1.3 单位分解及其应用

本节研究光滑流形上一类非常常用的函数——鼓包函数，证明光滑流形上最重要的工具之一——单位分解，并给出单位分解在函数逼近方面的应用。

1.3.1 鼓包函数

对于任意 $f \in C^\infty(M)$，定义 f 的**支集**为如下集合

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

若 f 的支集是 M 的紧子集，则称 f 是**紧支的**. M 上全体紧支光滑函数的集合记为 $C_0^\infty(M)$. 不难发现 $C_0^\infty(M)$ 是代数 $C^\infty(M)$ 的一个**理想**:

- 如果 $f, g \in C_0^\infty(M)$, 那么 $af + bg \in C_0^\infty(M)$.
- 如果 $f \in C_0^\infty(M), g \in C^\infty(M)$, 那么 $fg \in C_0^\infty(M)$.

注意到如果 M 是紧致的，那么 M 上任意一个光滑函数都是紧支的.

紧支光滑实值函数也被称为**鼓包函数** (或者**测试函数**). 在很多具体问题中，往往会假设鼓包函数具有一些特殊的性质，例如

- 是非负的，
- 值不超过 1，
- 在一个给定的紧集上等于 1，或者其积分值为 1 等.

¶ 欧氏鼓包函数

下面在 $\mathbb{R}^n$ 上构造鼓包函数。首先考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

这个函数在 $x \neq 0$ 出显然是光滑的。在 $x = 0$ 出，注意到 $e^{-1/x}$ 的各阶导数都形如 $e^{-1/x}P(1/x)$，其中 P 是多项式，于是函数 f_1 在 $x = 0$ 处也是光滑的。(当然，f_1 在 $x = 0$ 处不是解析函数，因为在该点处其各阶导数都是 0。)

由于 $f_1(x)$ 是非负光滑函数，且当 $x \leq 0$ 时 $f_1(x) = 0$，故函数

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_1(1-x)}$$

也是非负光滑函数，其值域为 $[0,1]$，且满足

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时 } f_2(x) = 0, \qquad \text{当 } x \geq 1 \text{ 时 } f_2(x) = 1.$$

最后，为了得到 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支光滑函数，定义

$$f_3(x) = f_2(2 - |x|).$$

由 f_2 的性质易见 $f_3(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑函数，其值域为 $[0,1]$，且满足

$$\text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时 } f_3(x) = 1, \qquad \text{当 } x \geq 2 \text{ 时 } f_3(x) = 0.$$

这就是我们需要的鼓包函数。

这三个函数 f_1, f_2 和 f_3 (在 $n=1$ 时) 的图像如下所示:

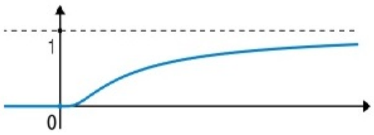

图 1.6: f_1 的图像

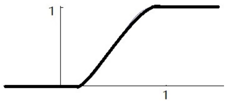

图 1.7: f_2 的图像

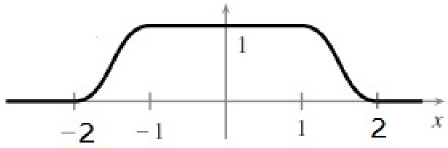

图 1.8: f_3 的图像

¶ 光滑流形上的鼓包函数

借助欧氏空间中的鼓包函数，可以在任意光滑流形上构造鼓包函数，使得它的支集落在任意事先给定的开集内，且在另一个给定的稍小的紧集上“值恒等于 1”.

定理 1.3.1.（特定鼓包函数的存在性） 令 M 是光滑流形，$K\subset M$ 是一个紧集，而 $U\subset M$ 是一个包含 A 的开子集，则存在鼓包函数 $\varphi\in C_0^\infty(M)$ 使得 $0\le\varphi\le 1$, 在 A 上 $\varphi\equiv 1$ 并且 $\mathrm{supp}(\varphi)\subset U$.

[证明思路：用有限个小区域覆盖紧集 K，其中每个小区域都包含于一个 (特别选取的) 坐标卡，然后将之前构造的“欧氏空间中的鼓包函数”复制到这些小区域上.]

