多边形表示来研究带边曲面, 例如, 我们从 Möbius 带和圆盘开始. 因为它们的边界都是  $S^1$ , 我们可以将它们沿着  $S^1$  粘合. (注意: 我们不是在做连通和, 而仅仅是粘合边界. 所以我们小心地将 Möbius 带的边界圆分成两段, 分别标记为  $b$  和  $c$ , 并且将对应的圆盘的边界两段也同样标记为  $b$  和  $c$ , 以表明如何粘合它们.)



因此我们得到:

#### 推论 4.4.5

$\mathbb{R}P^2$  可以通过将 Möbius 带和圆盘沿着边界粘合得到.



也就是说,  $\mathbb{R}P^2$  中挖去一个小圆盘得到的“交叉帽”空间跟 Möbius 带同胚. 类似地, 可以证明: 沿着边界粘合两条 Möbius 带, 会得到 Klein 瓶! 于是我们有

#### 推论 4.4.6. (嵌入 Möbius 带)

Möbius 带可以被嵌入  $\mathbb{R}P^2$  以及 Klein 瓶.



## 4.4.2 曲面的组合拓扑

## ¶ 单形与单纯复形

我们已经看到了多边形表示在研究曲面中十分有用. 一个自然的问题是: 是否任意(紧)曲面都有一个多边形表示? 答案是肯定的. 为了说明这一点, 我们先介绍组合拓扑中的两个概念: 单形和单纯复形.

## 定义 4.4.7. (单形)

(1) 考虑点集  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ . 如果向量集

$$\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0\}$$

线性无关, 则我们称  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  为在**一般位置的** (in general position).

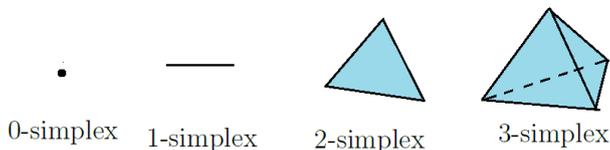
(2) 若点集  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  是在一般位置的, 则我们称它的凸包为一个  $m$ -**维单形** 或  $m$ -**单形** ( $m$ -simplex), 并且被记之为  $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$ , 即

$$\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^m a_i x_i \mid 0 \leq a_i \leq 1, \sum_{i=0}^m a_i = 1 \right\}.$$

(3) 对于任意  $m$ -单形  $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$  和任意指标集

$$\{\tau(0), \dots, \tau(k)\} \subset \{0, 1, \dots, m\},$$

我们称  $k$ -单形  $\langle x_{\tau(0)}, \dots, x_{\tau(k)} \rangle$  为  $\sigma$  的一个  $k$ -**维面** (face).



## 定义 4.4.8. (单纯复形)

设  $K$  是一个由  $\mathbb{R}^n$  中一些单形组成的集合, 记  $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ . 如果

(1)  $\sigma \in K \implies \sigma$  的任意一个面都在  $K$  中.

(2)  $\sigma_1, \sigma_2 \in K \implies$  要么  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ , 要么  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  是  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的一个公共面.

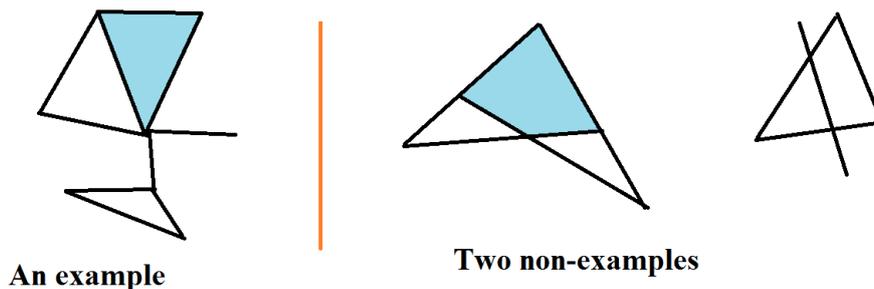
(3) 对于任意  $x \in |K|$ , 存在开集  $U \ni x$  使得  $U$  仅与有限多个  $\sigma \in K$  相交.

则我们称  $K$  为一个**单纯复形** (simplicial complex), 且称  $|K|$  为其**承载空间** (underlying space).

“注意  $K$  不是  $\mathbb{R}^n$  的子集 (因为作为集合,  $K$  的元素不是点而是单形), 但  $|K|$  是  $\mathbb{R}^n$  的子集.”



下面是单纯复形和非单纯复形的例子:



如果单纯复形  $K$  中所包含的单形的维数最高是  $m$  维的, 则我们称  $K$  为  $m$  维单纯复形. 例如, 1 维单纯复形就是 (可被嵌入到欧氏空间的) 图 (graph), 它的边为 1-单形而顶点为 0-单形.

#### 定义 4.4.9. (细分)

(1) 设  $K, K'$  都是单纯复形. 如果

(a).  $|K| = |K'|$ .

(b). 对于任意  $\sigma' \in K'$ , 存在  $\sigma \in K$ , 使得  $\sigma' \subset \sigma$ .

则我们称单纯复形  $K'$  是  $K$  的一个**细分** (subdivision).

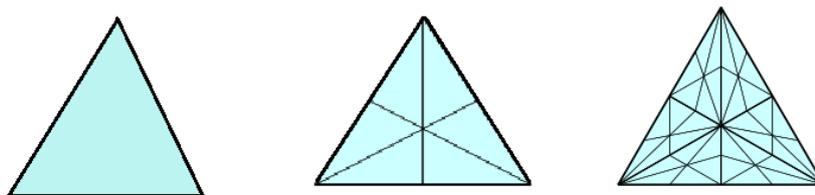
(2) 设  $K, L$  为两个单纯复形. 若存在细分  $K', L'$  以及双射  $f: |K'| \rightarrow |L'|$  使得

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle \in K' \iff \langle f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m) \rangle \in L',$$

则我们称  $K, L$  是**等价的** (equivalent).



对于单纯复形, 有一种很有用的细分方法, 叫做重心重分 (barycenter subdivision): 对于  $K$  中的每个单形, 添加其重心, 并将每个  $m$ -单形分为  $(m+1)!$  个较小的  $m$ -单形. 以下是对一个 2-单形连续进行两次重心重分的过程:



对于任意单形  $\sigma$ , 我们记  $K_\sigma$  为由  $\sigma$  及其所有的面组成的复形. 注意根据定义, 我们有: 如果  $K'$  是  $K$  的细分, 则对于任意  $\sigma \in K$ ,

$$K'_\sigma := \{\sigma' \in K' \mid \sigma' \subset \sigma\}$$

是  $K_\sigma$  的一个细分.

### ¶ 紧曲面的三角剖分

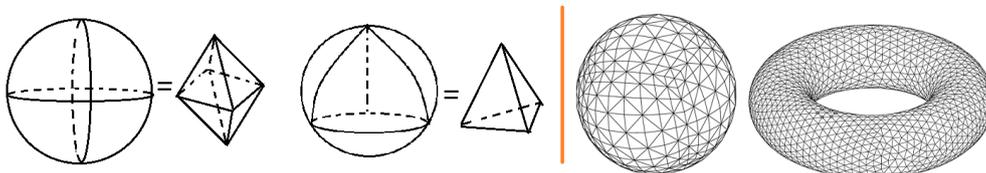
有了单纯复形的概念, 我们就可以定义

**定义 4.4.10. (三角剖分)**

设  $M$  为一个曲面. 如果存在单纯复形  $K$  以及同胚映射  $\varphi: |K| \rightarrow M$ , 则我们称  $K$  为  $M$  的一个三角剖分 (triangulation).



以下是一些简单和不简单的三角剖分:



设单纯复形  $K$  是紧连通曲面  $M$  的一个三角剖分. 根据定义以及连通性, 我们容易得到

- (a)  $K$  是由一些三角形 (2-单形) 和它的所有顶点 (0-单形)、边 (1-单形) 所组成【即: 不存在不是 2-单形的面的 0-单形和 1-单形】.
- (b)  $K$  中任意两个三角形的交集只能是一条公共边或一个公共顶点.
- (c) 任意两个顶点可由一串首尾相接的边连接.

事实上, 曲面的三角剖分还有如下特性 (证明留作习题):

**命题 4.4.11. (曲面三角剖分的特性)**

设  $K$  是紧无边曲面  $M$  的三角剖分, 那么

- (1)  $K$  中的任意 1-单形 (边) 都恰好是两个 2-单形 (三角形) 的边,
- (2) 对于  $K$  中任意 0-单形 (顶点)  $v$ , 包含  $v$  的 2-单形 (三角形) 可以“循环”排成一圈  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1} = \sigma_1$ , 使得对于任意  $1 \leq i \leq k$ ,  $\sigma_i$  与  $\sigma_{i+1}$  的交集是它们的一条公共边.

反之, 任意满足 (a),(b),(c),(1),(2)【或 (1'),(2')】的有限单纯复形  $K$ , 其承载空间  $|K|$  都是一个紧连通拓扑曲面.