证明 对于任意 $x\in A$, 存在 q 附近的坐标卡 (φ_q,U_q,V_q) 使得 $U_q\subset U$, 并且 V_q 包含于 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 3，球心为 0 的开球 $B_3(0)$. 令 $\widetilde{U}_q=\varphi_q^{-1}(B_1(0))$,

$$f_q(p)=\begin{cases} f_3(\varphi_q(p)), & p\in U_q,\\ 0, & p\notin U_q.\end{cases}$$

则在 $\widetilde{U}_q$ 上 $f_q\equiv 1$. 此外,

- $f_q\in C_0^\infty(M)$: 由定义, f_q 在 $\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})^c$ 上恒等于 0。由 $\overline{B_2(0)}$ 的紧性以及 φ_q^{-1}(视为从 V_q 到 M 的映射，即复合上从 U_q 到 M 的包含映射) 的连续性知 $\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})$ 是 M 的紧子集。从而由 M 的 Hausdorff 性质可知 $\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})$ 是 M 的闭子集[2]。于是 f_q 在开集 $\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})^c$ 上恒等于 0。由粘接引理可知 $f_q\in C_0^\infty(M)$。
- $\mathrm{supp}(f_q)\subset U_q$: 由 Hausdorff 性质可知任意 $p\notin\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})$ 都有一个开邻域跟 $\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})$ 不交。于是 $\mathrm{supp}(f_q)=\overline{\varphi_q^{-1}(B_2(0))}\subset\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})\subset U_q$.

注意由 φ_q^{-1} 的连续性, $\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})\subset\overline{\varphi_q^{-1}(B_2(0))}$. 于是 $\mathrm{supp}(f_q)=\varphi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})$ 是紧集。

因为 $\{\widetilde{U}_q\}_{q\in A}$ 是 A 的一族开覆盖，而 A 是紧致的，所以存在一个有限子覆盖 $\{\widetilde{U}_{q_1},\cdots,\widetilde{U}_{q_N}\}$. 令 $\psi=\sum_{i=1}^N f_{q_i}$，则 ψ 是 M 上的紧支光滑函数，在 A 上 $\psi\ge 1$, 并且 $\mathrm{supp}(\psi)\subset U$. 因此

$$\varphi(p):=f_2(\psi(p))$$

满足定理中的所有条件. □

作为该定理的一个简单推论，不难发现鼓包函数非常多：只要 $\dim M>0$, 向量空间 $C_0^\infty(M)$(以及 $C^\infty(M)$) 就是无穷维的.

[2]注意对于非 Hausdorff 的局部欧空间，例如有两个原点的直线，这种“开子集的紧/闭子集”未必是原空间的闭集，从而所构造的函数未必连续。

1.3.2 单位分解

¶ 单位分解

在上述证明中用到的事实是：对于任意紧集 $K \subset M$, 总可以用有限个"好的坐标邻域"去覆盖它，而每个好邻域中又可以构造出好的"局部"函数. 通过将这些 (有限个) 好的局部函数相加，最终可以得到一个在整个 M 上的整体定义的函数，使之在 K 上具有良好性质.

事实上，还可以将相同的想法用在整个流形 M 上：我们完全可以从无穷个光滑函数出发，这要这些函数满足**局部有限性**，即"在每一点附近只有有限个函数的值非 0"，那就可以将它们相加并得到一个整体的光滑函数. 更重要地是，还可以利用这样一族函数，将"局部定义"的几何/分析对象"粘合"成整体定义的对象.

定义 1.3.2. ((光滑) 单位分解)

令 M 为一个光滑流形，$\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖. 若 $\{\rho_\alpha\}$ 是一族定义在整个流形 M 上光滑函数，且满足

(1) 对于任意 α, $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$.

(2) 对于任意 α, $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$.

(3) 任意一点 $p \in M$ 都存在一个只与有限个 $\operatorname{supp}(\rho_\alpha)$ 相交的邻域.

(4) 对于任意 $p \in M$, $\sum_\alpha \rho_\alpha(p) = 1$.

则称 $\{\rho_\alpha\}$ 为一个**从属于** $\{U_\alpha\}$ **的 (光滑) 单位分解**(简记为 P.O.U.)[a]

[a]本书在讨论 P.O.U. 的时候，始终默认是光滑单位分解. 关于仿紧空间上的连续函数的单位分解的理论可以参考作者的拓扑学教材.

♣

注 1.3.3. 局部有限性条件 (3) 有两个很重要的推论：若对于任意 p，取定一个仅与有限多个 $\operatorname{supp}(\rho_\alpha)$ 相交的开邻域 W_p，则

- 因为 $\{W_p\}_{p\in M}$ 构成了 M 的一个开覆盖，而 M 是第二可数的，所以存在可数个开集 W_{p_i} 构成 M 的开覆盖. 又因为每个 W_{p_i} 都仅与有限个 $\operatorname{supp}(\rho_\alpha)$ 相交，所以仅有可数个 ρ_α 的支集是非空的. 换而言之，即使我们一开始选择的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中有不可数个开集，单位分解过程自动"删除了"它们中的绝大多数，使得仅有可数个开集保留下来 (它们仍然构成了 M 的开覆盖).
- 对于任意一点 p, 在开集 W_p 上，(4) 中的求和式[这个求和看上去可能是一个不可数求和，或者根据上一段，可以是一个可数无限求和] 事实上只是一个有限求和. 这个事实在应用单位分解时往往是至关重要的.

本节的主要目的是证明：

定理 1.3.4. (单位分解的存在性)

对于任意光滑流形 M 以及 M 的任意一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，均存在从属于 $\{U_\alpha\}$ 的一个 (光滑) 单位分解.

♡

¶ 单位分解存在性的证明

单位分解定理的证明依赖于以下来自点集拓扑的技术性引理:

引理 1.3.5.（两族加细覆盖）

对于拓扑流形 M 的任意开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$, 存在 M 的两族可数开覆盖 $\mathcal{V}=\{V_j\}$ 和 $\mathcal{W}=\{W_j\}$，使得

(1) 对于任意的 j, $\overline{V}_j$ 是紧致的，并且 $\overline{V}_j\subset W_j$.

(2) $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个**加细**: 对于任意的 j, 存在一个 $\alpha=\alpha(j)$ 使得 $W_j\subset U_\alpha$.

(3) $\mathcal{W}$ 是**局部有限的**: 任意 $p\in M$ 均有一个邻域 W_p，使得仅有有限个 W_j 满足 $W_p\cap W_j\neq\varnothing$.

♢

下面先用这个引理证明定理1.3.4，然后再证明引理1.3.5。

证明 【定理1.3.4的证明】因为 $\overline{V}_j$ 是紧集并且 $\overline{V}_j\subset W_j$, 根据定理1.3.1，存在非负函数 $\varphi_j\in C_0^\infty(M)$ 使得

$$0\le\varphi_j\le 1,\qquad \text{在 } \overline{V}_j \text{ 上 } \varphi_j\equiv 1,\qquad \operatorname{supp}(\varphi_j)\subset W_j.$$

因为 $\mathcal{W}$ 是一个局部有限覆盖，函数

$$\varphi:=\sum_j\varphi_j$$

是 M 上良好定义的光滑函数. 因为每个 φ_j 是非负的，而 $\mathcal{V}$ 是 M 的一个开覆盖, 故 φ 是 M 上的严格正函数，从而函数

$$\psi_j:=\frac{\varphi_j}{\varphi}$$

是光滑的，并且满足 $0\le\psi_j\le 1$ 和 $\sum_j\psi_j=1$.

下面通过对函数族 $\{\psi_j\}$ 重新编号, 得到从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解. 对于任意的 j, 先固定一个指标 $\alpha(j)$，使得 $W_j\subset U_{\alpha(j)}$, 然后定义

$$\rho_\alpha:=\sum_{\alpha(j)=\alpha}\psi_j.$$

注意上式右侧在每一点的附近都是一个有限求和，因此定义了一个光滑函数. 由 $\mathcal{W}$ 的局部有限性，

$$\operatorname{supp}\rho_\alpha=\overline{\bigcup_{\alpha(j)=\alpha}\operatorname{supp}\psi_j}=\bigcup_{\alpha(j)=\alpha}\overline{\operatorname{supp}\psi_j}=\bigcup_{\alpha(j)=\alpha}\operatorname{supp}\psi_j\subset U_\alpha,$$

其中第二个等号的原因是“局部有限集族的并集的闭包等于其闭包的并”(如果没有见过这个结论，请尝试证明之。)

于是函数族 $\{\rho_\alpha\}$ 就是一个从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解. □

¶ 引理1.3.5的证明

下面证明引理1.3.5. 这一证明是非常“几何”的. 首先证明

引理 1.3.6. (穷竭的存在性)

对于任意拓扑流形 M, 存在一个可数开集族 $\{X_i\}$ 使得

(1) 对于任意 j, X_j 的闭包 $\overline{X}_j$ 是紧致的.