如果  $K$  是紧带边曲面  $S$  的三角剖分, 类似的结论也成立:

**命题 4.4.12. (带边曲面三角剖分的特性)**

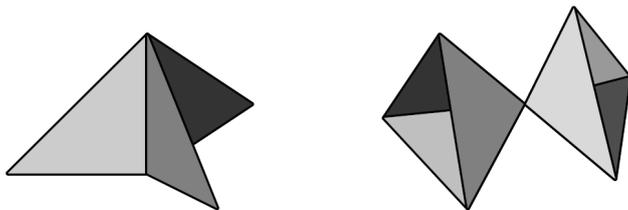
设  $K$  是紧带边曲面  $M$  的三角剖分, 那么

- (1')  $K$  中的任意 1-单形 (边) 都至多是两个 2-单形 (三角形) 的边,
- (2') 对于  $K$  中任意 0-单形 (顶点)  $v$ , 若  $v$  对应于  $M$  的内点, 则同 (2); 若  $v$  对应于  $M$  的边界点, 则包含  $v$  的 2-单形 (三角形) 可以排成一列  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ , 使得对于任意  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $\sigma_i$  与  $\sigma_{i+1}$  的交集是它们的一条公共边.

反之, 任意满足 (a),(b),(c),(1'),(2') 的有限单纯复形  $K$ , 其承载空间  $|K|$  都是一个紧连通拓扑带边曲面.



注意上述条件 (1)、(2) 帮我们去掉了如下两类的“不构成曲面的坏单纯复形”:



我们还可以把条件 (1), (2) 统一成一个条件. 为简单起见, 我们只考虑无边的情形. 我们设  $v$  是单纯复形  $K$  中的任意 0-单形 (顶点), 并将  $K$  中所有包含  $v$  的 2-单形 (三角形) 中  $v$  的对边 (1-单形及其顶点 0-单形) 的集合叫做  $v$  的**链接** (link). 则条件 (1),(2) 可被统一为

(d)  $K$  中任意顶点  $v$  的“链接”构成一个简单闭多边形.<sup>15</sup>

该条件不难被推广到高维:  $K$  中任意  $k$ -单形  $\sigma$  的“链接” (即跟单形  $\sigma$  不交且跟  $\sigma$  同为某更高维单形的面的单形  $\tau$  的集合) 构成一个拓扑球面. 我们把满足这样条件的三角剖分叫做**组合三角剖分** (combinatorial triangulation). 虽然大部分我们能够想到的三角剖分都是组合三角剖分, 但是确实存在某些拓扑流形 (例如对 Poincaré 所发现的三维同调球做两次纬垂操作所得五维拓扑球), 它的某些三角剖分不是组合三角剖分.

### ¶ 三角剖分存在唯一性

根据定义, 流形是 (A2), (T2) 且局部欧的. 但是这些定义中的条件无法告诉我们流形的整体结构. 三角剖分是组合拓扑 (combinatorial topology) (即“用组合方法”研究流形或者更一般拓扑空间的整体拓扑结构) 这个拓扑学分支的基石. 例如, 我们下面会展示如何用三角剖分定义拓扑曲面的定向、Euler 示性数等拓扑量. 进一步的, 还可以用三角剖分定义同调群等代数拓扑不变量.

对流形做三角剖分以研究其整体拓扑性质的想法起源于 H. Poincaré 在 1895 年发表的长文 *Analysis Situs*. 后来在 1899 年, H. Poincaré 在为 *Analysis Situs* 写的第一个附录中研究了如下问题:

**问题 1:** 是否任意光滑流形都有三角剖分?

在 1924 年, 德国数学家 H. Kneser 将该问题拓广至拓扑流形:

**问题 2:** 是否任意拓扑流形都有三角剖分?

事实上, 人们甚至期待更多.

**问题 3:** 是否任意光滑/拓扑流形都有组合三角剖分?

当然, 人们也关心三角剖分的唯一性问题. 早在 1908 年, 德国数学家 Steinitz 和奥地利数学家 Tietze 就提出了所谓的“组合拓扑的主猜想 (Hauptvermutung)”.

**主猜想:** 任意可被三角剖分的空间, 其不同的三角剖分是等价的.

这些问题对于 20 世纪拓扑学的研究起到了很重要的引领作用. 事实上, H. Poincaré 认为问题 1 的答案是肯定的, 并给出了一个不太严谨的论证. 后来美国数学家 S. Cairns

<sup>15</sup>对于带边且顶点  $v$  对应于边界点的情形,  $v$  的“链接”构成一条简单折线.

(1935 年) 和英国数学家 J.H.C. Whitehead<sup>16</sup> (1940) 年对问题 1 给出了完整的回答: 任意光滑流形具有唯一跟光滑结构相容的组合三角剖分.

对于二维拓扑流形即曲面, 其三角剖分的存在性最早是 1925 年由 T. Rado<sup>17</sup> 给出. Rado 定理的证明比较长, 后来 1969 年 Doyle 和 Morgan 给出了一个基于 Jordan-Schoenflies 定理的简短证明. 1943 年希腊数学家 C. Papakyriakopoulos 证明了任何二维单纯复形的主猜想. 总而言之, 我们有

**定理 4.4.13. (曲面三角剖分的存在唯一性)**

- (1) 任意曲面都存在一个组合三角剖分.
- (2) 同一个曲面的任意两个三角剖分是等价的.



在后文中, 我们将会不加证明地承认该定理.

对于三维拓扑流形三角剖分的存在唯一性, 直至 1952 年才由美国数学家 E. Moise 完成. 他证明了任意 3 维拓扑流形有光滑结构 (后来人们也证明了 3 维拓扑流形光滑结构的唯一性), 从而其组合三角剖分是存在且唯一的. 然而, 对于一般的  $n$  ( $n \geq 4$ ) 维拓扑流形, 问题 2、问题 3 以及主猜想的答案都是否定的. 事实上, 1969 年 Kirby 和 Siebenmann 对于任意  $n \geq 5$ , 构造了不可被组合三角剖分的  $n$  维拓扑流形的例子, 之后直到 2016 年才由 C. Manolescu 完成了最后一击, 证明了对于任意  $n \geq 5$ , 存在  $n$  维的拓扑流形不可被三角剖分. 四维是拓扑学中一个非常特殊的维数. 1982 年 M. Freedman 在这个维度首先取得了突破, 构造不可被组合三角剖分的 4 维拓扑流形的例子, 之后 1985 年 A. Casson 证明了 Freedman 所构造的 4 维流形不可被三角剖分. 此外, 主猜想首先在 1961 年被 Milnor 证否, 不过他给出的例子是单纯复形但不是拓扑流形. 之后 1969 年 Kirby 和 Siebenmann 才给出了具有不同三角剖分的  $n$  维拓扑流形 ( $n \geq 5$ ) 的例子.

在拓扑学中, 对于  $n \geq 5$  维流形和  $n = 2, 3, 4$  维流形的研究, 无论是方法还是结论往往都有着较大的差异. 因此人们习惯于把  $n \geq 5$  维的拓扑称为高维拓扑, 而把  $n = 2, 3, 4$  维的拓扑称为低维拓扑. 当然, 我们在第 4.3 节所提到的扭结理论就是低维拓扑的一个重要分支.

## ¶ 多边形表示的存在性

我们已经看到了多边形表示是有用的. 为了应用 Rado 定理即组合三角剖分的存在性去证明多边形表示的存在性, 我们还需要

**引理 4.4.14. (组合三角剖分的“强连通性”)**

设  $K$  是紧连通曲面  $M$  的一个组合三角剖分. 则对于  $K$  中任意 2-单形  $\sigma, \sigma'$ , 存在  $K$  中 2-单形  $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1} = \sigma'$  使得对任意  $0 \leq i \leq k$ ,  $\sigma_j$  与  $\sigma_{j+1}$  交于一条公共边.



<sup>16</sup>怀特海德 (John Henry Constantine Whitehead, 1904-1960), 英国数学家, 同伦论的创始人之一, 引入了比单纯复形更一般的 CW 复形的概念. 他的叔叔是著名数学家、哲学家 A.N.Whitehead.

<sup>17</sup>拉多 (Tibor Rado, 1895-1965), 匈牙利数学家. 他的另一项非常有名的工作是解决 Plateau 问题 (跟 Douglas 同时而独立解决该问题).

**证明** 假设引理不成立, 即存在 2-单形  $\sigma$  和  $\sigma'$ , 不能通过一组 2-单形如引理中所述那样“相连”. 把所有能跟  $\sigma$  “相连”的 2-单形 (含  $\sigma$ ) 列为  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , 而不能跟  $\sigma$  “相连”的列为  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_m$ , 则任意  $\sigma_k$  与  $\sigma'_l$  都不能“相连”. 令  $K_1 = \cup \sigma_j$ ,  $K_2 = \cup \sigma'_j$ . 由连通性,  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ . 由选取方式,  $K_1 \cap K_2$  中不包含 1-单形, 于是该交集仅包含 0-单形即顶点. 任取交集内的顶点  $v$ , 则由命题 4.4.11, 所有包含  $v$  的 2-单形是“相连”的, 矛盾.  $\square$

下面我们证明

**定理 4.4.15. (多边形表示的存在性)**

任意紧曲面  $M$  都存在一个多边形表示.



**证明** 不失一般性, 我们假设曲面  $M$  是连通的 (否则它是有限多个紧连通曲面的无交并, 分别处理即可). 根据 Rado 定理, 任何紧曲面  $M$  都存在一个组合三角剖分  $K$ . 紧性和局部有限性蕴含了  $K$  是有限集. 我们记  $K$  中所有的 2-单形为

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k.$$

将这些 2-单形的边 (1-单形) 都标记字母 (当然, 我们用同一个字母标记相邻 2-单形的公共边). 取  $\sigma_1$ . 如果  $k > 1$ , 那么由引理 4.4.14, 存在  $\sigma_{i_2}$  使得

$$\sigma_1 \cap \sigma_{i_2} = \text{一条公共边}.$$

令  $P_2 = \sigma_1 \cup \sigma_{i_2}$  (擦掉粘合的公共边上所标记的字母). 那么  $P_2$  是一个各边都有标记字母的四边形. 如果  $k > 2$ , 再次由引理 4.4.14, 存在  $\sigma_{i_3}$  使得

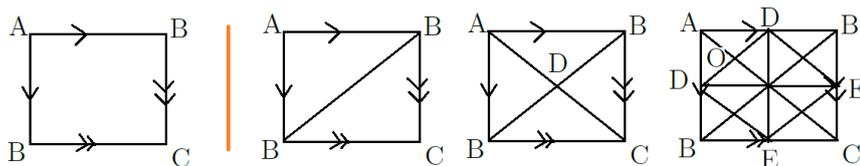
$$\sigma_{i_3} \cap P_2 = \text{至少一条公共边}.$$

有可能  $\sigma_{i_3}$  与  $P_2$  的交集超过一条边, 但我们仅把  $\sigma_{i_3}$  的一条边粘合到  $P_2$  从而得到各边都有标记字母的五边形  $P_3$ . 重复这个过程, 我们最终可以得到一个各边都被标记了字母的  $(k+2)$ -边形, 且每个字母最多标记这个多边形的两条边. 它就是我们所需要的  $M$  的多边形表示.  $\square$

### ¶ 在多边形表示上做三角剖分

通常在曲面上直接画三角剖分会很复杂, 但在其多边形表示上处理则会容易一些. 然而, 在多边形表示上画三角剖分时要小心: 必须避免出现“不同的三角形有相同的三个顶点”这种情形 (否则这两个三角形的交集就是三条边, 跟单纯复形的定义矛盾!)

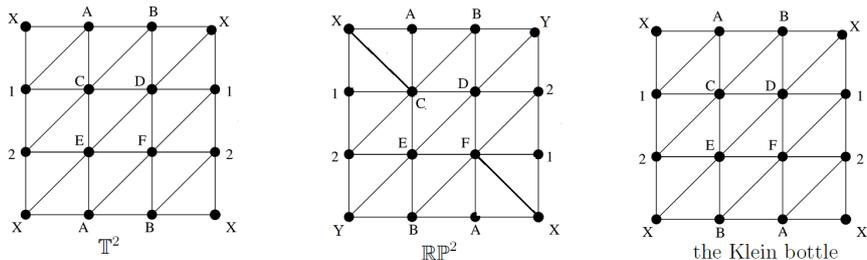
以下是用多边形表示做  $S^2$  的三角剖分时, 错误的剖分方法:



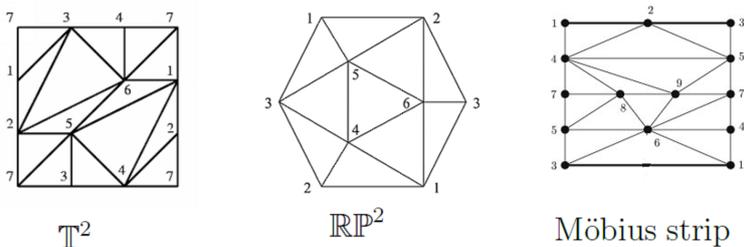
**These are NOT triangulations!**

例如, 对于最后一个, 即使我们已经将多边形分割为很多小的三角形, 它们之间仍然是冲突的, 因为存在两个三角形, 具有相同的顶点  $A, D$  和  $O$ .

以下是  $T^2, \mathbb{R}P^2$  和 Klein 瓶 (正确的) 三角剖分 (区别在哪里?):



这里是上述三个曲面的顶点更少的三角剖分方法：



### ¶ 定向

利用三角剖分，对于任意紧曲面  $M$ ，我们得到一个有限单纯复形  $K$  与其同胚. 事实上，曲面  $M$  的很多拓扑信息都被蕴含于  $K$  的组合信息当中. 我们首先定义

#### 定义 4.4.16. (单形的定向)

给定任意单形  $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$ ,

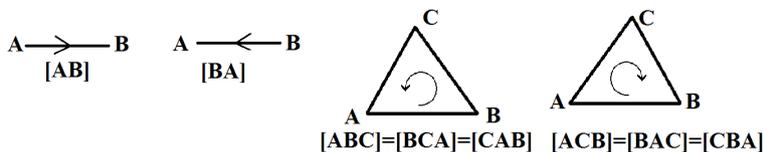
- (1) 对于  $\{0, 1, \dots, m\}$  的任意置换  $\{\tau_0, \dots, \tau_m\}$ ，我们称顶点的排序  $[x_{\tau(0)} \cdots x_{\tau(m)}]$  为单形  $\sigma$  的一个**定向** (orientation).
- (2) 对于顶点的两个不同排序，如果它们对应的置换具有相同的奇偶性 (即它们之间相差偶数个对换)，则我们称这两个排序**定义了相同的定向** (define the same orientation).



根据定义，任何单形都有两个 (相反) 的定向：

$$[x_0 x_1 x_2 \cdots x_m] \quad \text{和} \quad [x_1 x_0 x_2 \cdots x_m] = -[x_0 x_1 x_2 \cdots x_m].$$

以下是 1-单形和 2-单形上的不同定向：



现在我们通过 2-单形和 1-单形的定向定义曲面的定向. 我们首先定义

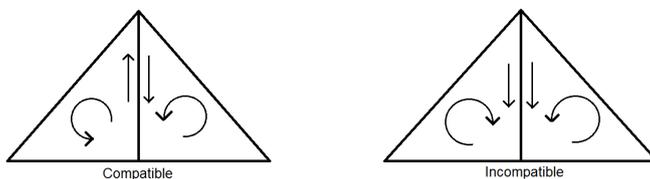
#### 定义 4.4.17. (单纯复形的定向)

假设  $K$  是一个二维单纯复形.

- (1) 设  $\langle A, B, C \rangle$  是一个 2-单形，且具有定向  $[ABC]$ . 则定义它在边  $\langle A, B \rangle$ ,  $\langle B, C \rangle$  和  $\langle A, C \rangle$  上的**诱导定向** (induced orientation) 分别为  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CA]$ .
- (2) 设 2-单形  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  是“相邻的”，即它们的交集是一条公共边. 如果它们在

公共边上诱导的定向是相反的, 则我们称  $\sigma_1$  的定向和  $\sigma_2$  的定向是**相容的** (compatible).

(3) 如果可以给  $K$  的每个 2-单形赋予定向, 使得所有相邻单形的定向是相容的, 则我们称  $K$  是**可定向的** (orientable).



注意单纯复形未必可定向. 不过, 如果  $K$  是 2-单形即三角形的细分所对应的复形, 则  $K$  一定是可定向的, 且它跟三角形一样恰有两个定向:

#### 引理 4.4.18

设有限单纯复形  $K$  是三角形复形  $K_{\langle A, B, C \rangle}$  的一个细分. 则对于  $\langle A, B, C \rangle$  的任一定向, 可以赋予  $K$  一个定向使得该定向不改变  $\langle A, B, C \rangle$  的边上的定向.



**证明** 如果单形  $\langle A, B, C \rangle$  是“逆时针”定向, 则赋予于  $K$  中所有的小三角形“逆时针”定向. 如果  $\langle A, B, C \rangle$  是“顺时针”定向, 则赋予于  $K$  中所有的小三角形“顺时针”定向. 易见该定向不改变三角形  $ABC$  三条边上的定向 (但是有可能会把每条边都分割成很多小段).

反之, 设  $K$  的某个定向不是由上述两种方式给出来的, 即  $K$  中有两个小三角形, 一个是“顺时针”定向, 另一个是“逆时针”定向. 在这两个三角形各取一个内点, 使得连接它们的线段不经过任何 0-单形, 则该线段途径的小三角形中, 一定有两个相邻的小三角形, 其中一个是“顺时针”定向而另一个是“逆时针”定向, 从而它们在交集上诱导相同的定向, 即定向不相容, 矛盾.  $\square$

我们将用三角剖分的可定向性定义曲面的可定向性. 为此我们还需要一点准备工作: 我们知道, 曲面的三角剖分并不唯一, 但是曲面的不同三角剖分是等价的. 因此, 我们自然想到要证明

#### 命题 4.4.19. (细分的可定向性)

设  $K$  是紧连通曲面  $M$  的一个三角剖分, 而  $K'$  是  $K$  的一个细分, 则  $K'$  是可定向的当且仅当  $K$  是可定向的.