(2) 对于任意 j, $\overline{X}_j \subset X_{j+1}$.

(3) $M = \cup_j X_j$.

这样一个子集族被称为 M 的一个**穷竭**. ♢

证明 因为 M 是第二可数的, 所以有一个可数的拓扑基. 在这个可数开集族中, 选取那些闭包是紧致集的开集, 并将它们记为 $Y_1, Y_2, \cdots$. 因为 M 是局部欧氏的, 容易看到 $\mathcal{Y} = \{Y_j\}$ 是 M 的一个开覆盖. 令 $X_1 = Y_1$. 因为 $\mathcal{Y}$ 是紧集 $\overline{X}_1$ 的开覆盖, 存在有限个开集 $Y_{i_1}, \cdots, Y_{i_k}$ 使得

$$\overline{X}_1 \subset Y_{i_1} \cup \cdots \cup Y_{i_k}.$$

令

$$X_2 = Y_2 \cup Y_{i_1} \cup \cdots \cup Y_{i_k}.$$

显然 $\overline{X}_2$ 是紧致的. 重复这一过程, 可得一列满足 (1) 和 (2) 的开集 $X_1, X_2, X_3, \cdots$. 它还满足 (3) 是因为 $X_k \supset \cup_{j=1}^{k} Y_j$. □

最后我们完成证明:

证明 【引理1.3.5的证明】对于任意 $p \in M$, 存在 j 和 $\alpha(p)$ 使得 $p \in \overline{X}_{j+1} \setminus X_j$ 和 $p \in U_{\alpha(p)}$. 因为 M 是局部欧氏的, 可以选取 p 的开邻域 V_p, W_p 使得 $\overline{V}_p$ 是紧致的, 且

$$\overline{V}_p \subset W_p \subset U_{\alpha(p)} \cap (X_{j+2} \setminus \overline{X}_{j-1}).$$

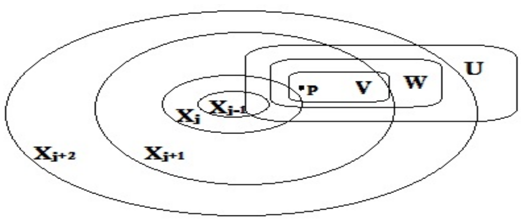

图 1.9: 邻域示意图

对于任意 j, 因为“环状区域”$\overline{X}_{j+1} \setminus X_j$ 是紧致的, 所以可以选取有限个点 $p_1^j, \cdots, p_{k_j}^j$ 使得 $V_{p_1^j}, \cdots, V_{p_{k_j}^j}$ 是 $\overline{X}_{j+1} \setminus X_j$ 的一个开覆盖. 将全体的 $V_{p_k^j}$ 记为 $V_1, V_2, \cdots$, 并且将对应的 $W_{p_k^j}$ 记为 $W_1, W_2, \cdots$. 则 $\mathcal{V} = \{V_k\}$ 和 $\mathcal{W} = \{W_k\}$ 都是 M 的开覆盖, 它们满足引理1.3.5中的所有条件. 例如, $\mathcal{W}$ 的局部有限性来自于“仅有有限多个 W_k(对应于上文中的 $j-2$,$j-1$,j 和 $j+1$) 与 $X_{j+1} \setminus \overline{X}_{j-1}$ 相交”. □

1.3.3 单位分解的应用

局部上每个流形看起来都像 $\mathbb{R}^n$, 从而可以在上面定义各种各样的数学结构. 单位分解是用于把局部光滑对象"粘合"成整体光滑对象的强力工具. 后文将会见到很多这样的例子, 例如

- 通过光滑函数/映射去逼近连续函数/映射.
- 在局部坐标卡上定义微分形式的积分, 然后应用单位分解建立流形上微分形式的积分理论.
- (在后续的黎曼几何等课程中) 构造黎曼度量, 线性联络, 定义流形上的 Sobolev 空间等.