**证明** 设  $K$  是可定向的, 并赋予  $K$  一个定向. 对于  $K$  中的每个 2-单形  $\sigma$ , 按照引理 4.4.18 的方式赋予它的细分

$$K'_\sigma := \{\sigma' \in K' \mid \sigma' \subset \sigma\}$$

定向. 由  $K$  中定向相容性可知  $K'$  中这样赋予的定向是相容的.

反之, 若  $K'$  是可定向的, 则对于  $K$  中的每个 2-单形  $\sigma$ ,  $K'_\sigma$  上的定向给出了  $\sigma$  的一个定向, 且由  $K'$  的定向相容性知由此所得到的  $K$  的定向是相容的.  $\square$

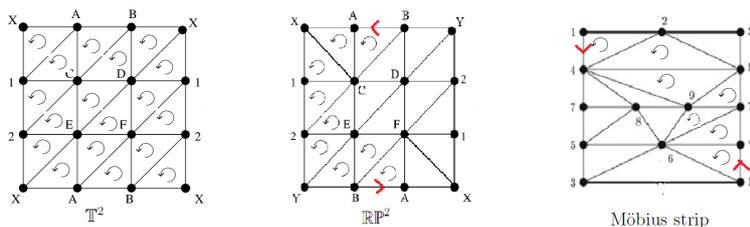
因为曲面的任意两个三角剖分都是等价的，即有公共的细分，所以如下的定义不依赖于三角剖分的选取，从而是合理的：

**定义 4.4.20. (可定向曲面)**

如果曲面  $M$  的一个三角剖分  $K$  是可定向的，我们称  $M$  是**可定向的** (orientable). 

注意到可定向性是拓扑性质：如果  $M$  是可定向的（即存在  $M$  的一个三角剖分  $K$  且  $K$  是可定向的）且如果  $N \simeq M$ ，那么同胚映射  $f: M \rightarrow N$  将会自动给出  $N$  上的一个三角剖分  $\tilde{K}$ ，而且我们可以通过“移植  $K$  上的定向”的方式赋予  $\tilde{K}$  一个定向。

下图展示了  $T^2$  是可定向的，而实射影空间  $\mathbb{RP}^2$  和 Möbius 带则不可定向：



对于可定向性，我们有以下命题，其证明我们留作练习：

**命题 4.4.21. (紧连通曲面的可定向性)**

令  $M, M_1, M_2$  维紧连通曲面. 那么

- (1) 如果  $M$  是可定向的，那么在  $M$  上恰好有两种相反的定向.
- (2) 如果  $M_1, M_2$  是可定向的，那么  $M_1 \# M_2$  也可定向.
- (3) 如果存在一个 Möbius 带到  $M$  的嵌入，那么  $M$  是不可定向的.

特别地，由推论 4.4.6 知， $\mathbb{RP}^2$ ，Klein 瓶，以及更一般地  $\mathbb{RP}^2 \# S$ （其中  $S$  是任意紧曲面）都是不可定向的. 而从下文的曲面分类定理来看，每个不可定向连通紧曲面里面都可以找到嵌入其中的 Möbius 带. 于是，对于紧曲面而言，“存在嵌入  $M$  的 Möbius 带”与  $M$  不可定向是等价的. 事实上，有很多书直接把“存在嵌入  $M$  的 Möbius 带”作为曲面  $M$  不可定向的定义. 【几何上，这就是说我们可以从曲面的一侧出发，沿着该表面上的某个圆走一圈，不跨过边界即可达到曲面的另一侧】

## ¶ Euler 示性数

在组合拓扑里，通过运用组合剖分地方式，我们不仅可以定义可定向性这样“定性”的拓扑性质，还可以定义 Euler 示性数、同调群等“定量”的拓扑不变量. 例如，

**定义 4.4.22. (单纯复形的 Euler 示性数)**

设  $K$  是有限单纯复形  $K$ ，记  $K$  中  $m$ -维单形的个数为  $|K^{(m)}|$ . 我们称

$$\chi(K) = \sum (-1)^m |K^{(m)}|,$$

为  $K$  的 **Euler 示性数** (Euler characteristic) 为 

例如, 若  $K$  是有限图, 则其 Euler 示性数为

$$\chi(K) = |V| - |E|,$$

其中  $|V|$  和  $|E|$  分别为该图的顶点数和边数, 而我们在第 3.6 节已经看到了此时  $K$  的基本群是由  $\chi(K)$  决定的. 若  $K$  是紧曲面的三角剖分, 则它的 Euler 示性数为

$$\chi(K) = |V| - |E| + |F|,$$

其中  $|V|, |E|, |F|$  分别是  $K$  中的顶点数, 边数和 2 维面数.

我们证明

**命题 4.4.23. (细分不改变 Euler 示性数)**

如果  $K$  是紧曲面  $M$  的三角剖分, 而  $K'$  是  $K$  的细分, 那么  $\chi(K') = \chi(K)$ .

**证明** 若在细分  $K$  成  $K'$  时, 在  $K$  中所有三角形的内部总共添加了  $m$  个点, 在其所有“内部边”(即  $K$  的不对应于  $M$  的边界的那些 1-单形) 上共添加了  $n_1$  个点, 在其所有“边界边”(即  $K$  的对应于  $M$  的边界的那些 1-单形) 上共添加了  $n_2$  个点, 则新的单纯复形  $K'$  比原来的单纯复形  $K$  多了  $m + n_1 + n_2$  个 0-单形. 这些增加的点导致  $K'$  中所有三角形的内角和比  $K$  总共增加了  $m \cdot 2\pi + n_1 \cdot 2\pi + n_2\pi$ , 从而  $K'$  比  $K$  多了  $2m + 2n_1 + n_2$  个 2-单形.

$K'$  比  $K$  多了多少个 1-单形呢? 为区别起见, 我们称连接到“新内部点”的 1-单形为“新边”,  $K$  中“内部边”被增加的点分割后得到的边叫做“新内部边”,  $K$  中“边界边”被增加的点分割后得到的边叫做“新边界边”. 则新内部边比原内部边多  $n_1$  条, 新边界边比原边界边多  $n_2$  条. 于是问题转化为: 新边有多少条? 新增的  $2m + 2n_1 + n_2$  个三角形共多出  $6m + 6n_1 + 3n_2$  条边(其中“新边”和“新内部边”都重复算了两遍), 其中有  $n_2$  条是“新边界边”, 有  $n_1$  条是“新内部边”, 这些“新内部边”需要算两遍, 即  $2n_1$  条边, 剩下的是新边, 每条边也被算了两遍, 所以新边的条数是  $(6m + 6n_1 + 3n_2 - 2n_1 - n_2)/2 = 3m + 2n_1 + n_2$  条. 于是共增加了  $3m + 3n_1 + 2n_2$  条边, 跟增加的“点数 + 面数”一致, 从而命题得证.

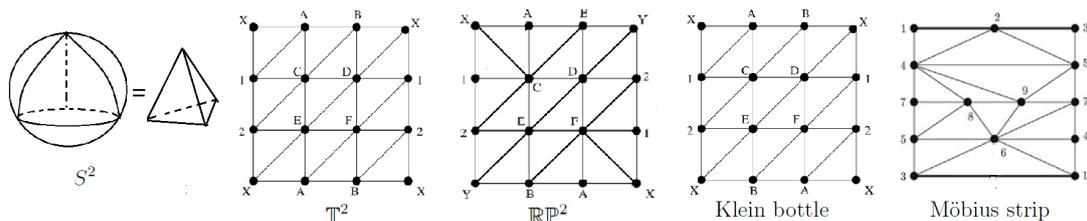
□

因为曲面的任意两个三角剖分都有一个公共子划分, 所以我们可以定义

**定义 4.4.24. (紧曲面的 Euler 示性数)**

设  $S$  为一个紧曲面, 而  $K$  是  $S$  的一个三角剖分, 则我们称  $\chi(S) := \chi(K)$  为  $S$  的 Euler 示性数 (Euler characteristic).

**例 4.4.25.** 根据以下图片,



我们立刻得到了：

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2,$$

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 9 - 27 + 18 = 0,$$

$$\chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = 10 - 27 + 18 = 1,$$

$$\chi(\text{Klein 瓶}) = 9 - 27 + 18 = 0,$$

$$\chi(\text{Möbius 带}) = 9 - 24 + 15 = 0.$$

注记： $\mathbb{T}^2$ , Klein 瓶和 Möbius 带两两不同胚. 因此仅有 Euler 示性数是不能决定一个曲面的拓扑.

从以上公式我们看到  $\chi$  不是“可加的”<sup>18</sup>, 即  $\chi(S_1 \# S_2) \neq \chi(S_1) + \chi(S_2)$ . 然而, 我们有

**定理 4.4.26. (连通和的 Euler 示性数)**

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$



**证明** 因为圆盘同胚于三角形即 2-单形, 所以在做连通和的时候, 可以将两个曲面做三角剖分, 然后各取一个三角形, 去掉三角形的内部, 并粘接边界. 这样, 原来两个曲面的三角剖分恰好变成新的连通和的三角剖分. 比较一下, 可知新的单纯复形比原来的两个单纯复形少了三个顶点, 两条边和两个面. 故

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 3 + 3 - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,$$

从而定理得证. □

### 4.4.3 紧曲面的分类

#### ¶ 从多边形表示到符号表示

多边形表示对于研究曲面而言非常有用, 但有时用起来并不很方便, 因为要画一个(边数非常多的)多边形并且标记每条边是非常耗费时间的. 不过, 仔细想一下我们会发现, 我们完全可以把多边形区域换成一些别的形状比如圆盘: 只要把圆盘的边界即圆周分成  $n$  段圆弧, 并按照顺序跟  $n$  边形一样标记字母, 这样得到的效果跟用  $n$  边形表示是完全一样的. 把这个想法再往前发展一步, 我们发现: 多边形表示的核心是边之间的排列顺序以及“哪条边与哪条边以什么方向粘贴”的粘贴关系, 所以我们完全可以不用画图, 而只要简单地用符号表示这些边的排列顺序与粘贴关系即可.

下面我们就引入这样一个符号系统, 用字母去表示多边形: 给定一个紧曲面的多边形表示, 我们用符号将其记为

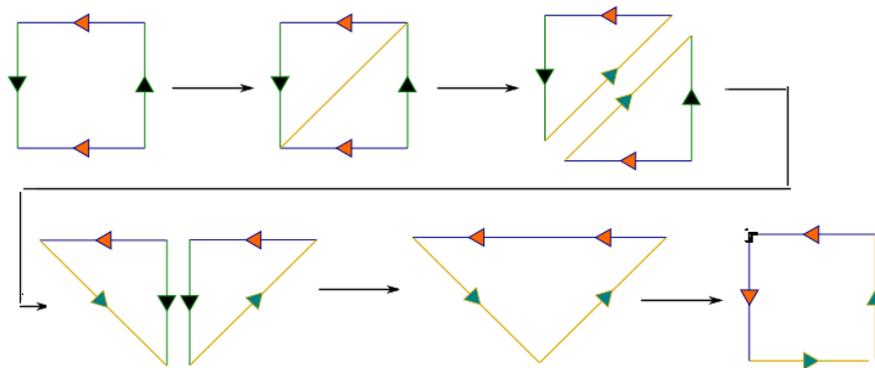
$$\langle S | A \rangle,$$

其中

<sup>18</sup>然而, 它确实是“可乘的”, 即对于紧曲面或者更一般的紧流形, 我们有  $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$ . 这个公式将在后续课程中学到.

- (a)  $S$  是一个字母集, 用以标记多边形的边,  
 (b)  $A$  由一个或多个字组成, 使得  $S$  中每个字母 (包括它的逆: 我们按照逆时针方向记录多边形的边, 用字母的逆表示在粘贴该边时要“反向”即沿顺时针方向粘) 在  $A$  中至多出现两次. 此外, 如果  $A$  由超过一个字组成, 那么对于每个字, 都至少有一个字母出现在另外一个字里面 (因此可以将他们粘起来得到一个连通曲面).

例如, 对于 Klein 瓶, 我们已经看到了



通过使用以上新的符号系统, 我们就不用画出这些图, 而只要写出如下的符号串: (这里我们仅需用符号记录上面的第一、三、四、五共四张图就足够了)

$$\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle \rightarrow \langle a, b, c \mid abc, c^{-1}a^{-1}b \rangle \rightarrow \langle a, b, c \mid acb^{-1}, bca \rangle \rightarrow \langle a, c \mid aacc \rangle$$

这样就大幅简化了我们的工作.

根据命题4.4.2, 如果  $M_1, M_2$  分别有多边形表示  $\langle S_1 \mid A_1 \rangle$  和  $\langle S_2 \mid A_2 \rangle$ , 其中  $S_1$  和  $S_2$  中的字母是不重复的, 那么  $M_1 \# M_2$  就有多边形表示  $\langle S_1 S_2 \mid A_1 A_2 \rangle$ . 于是我们可以把“曲面的连通和”这个过程用符号表示成

$$\langle S_1 \mid A_1 \rangle \# \langle S_2 \mid A_2 \rangle = \langle S_1, S_2 \mid A_1 A_2 \rangle.$$

例如, 我们有

$$\langle a \mid aa \rangle \# \langle c \mid cc \rangle = \langle a, c \mid aacc \rangle,$$

而这是  $K \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  的一个“符号证明”.

#### 注 4.4.27.

- (1) 正如以上例子所看到的, 对于给定曲面的多边形表示, 其符号表示不是唯一的.
- (2) 虽然我们是从三角剖分开始得到了多边形表示, 但多边形表示不必与任何三角剖分有关. 它仅仅是一种通过“粘合多边形边界”来得到曲面的方法.

### ¶ 初等变换

于是一个自然的问题是: 如何判断两个不同的符号表示是代表相同的曲面还是不同的曲面? 或者反过来, 如何将给定曲面的符号表示转化为一个新的 (与原先的符号表示等价, 但是更简单) 符号表示? 下面我们对符号表示引入一些**初等变换** (elementary transformations), 这些变换前后的符号表示代表的是同一个曲面的不同多边形表示. 后面我们将

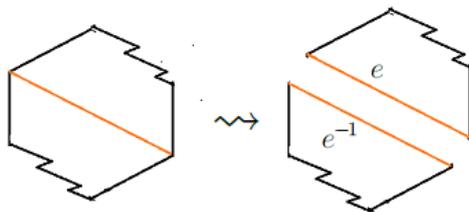
利用这些初等变换把给定的符号表示变换称某些特定“标准型”，从而可以认出该符号表示所代表的曲面.

(I) 剪切:

$$\langle S | A_1 A_2 \rangle \rightsquigarrow \langle S, e | A_1 e, e^{-1} A_2 \rangle,$$

其中  $e$  是一个不在  $S$  中的新字母.

从几何上看,“剪切”变换就是用符号的方式记录下图所代表的过程,即:沿着连接两个顶点的对角线剪开多边形,得到两个新的多边形.如图所示,所剪出的新边只要按照相反的方向粘贴就得到原来的多边形,所以我们用新字母  $e$  以及  $e^{-1}$  来标记所剪出的新边:



(II) 粘合:

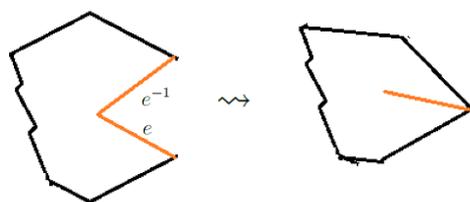
$$\langle S, e | A_1 e, e^{-1} A_2 \rangle \rightsquigarrow \langle S | A_1 A_2 \rangle.$$

显然这就是剪切变换的逆变换.

(III) 折叠:

$$\langle S, e | A_1 e e^{-1} A_2 \rangle \rightsquigarrow \langle S | A_1 A_2 \rangle.$$

该变换所记录的是下图所代表的过程:



(IV) 展开:

$$\langle S | A_1 A_2 \rangle \rightsquigarrow \langle S, e | A_1 e e^{-1} A_2 \rangle.$$

这是折叠的逆变换. (在后文中,如果字或字的某部分太短以致后续的操作会出现问题时,那我们将默认对其进行展开操作.)

(V) 轮换:

$$\langle S | a_1 a_2 \cdots a_m \rangle \rightsquigarrow \langle S | a_m a_1 a_2 \cdots a_{m-1} \rangle.$$

该变换代表着从另外一个顶点开始记录边的标记.

(VI) 反射:

$$\langle S | a_1 a_2 \cdots a_m \rangle \rightsquigarrow \langle S | a_m^{-1} a_{m-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} \rangle.$$

该变换代表着通过“镜像对称”将多边形做反射.这样就同时改变了所有标记的方

向, 但是不会改变粘合的方式.

(VII) 替代:

我们有三种不同的替代变换, 分别为

$$\begin{aligned}\langle S, b_1, \dots, b_k | A_1 b_1 \dots b_k A_2 \rangle &\rightsquigarrow \langle S, b | A_1 b A_2 \rangle, \\ \langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_1 e_2 A_3 \rangle &\rightsquigarrow \langle S, e | A_1 e A_2 e A_3 \rangle, \\ \langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_2^{-1} e_1^{-1} A_3 \rangle &\rightsquigarrow \langle S, e | A_1 e A_2 e^{-1} A_3 \rangle.\end{aligned}$$

它们所代表的含义如下:

- 第一个变换表示“将多条相连的边界线段重新标记为一条线段”. [注意: 所涉及到的字母在字中别处都不出现, 表示这些边不会粘到任何其他边上.]
- 第二个和第三个变换表示“如果两条相连的边在不同的地方出现两次, 且以给定的顺序正向或反向粘贴, 那么我们就把它们重新标记为一条边”.