¶ 光滑 Urysohn 引理

作为单位分解的一个直接应用, 可以把定理1.3.1 推广到 A 是闭集的情形:

推论 1.3.7. (特定鼓包函数的存在性: 闭集情形)

令 M 是光滑流形, $A \subset M$ 是一个闭集, 而 $U \subset M$ 是一个包含 A 的开子集, 则存在鼓包函数 $\varphi \in C_0^\infty(M)$ 使得 $0 \leq \varphi \leq 1$, 在 A 上 $\varphi \equiv 1$ 并且 $\mathrm{supp}(\varphi) \subset U$. ♡

证明 显然 $\{U, M \setminus A\}$ 是 M 的一个开覆盖. 令 $\{\rho_1, \rho_2\}$ 为一个从属于这个开覆盖的单位分解, 则函数 $\varphi := \rho_1$ 就是所需的鼓包函数: ρ_1 是光滑函数, $0 \leq \rho_1 \leq 1$, $\mathrm{supp}(\rho_1) \subset U$, 而且在 A 上 $\rho_1 = 1$ (因为在 A 上有 $\rho_2 = 0$) . □

注意到这个推论蕴含光滑版本的 Urysohn 引理: 对于光滑流形 M 的任意不交闭集 A 与 B, 存在光滑函数 $f : M \to [0,1]$ 使得 f 在 A 上取值为 0, 在 B 上取值为 1.

更进一步地, 由光滑流形的可度量性可知光滑流形上的闭集都是 G_δ 集。于是跟点集拓扑中的情形类似 (但稍微更复杂一点, 因为需要处理各阶导数的收敛性), 可以证明 (细节留作习题)

命题 1.3.8. (强光滑 Urysohn 引理)

对于光滑流形 M 的任意不交闭集 A 与 B, 存在光滑函数 $f : M \to [0,1]$ 使得

$$f^{-1}(0) = A, \quad f^{-1}(1) = B.$$

♠

¶ 函数的逼近

接下来考虑用流形上的光滑函数逼近连续函数这个重要问题。若 M 是紧致光滑流形, 则由上述构造的鼓包函数知 $C^\infty(M)$ 是 $C^0(M)$ 的一个无处消失且分离点的子代数, 于是由紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 引理可知 $C^\infty(M)$ 在 $C^0(M)$ 中 (关于最大值范数) 稠密, 即对于任意 $\delta > 0$, 以及 M 上的任意连续函数 g, 存在 M 上的光滑函数 f 使得

$$|f(p) - g(p)| < \delta, \qquad \forall p \in M.$$

上述论证不适用于非紧流形情形。下面应用单位分解定理统一处理光滑流形上连续函数的光滑逼近问题：

定理 1.3.9.（连续函数的 Whitney 逼近定理）

设 M 是光滑流形. 则对于任意连续函数 $g: M \to \mathbb{R}$ 和任意恒正连续函数 $\delta: M \to \mathbb{R}_{>0}$, 存在光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 使得对所有 $p \in M$，均有

$$|f(p) - g(p)| < \delta(p).$$

♡

事实上，我们将会证明这个定理的一个更强的版本. 为此需要以下定义：

定义 1.3.10.（子集上的光滑性）

设 M 是光滑流形，g 是 M 上的函数，$A \subset M$。若存在开集 $U \supset A$ 和 U 上的光滑函数 g_0，使得在 A 上有 $g_0 = g$，则称函数 g 在子集 A **上光滑**。 ♣

注意由这个定义，任意函数在单点集 $\{p\}$ 上 光滑，即使它可能在 p处 不光滑.

下面陈述并证明定理1.3.9的相对版本，它显然蕴含（取 $A = \emptyset$ 或任意单点集）了定理1.3.9：

定理 1.3.11.（函数的 Whitney 逼近定理，相对版本）

设 M 为光滑流形，$A \subset M$ 是闭子集. 那么对于任意在 A 上光滑的连续函数 $g: M \to \mathbb{R}$ 和任意恒正连续函数 $\delta: M \to \mathbb{R}_{>0}$, 存在光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 使得

(1) 对于所有 $p \in A$，有 $f(p) = g(p)$.

(2) 对于所有 $p \in M$，有 $|f(p) - g(p)| < \delta(p)$.

♡

[证明思路：对于每点 p，可以找到一个包含 p 的非常小的开集 U_p 使得 g 在 U_p 上 “几乎是常数”. 那么在 U_p 上可以用常值函数 $f(\cdot) \equiv g(p)$ (在 U_p 上) 逼近 g. 然后将所有常值函数通过从属于开覆盖 $\{U_p\}$ 的单位分解 ρ_p “粘合”.]