注意对于形如

$$\langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_2 e_1 A_3 \rangle \quad \text{或者} \quad \langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_1^{-1} e_2^{-1} A_3 \rangle$$

的符号表达式里, 我们不能将  $e_1 e_2$  重新标记为一条边.

(VIII) 连通和:

$$\langle S_1, S_2 | A_1 A_2 \rangle \rightsquigarrow \langle S_1 | A_1 \rangle \# \langle S_2 | A_2 \rangle,$$

其中  $A_i$  仅包含  $S_i$  的字母.

这表示形如  $\langle S_1, S_2 | A_1 A_2 \rangle$  (其中字  $A_i$  仅由  $S_i$  的字母构成) 的符号表示所代表的曲面可以由连通和得到.

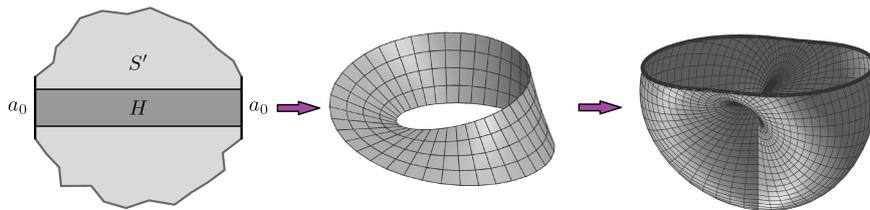
## ¶ 符号表示的化简

现在假设我们有一个紧连通曲面, 它具有符号表示  $\langle S | A \rangle$ . 为了能够“认出”该曲面, 我们将通过初等变换将其转化为一个更简单的形式. 注意我们总是可以通过粘合以及反射将  $A$  中所有的字连成一个字.

**步骤 1**. 设字母  $a \in S$  以  $a$  的形式 (即没有  $a^{-1}$ ) 在字  $A$  中出现了两次, 即该符号表示形如  $\langle S, a | A_1 a A_2 a A_3 \rangle$ , 则我们采用以下变换:

$$\begin{aligned}\langle S, a | A_1 a A_2 a A_3 \rangle &\stackrel{(5)}{\rightsquigarrow} \langle S, a | A_3 A_1 a A_2 a \rangle \\ &\stackrel{(1)}{\rightsquigarrow} \langle S, a, b | A_3 A_1 a b, b^{-1} A_2 a \rangle \\ &\stackrel{(5),(6)}{\rightsquigarrow} \langle S, a, b | b A_3 A_1 a, a^{-1} A_2^{-1} b \rangle \\ &\stackrel{(2)}{\rightsquigarrow} \langle S, b | b A_3 A_1 A_2^{-1} b \rangle \\ &\stackrel{(5)}{\rightsquigarrow} \langle S, b | b b A_3 A_1 A_2^{-1} \rangle \\ &\stackrel{(8)}{\rightsquigarrow} \langle b | b b \rangle \# \langle S | A_3 A_1 A_2^{-1} \rangle.\end{aligned}$$

我们得到了  $\mathbb{R}P^2$ ! 该过程在几何上可以用下图来解释:



因为所得字的长度缩短了，所以将这个过程重复有限次，我们得到：

**结论 1**. 如果  $A$  包含  $\cdots a \cdots a \cdots$ ，那么我们有

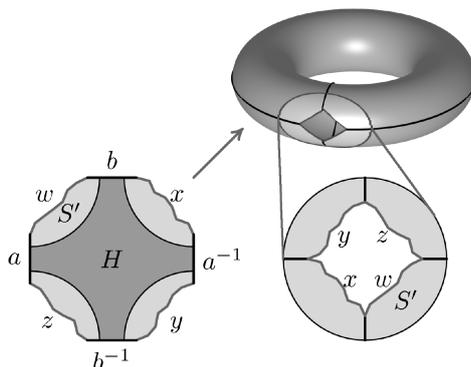
$$M \simeq \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2 \# M_1,$$

其中  $M_1$  是由符号表示  $\langle S_1 | A_1 \rangle$  所代表的曲面，其中在  $A_1$  中没有字母以相同的形式出现两次，换言之， $A_1$  中的字母都以  $\cdots a \cdots$  或  $\cdots a \cdots a^{-1} \cdots$  的形式出现.

**步骤 2**. 假设  $M_1 = \langle S | A \rangle$ ，其中  $A$  包含了  $\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$ ，那么我们可以

$$\begin{aligned} \langle S, a, b | A_1 a A_2 b A_3 a^{-1} A_4 b^{-1} A_5 \rangle &\rightsquigarrow \langle S, a, b | A_5 A_1 a A_2 b A_3 a^{-1} A_4 b^{-1} \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, a, b, c | A_5 A_1 a A_2 c, c^{-1} b A_3 a^{-1} A_4 b^{-1} \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, a, b, c | A_2 c A_5 A_1 a, a^{-1} A_4 b^{-1} c^{-1} b A_3 \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, b, c | A_2 c A_5 A_1 A_4 b^{-1} c^{-1} b A_3 \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, b, c | c^{-1} b A_3 A_2 c A_5 A_1 A_4 b^{-1} \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, b, c, d | c^{-1} b A_3 A_2 c d, d^{-1} A_5 A_1 A_4 b^{-1} \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, b, c, d | A_3 A_2 c d c^{-1} b, b^{-1} d^{-1} A_5 A_1 A_4 \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, c, d | A_3 A_2 c d c^{-1} d^{-1} A_5 A_1 A_4 \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, c, d | c d c^{-1} d^{-1} A_5 A_1 A_4 A_3 A_2 \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle c, d | c d c^{-1} d^{-1} \rangle \# \langle S | A_5 A_1 A_4 A_3 A_2 \rangle. \end{aligned}$$

我们得到了环面  $T^2$ ！该过程在几何上可以用下图来解释：



这里有一个重要观察：

所得的字  $A_5 A_1 A_4 A_3 A_2$  的长度缩短了且依然不会包含  $\cdots a \cdots a \cdots$ .

于是我们可以重复这个过程有限次（而不必担心会回到步骤 1 的情形），得到

**结论 2**. 我们有

$$M \simeq \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2 \# M_2,$$

其中  $M_2$  能被表示为  $\langle S_2 | A_2 \rangle$ , 且在  $A_2$  中既没有  $\cdots a \cdots a \cdots$  也没有  $\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$ .

**断言:** 如果  $M$  是一个无边紧曲面, 那么我们已经完成了, 即

$$M \simeq \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2.$$

原因: 若  $M$  是无边紧曲面, 则每个被标记的字母都恰好出现两次. 如果在剩下的字  $A_2$  中不存在字母  $a$  使得  $A_2$  形如  $\cdots a \cdots a \cdots$ , 并且  $A_2$  至少还留有兩個字母, 那么所有留下的字母都以一个  $a$  一个  $a^{-1}$  的形式出现的. 此时必然存在字母  $a, b$  使得  $A_2$  形如  $\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$  的字. 为了看到这点, 我们只要在所有剩下的字母中, 取  $a$  是“离它的逆最近”的字母即可. 此时唯一的例外情况是类似于  $aa^{-1}bb^{-1}$  的字, 但它代表的曲面就是  $S^2$ , 在做连通和的时候是“零元”.

如果  $M$  是带边紧曲面, 那么我们需要继续下面的步骤.

**步骤 3.** 假设  $M$  是带边曲面. 那么  $M_2 = \langle S | A \rangle$  有以下形式  $A = \cdots a \cdots a^{-1} \cdots$ , 但是没有  $\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$ . 取  $a$  为“离它的逆最近”的字母. 那么  $A = A_1 a b_1 \cdots b_k a^{-1} A_2$ , 其中  $b_1, \cdots, b_k$  将不会出现在  $A_1$  和  $A_2$  中. 因此我们得到

$$\begin{aligned} \langle S, a, b_1, \cdots, b_k | A_1 a b_1 \cdots b_k a^{-1} A_2 \rangle &\rightsquigarrow \langle S, a, b | A_1 a b a^{-1} A_2 \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle S, a, b | a b a^{-1} A_2 A_1 \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle a, b | a b a^{-1} \rangle \# \langle S | A_2 A_1 \rangle, \end{aligned}$$

其中  $\langle a, b | a b a^{-1} \rangle$  所表征的是圆盘. 我们再次注意到:  $A_2 A_1$  长度缩短了, 且不包含步骤 1 和步骤 2 中的两种类型. 因此我们可以重复步骤 3 有限次直到所得字中不包含互逆的元素. 至此, 每个字母恰好出现一次. 注意到  $\langle b_1, \cdots, b_n | b_1 \cdots b_n \rangle$  所表征的依然是圆盘. 于是我们得到

**结论 3.** 我们有

$$M \simeq \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2 \# D \# D \# \cdots \# D,$$

其中  $D$  是平面圆盘.

将这些结论放到一起, 我们得到

#### 命题 4.4.28

任意紧曲面都同胚于如下形式的曲面

$$S^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2 \# D \# \cdots \# D.$$

#### 注 4.4.29.

- (1) 如果存在至少一个  $\mathbb{RP}^2$  或  $\mathbb{T}^2$  或  $D$ , 则我们可以移除  $S^2$ .
- (2) 如果存在至少一个  $\mathbb{RP}^2$ , 那么我们可以将每个  $\mathbb{T}^2$  替代为  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ , 因为我们有  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ .
- (3) 对于任意曲面  $M$ ,  $M \# D$  在几何上表示的是“ $M$  上挖去一个圆盘”, 即  $M$  上带有一个穿孔. 于是  $M \# D \# \cdots \# D$  代表的是  $M$  上带有多个穿孔.

## ¶ 紧曲面的分类

现在我们可以证明

### 定理 4.4.30. (紧连通曲面分类定理)

设  $M$  为一个紧连通曲面. 那么

- (1) 如果  $M$  没有边界, 那么  $M$  同胚且仅同胚于下列曲面之一:

$$S^2, \quad \Sigma_k = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_k, \quad \tilde{\Sigma}_l = \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_l.$$

- (2) 如果  $M$  有边界, 且  $\partial M$  有  $m$  个连通分支, 那么  $M$  同胚且仅同胚于下列曲面之一:

带有  $m$  个小孔的  $S^2$ , 带有  $m$  个小孔的  $\Sigma_k$ , 带有  $m$  个小孔的  $\tilde{\Sigma}_l$ .



**证明** 我们已经证明了任何紧曲面都同胚于上面所列出曲面中的一个. 剩下的就是证明这些曲面在拓扑上是两两不同的. 这可以通过计算基本群来实现.

- (1) 我们有 (参见第 3.6 节及其习题)

$$\begin{aligned} \pi_1(S^2) &\cong \{e\}, \\ \pi_1(\Sigma_k) &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} = 1 \rangle, \\ \pi_1(\tilde{\Sigma}_l) &\cong \langle a_1, \dots, a_l \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_l^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

[我们可以比较基本群的表现与“最自然的那个多边形表示”的所对应的符号表示.] 我们只需要证明这些群两两不同. 为了说明  $\pi_1(\Sigma_k)$  和  $\pi_1(\tilde{\Sigma}_l)$  是不同的, 我们可以计算它们的交换化 (参见第 3.6 节习题):

$$\begin{aligned} [\pi_1(\Sigma_k)]^{ab} &\cong \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{2k}, \\ [\pi_1(\tilde{\Sigma}_l)]^{ab} &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{l-1}. \end{aligned}$$

因为这些空间的基本群的交换化两两不同, 所以这些空间有不同的基本群, 从而它们是彼此不同胚的.

- (2) 将这些空间分别记为  $S_m^2, \Sigma_{k,m}, \tilde{\Sigma}_{l,m}$ . 我们还是可以用 van Kampen 定理计算它们的基本群, 得到 ( $k, l, m \geq 1$ )

$$\begin{aligned} \pi_1(S_m^2) &\cong \langle c_1, \dots, c_{m-1} \rangle, \\ \pi_1(\Sigma_{k,m}) &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, c_1, \dots, c_m \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} = c_1 \cdots c_m \rangle, \\ \pi_1(\tilde{\Sigma}_{l,m}) &\cong \langle a_1, \dots, a_l, c_1, \dots, c_m \mid a_1^2 \cdots a_l^2 = c_1 \cdots c_m \rangle. \end{aligned}$$

注意边界连通分支的个数,  $m$ , 是一个拓扑不变量.

我们想证明这些群是不同的. 通过计算它们的交换化, 我们得到:

$$\begin{aligned} [\pi_1(\Sigma_{k,m})]^{ab} &\cong \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{2k+m-1} = \mathbb{Z}^{2k+m-1}, \\ [\pi_1(\tilde{\Sigma}_{l,m})]^{ab} &\cong \mathbb{Z}^{l+m-1}. \end{aligned}$$

因此交换化可以被用来区分大多数情况，唯一的例外是：

$$[\pi_1(\Sigma_{k,m})]^{ab} \simeq [\pi_1(\tilde{\Sigma}_{2k,m})]^{ab}.$$

然而，这也不算一个问题，因为我们知道  $\Sigma_{k,m}$  是可定向的， $\tilde{\Sigma}_{l,m}$  是不可定向的，而可定向性是一个拓扑性质！

□

### ¶ 由 Euler 示性数给出的紧曲面分类定理

我们还可以考虑这些曲面的 Euler 示性数. 我们知道

$$\chi(S^2) = 2, \quad \chi(\mathbb{T}^2) = 0, \quad \chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = 1, \quad \chi(D) = 1$$

以及

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

于是，我们可以计算我们列表中的曲面的 Euler 示性数：

$$\begin{aligned} \chi(S^2) &= 2, & \chi(S_m^2) &= 2 - m, \\ \chi(\Sigma_k) &= 2 - 2k, & \chi(\Sigma_{k,m}) &= 2 - 2k - m, \\ \chi(\tilde{\Sigma}_l) &= 2 - l, & \chi(\tilde{\Sigma}_{l,m}) &= 2 - l - m. \end{aligned}$$

注意这给出了定理 4.4.30 的一个更简单的证明.

特别地，我们得到了

#### 命题 4.4.31. (2 维版本的 Poincaré 猜想)

对于任意紧曲面  $M$ ，我们有  $\chi(M) \leq 2$ ，并且“=”成立当且仅当  $M \simeq S^2$ .



使用 Euler 示性数，我们可以将分类定理重新表述为：

#### 定理 4.4.32. (紧曲面分类定理，第二形式)

任意紧连通曲面由以下三个数据唯一决定：

- (1) 边界连通分支的个数，
- (2) 是否可定向，
- (3) 它的 Euler 示性数.

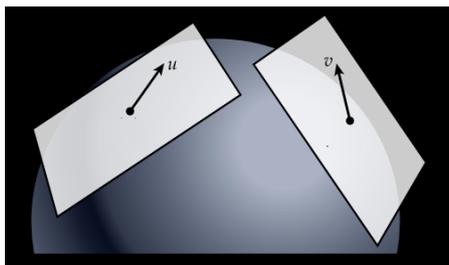


特别地，对于无边的可定向紧连通曲面，Euler 示性数是其唯一的拓扑不变量.

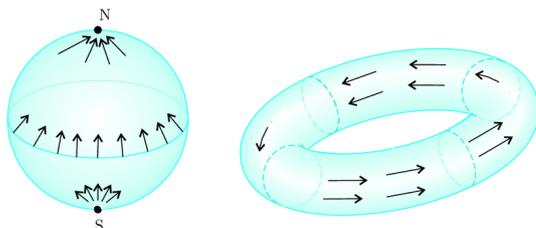
### 4.4.4 阅读材料：曲面的 Poincaré-Hopf 定理

#### ¶ 曲面上的向量场 Vector fields on surfaces

下面我们假设  $S$  是一个“光滑地”嵌入到  $\mathbb{R}^3$  中的连通可定向紧无边曲面. 于是在每个点  $x \in S$  处，存在经过  $x$  的一个平面与曲面  $S$  相切，它被称作  $x$  处的切平面. 每个以  $x$  为起点，位于切平面的向量被称作  $x$  处  $S$  的切向量.



现在假设  $V$  是  $S$  上的一个连续向量场, 即它在每点  $x \in S$  处指定了一个切向量  $V_x$ , 且  $V_x$  关于  $x$  是连续的. 例如, 下图分别给出了球面和环面上的一个向量场:



注意, 在第一个例子中, 有两个不同的点,  $N$  和  $S$ , 在这两个点上, 所分配的向量为零向量, 而在第二个例子没有这样的点.

#### 定义 4.4.33. (临界点)

令  $V$  为曲面  $S$  上一个连续向量场,  $x \in S$ .

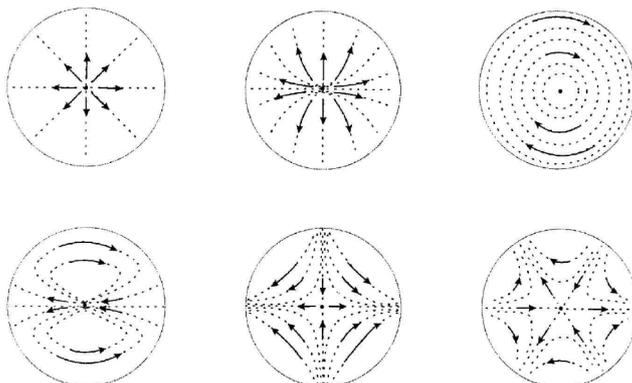
- (1) 若在  $x$  处的切向量  $V_x = 0$ , 则我们称  $x$  是  $V$  的一个**临界点** (critical point).
- (2) 若  $x$  是  $V$  的一个临界点, 且存在  $x$  的一个邻域使得  $V$  在该邻域里没有其他临界点, 则我们称  $x$  是  $V$  的一个**孤立临界点** (isolated critical point).



注意如果  $S$  是紧曲面, 并且  $V$  是  $S$  上的一个只有孤立临界点的连续向量场, 那么它只有有限个临界点.