证明 根据定义，存在开集 $U \supset A$ 和 U 上的光滑函数使得在 A 上有 $g_0 = g$. 令 $U_0 = \{p \in U : |g_0(p) - g(p)| < \delta(p)\}$. 那么 U_0 在 M 中是开集并且 $U_0 \supset A$.

接下来构造 $M \backslash A$ 的一个 (好的) 开覆盖. 对于任意 $q \in M \backslash A$, 令

$$U_q = \{p \in M \backslash A \ : \ |g(p) - g(q)| < \delta(p)\}.$$

则 $\{U_q \mid q \in M \backslash A\}$ 是 $M \backslash A$ 的开覆盖. 由 M 的第二可数性知, 可以找到可数多个形如 $U_{q_i}, i = 1, 2, \cdots$, 的开集可以覆盖 $M \backslash A$.

令 $\{\rho_0, \rho_i\}$ 为从属于 M 的开覆盖 $\{U_0, U_{q_i} : i = 1, 2, \cdots\}$ 的单位分解, 并且定义

$$f(p) = \rho_0(p) g_0(p) + \sum_{i \geq 1} \rho_i(p) g(q_i).$$

因为求和是局部有限的，f 是 M 上的光滑函数. 同样根据定义, 在 A 上有 $f = g_0 = g$.

此外，对于任意 $p \in M$，有

$$\begin{aligned}|f(p)-g(p)| &= \left|\rho_0(p)g_0(p)+\sum_{i\geq 1}\rho_i(p)g(q_i)-\sum_{i\geq 0}\rho_i(p)g(p)\right| \\ &\leq \rho_0(p)|g_0(p)-g(p)|+\sum_{i\geq 1}\rho_i(p)|g(q_i)-g(p)| \\ &< \rho_0(p)\delta(p)+\sum_{i\geq 1}\rho_i(p)\delta(p) \\ &= \delta(p),\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式，$\rho_0(p)|g_0(p)-g(p)|<\rho_0(p)\delta(p)$ 由以下事实得到：

- 若 $p \in U_0$, 那么根据定义 $|g_0(p)-g(p)|<\delta(p)$,
- 若 $p \notin U_0$, 那么 $\rho_0(p)$=0。

类似地通过讨论 p 是否在 U_{q_i} 中，可得不等式 $\rho_i(p)|g_i(q)-g(p)|<\rho_i(p)\delta(p)$。注意以上不等式中至少有一个严格不等式成立，故定理得证。 □

通过讨论每个分量，显然对于任意 $\mathbb{R}^K$-值映射同样的结论都成立.

定理 1.3.12. **($\mathbb{R}^K$-值映射的 Whitney 逼近定理, 相对版本)**

令 M 为光滑流形，$A \subset M$ 是闭子集. 那么对于任意在 A 上光滑的连续映射 $g: M \to \mathbb{R}^K$ 和任意恒正连续函数 $\delta: M \to \mathbb{R}_{>0}$, 存在光滑映射 $f: M \to \mathbb{R}^K$ 使得

(1) 对于所有 $p \in A$，有 $f(p)=g(p)$.

(2) 对于所有 $p \in M$，有 $|f(p)-g(p)|<\delta(p)$.

♡

定理1.3.11同样蕴含 Tietze 扩张定理的光滑版本:

定理 1.3.13. **(光滑 Tietze 扩张定理)**

设 A 是光滑流形 M 中的闭子集，而 f 是 A 上的一个光滑函数，则存在 $g \in C^\infty(M)$ 使得在 A 上有 $f=g$.

♡

证明 由拓扑学中的 Tietze 扩张定理，存在 M 上的连续函数 f_1 使得在 A 上 $f_1=f$。再应用定理1.3.11即得欲证。 □

注 1.3.14. 上述定理中的条件“函数在一个闭子集上光滑”还可以被减弱:

定理 1.3.15. **(Whitney 扩张定理)**

令 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为闭子集，并且 $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\leq m}$ 是一族定义在 A 上的函数。假设它们在以下意义中是**相容的**:

$$f_\alpha(x)=\sum_{|\beta|\leq m-|\alpha|}\frac{f_{\alpha+\beta}(y)}{\beta!}(x-y)^\beta+o(|x-y|^{m-|\alpha|}).$$

那么存在 $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ 使得

(1) 对于任意 $|\alpha|\leq m$, 在 A 上有 $\partial^\alpha f=f_\alpha$

(2) f 在 $A^c=\mathbb{R}^n \setminus A$ 上是实解析函数.

♡