#### ¶ 临界点的指标

现在设  $V$  是曲面  $S$  上的一个向量场,  $p$  为  $V$  的一个孤立临界点. 于是在  $p$  的一个小邻域中, 曲面同胚于一个平面圆盘, 并且  $p$  是向量场  $V$  在该邻域中唯一的临界点. 在这种情况下, 我们可以将这个邻域“摊平”成以  $p$  为中心的圆盘, 并且将  $V$  视为该圆盘上的一个平面向量场, 它仅在中心  $p$  处为零向量. 下面是一些“摊平后的向量场”的例子: (图中所画的线是相应向量场的“流线”)



对于每个孤立临界点，我们可以按照以下的方式给它指定一个整数：在驻点  $p$  周围取一个小圆周  $S^1$ ，使得  $p$  是圆内唯一的临界点. 那么向量场  $V$  在圆周上的每个点  $x$  处指定了一个非零向量  $V_x$ . 从而我们得到一个映射

$$\gamma = V|_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

在习题 3.5 中，对于这样的映射  $\gamma$ ，我们定义了其环绕数  $W(\gamma, 0)$ ，即曲线  $\gamma$  围绕  $0$  逆时针转过的总圈数. 根据该习题，环绕数  $W(\gamma, 0)$  等于映射  $\gamma' = \gamma/|\gamma| : S^1 \rightarrow S^1$  的映射度，从而是一个同伦不变量. 于是  $W(\gamma, 0)$  只依赖于  $V$  和  $p$  而跟小圆周的选取无关.

#### 定义 4.4.34. (指标)

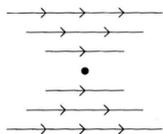
设  $p$  是曲面  $S$  上向量场  $V$  的一个孤立临界点. 我们称如上给出的环绕数  $W(\gamma, 0)$  为  $V$  在  $p$  处的**指标** (index)，并把它记为  $\text{ind}_p(V)$ .



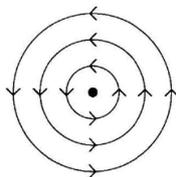
下面是一些简单向量场的指标的例子：



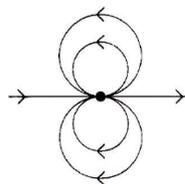
(a) Index -1



(b) Index 0



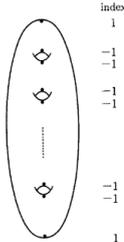
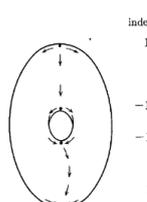
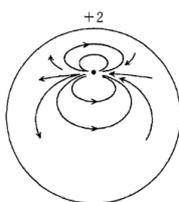
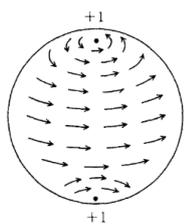
(c) Index 1



(d) Index 2

### ¶ Poincaré-Hopf 定理

设  $V$  是曲面  $S$  上的一个只有孤立临界点的向量场. 我们可以计算它所有临界点的指标，例如



注意前两个例子给出了  $S^2$  上的两个不同向量场，一个有两个临界点，另一个只有一个临界点，但在每种情况下其临界点的指标之和都等于 2. 第三个例子给出了  $\mathbb{T}^2$  上的一个向量场，它有四个驻点，其指标之和为 0. 而最后一个例子则给出了  $\Sigma_g$  上的一个向量场，它有  $2g + 2$  个临界点，其指标之和  $2 - 2g$ ：在所有这些例子中，向量场的**全指标** (total index) 即指标之和都等于该曲面 Euler 示性数  $\chi(\Sigma_g)$ .

虽然从定义上来看，向量场的指标是一个纯分析的量，但事实上，曲面上向量场的全指标跟向量场的选择无关，只依赖于曲面的拓扑性质即曲面的 Euler 特征数，从而是一个拓扑量：

**定理 4.4.35. (曲面的 Poincaré-Hopf 定理)**

令  $S$  为  $\mathbb{R}^3$  中的一个连通可定向紧无边曲面<sup>a</sup>,  $V$  为  $S$  上的一个只有孤立临界点的连续向量场. 则

$$\sum_p \text{ind}_p V = \chi(S).$$

<sup>a</sup>事实上定理对高维的光滑流形 (甚至光滑带边流形, 此时要求边界处的向量是“朝外”的) 均成立. 该定理最早是由 H. Poincaré 对于曲面的情形予以证明, 后来被 Hopf 推广到高维流形的情形.

**证明** [证明概要.] 根据定理 4.4.30, 我们不妨设  $S$  就是  $\Sigma_g$ . 上面已经在  $\Sigma_g$  上构造了向量场  $\tilde{V}$ , 使得  $\sum_p \text{ind}_p \tilde{V} = \chi(\Sigma_g)$ . 以下只需证明对于  $S$  上的任意只有孤立临界点的向量场  $V$ , 总有  $\sum_p \text{ind}_p V = \sum_p \text{ind}_p \tilde{V}$ .

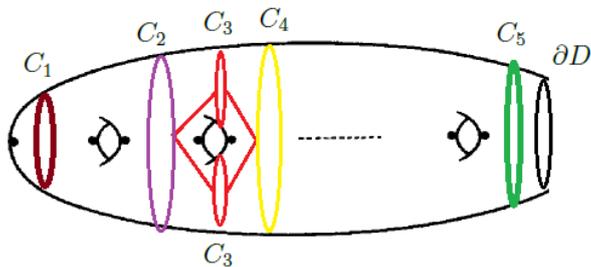
首先我们“将所有临界点移动”到一个小圆盘内: 给定任意小“圆盘” $D \subset \Sigma_g$ , 存在从  $\Sigma_g$  到  $\Sigma_g$  的(微分)同胚  $\phi$ , 将  $V$  的所有驻点映射到  $D$  中(证明它). 利用映射  $\phi$ , 我们可以构造一个向量场  $V'$ , 使得它的临界点都在  $D$  里面, 并且与  $V$  的临界点一一对应(对应的临界点指标也相同). 我们可以对  $\tilde{V}$  做相同的操作得到向量场  $\tilde{V}'$ . 为简单起见, 我们让曲面  $\Sigma_g$  “躺平”, 并让  $D$  是以最右端的点为中心的小圆盘. 注意到由我们的构造,

$$\sum_p \text{ind}_p V' = \sum_p \text{ind}_p V \quad \text{且} \quad \sum_p \text{ind}_p \tilde{V}' = \sum_p \text{ind}_p \tilde{V}.$$

现在我们在  $\Sigma_g$  上有两个向量场, 即  $V'$  和  $\tilde{V}'$ , 使得  $V'$  和  $\tilde{V}'$  在  $\Sigma_g \setminus D$  上都非零. 于是对于任意点  $x \in \Sigma_g \setminus D$ , 我们有在同一个平面内的两个非零向量,  $V'(x)$  和  $\tilde{V}'(x)$ . 令  $\theta(x)$  为从  $V'(x)$  到  $\tilde{V}'(x)$  的夹角. 于是我们得到了一个连续映射

$$\theta: \Sigma_g \setminus D \rightarrow S^1.$$

现在我们考虑  $\Sigma_g \setminus D$  上“从左到右”的一族圆圈. 下图说明了  $\theta$  限制到这些圆周上的映射度是相同的! (在某些地方我们的圆圈事实上是两个圆圈, 我们要计算的映射度是  $\theta$  分别限制到这两个圆上的  $\theta$  的映射度之和.) (写下细节.)



注意当  $C_1$  非常靠近“最左边的点”时,  $\theta|_{C_1}$  不是满射. 因此由习题 3.5,  $\deg(\theta|_{C_1}) = 0$ . 于是根据以上论证,  $\deg(\theta|_{\partial D}) = 0$ , 从而由习题 3.5 可知

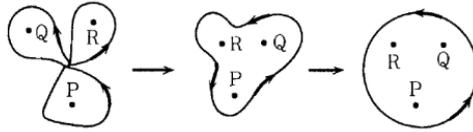
$$\theta|_{\partial D}: \partial D = S^1 \rightarrow S^1$$

同伦于常值映射. 如果我们记  $\widehat{V}' = V'/|V'|$ , 那么我们得到  $\widehat{V}'|_{\partial D} \sim \widehat{\tilde{V}'}|_{\partial D}$ , 从而

$$\deg(\widehat{V}'|_{\partial D}) = \deg(\widehat{\tilde{V}'}|_{\partial D}).$$

最后, 由映射度的同伦不变性和下图, 我们得到: 如果在圆盘  $D$  中存在多个临界点,

那么  $D$  中临界点的全指标等于在边界  $\partial D$  上的向量场的“环绕数”(更确切地说,它等于  $\partial D = S^1$  上的映射“将  $S^1$  的一点映为该点处单位化的向量  $\widehat{V} = V/|V|$ ”的映射度).



由此结论成立. □

因为  $\chi(S^2) = 2 \neq 0$ , 我们得到了著名的

**推论 4.4.36. (毛球定理)**

球面  $S^2$  上的任何连续向量场必有零点.

