第 3 章 光滑向量场

本章考虑流形上分析的基本研究对象之一：光滑向量场。

3.1 光滑向量场

3.1.1 光滑向量场

¶ 回顾切向量

设 M 是光滑流形。根据定义，在 $p \in M$ 处的切向量 X_p 是一个满足 Leibniz 法则

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_g(p)$$

的线性映射 $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$，并且定义中的 $C^\infty(M)$ 可以替换为 $C^\infty(U)$, 其中 U 是 p 的任意开邻域. 特别地，对于 p 附近的任意局部坐标卡 (φ, U, V), 切向量 $\{(\partial_i)_p \mid 1 \le i \le m\}$ 组成了 T_pM 的一组基, 其中

$$(\partial_i)_p = (d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\,(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}) : C^\infty(U) \to \mathbb{R},$$

$$f \mapsto (\partial_i f)_p = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)),$$

其中 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \mid 1 \le i \le n\}$ 是 $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ 标准基. 于是任意切向量 $X_p \in T_pM$ 都能被写成

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i (\partial_i)_p.$$

还有一种更几何的方式理解这些向量: 不妨设 (φ, U, V) 是以 p 为中心的坐标卡 (即 $\varphi(p) = 0 \in V$)。考虑曲线

$$\gamma_i(t) = \varphi^{-1}((0, \cdots, 0, t, 0, \cdots, 0)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

其中 t 位于第 i 个位置, 且 ε 充分小使得对于所有 $-\varepsilon < t < \varepsilon$ 都有 $(0, \cdots, 0, t, 0, \cdots, 0) \in V$。如果将 M 嵌入到 $\mathbb{R}^K$, 则 γ_i 可被视为是欧氏空间 $\mathbb{R}^K$ 中的一条曲线，此时 $(\partial_i)_p$ 可被视为该欧氏曲线在 p 点处的切向量。

也可以不嵌入欧氏空间，给出光滑流形 M 中曲线在 p 点处切向量的“内蕴”定义:

定义 3.1.1.（曲线的切向量）

对于 M 中任意光滑曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 称向量

$$\dot\gamma(0) := (d\gamma)_0(\frac{d}{dt}) \in T_{\gamma(0)}M$$

为曲线 γ 在 $p = \gamma(0)$ 处的**切向量**，其中 $\frac{d}{dt}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的单位切向量. ♣

注意到，根据微分的定义, 对于任意 $f \in C^\infty(M)$,

$$\dot\gamma(0)(f) = d\gamma_0(\frac{d}{dt})(f) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (f \circ \gamma).$$

可以验证上面所描述的曲线 γ_i，作为 M 上的曲线，它在 p 处的切向量就是 $(\partial_i)_p$.

¶ 流形上的光滑向量场

光滑向量场在平面或者高维欧氏区域的分析理论中起到了非常重要的作用。根据定义，欧氏区域 V 上的一个光滑向量场指的是“在区域中每一点都指定一个向量，且这些向量光滑依赖于基点”[1]。此处，向量光滑依赖于基点的准确含义如下：

如果将向量场表示为

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x,$$

那么每个系数函数 $a_i(x)$ 都光滑地依赖于 $x \in V$.

这里用“偏导数”取代欧式空间中向量 e_i 表示向量场的优势在于: X 不仅仅是一族“几何的箭头”, 还是作用在 $C^\infty(V)$ 的一阶微分算子 (这再次说明了向量场在分析中的重要性).

下面在流形上定义光滑向量场。显然，只要“光滑地”在每点 $p \in M$ 指定一个向量 $X_p \in T_pM$，得到的就是光滑向量场。如何“光滑地”指定呢？在欧氏空间情形，是用整体定义的坐标向量场 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 为“标杆”定义光滑性。对于流形，并没有整体定义的坐标向量场，但这也无妨，因为光滑性本身就是局部性质，而在光滑流形上，局部确实有坐标向量场！于是，下面这个定义就是非常自然的：

定义 3.1.2.（流形上的光滑向量场） 若对光滑流形 M 上每一点都指定了一个切向量 $X_p \in T_pM$，则称 X 为 M 上的一个向量场。若该指定还满足如下的光滑性条件，

对于 M 上的任意坐标卡 (φ, U, V)，若记

$$X_p = X^1(p)\partial_1 + \cdots + X^n(p)\partial_n = \sum_i X^i(p)\partial_i,$$

则系数函数 $X^1, \cdots, X^n$ 都是 U 上的光滑函数，

则称 X 为 M 上的一个**光滑向量场**. ♣

M 上全体光滑向量场的集合记为 $\Gamma^\infty(TM)$，它有一个非常好的代数结构:

$$X_1, X_2 \in \Gamma^\infty(TM), f_1, f_2 \in C^\infty(M) \quad \Longrightarrow \quad f_1X_1 + f_2X_2 \in \Gamma^\infty(TM).$$

这说明 $\Gamma^\infty(TM)$ 不仅仅是一个 (无穷维) 向量空间, 而且它还是代数 $C^\infty(M)$ 上的模.

上述定义中有一个潜在的问题：验证向量场的光滑性时，是否真的需要对每个坐标卡都验证光滑性条件，还是只要对一族覆盖 M 的坐标卡验证光滑性条件就够了？由两个坐标卡相交处转移映射的光滑性，不难验证坐标向量场之间的变换也是光滑的，于是下述命题是显然的：

命题 3.1.3. (光滑性判据 I) 若 X 是 M 上的一个向量场，且存在覆盖 M 的一族坐标卡，使得在每个坐标卡中 X 满足上述光滑性条件，则 X 是 M 上的光滑向量场。 ♠

以下在提到向量场时，如无例外说明，总是默认是光滑向量场.

[1] 当然，也可以定义连续向量场甚至是不连续向量场. 但是除非额外说明，在本书中只考虑光滑的对象.

3.1.2 光滑向量场的多副面孔

¶ 作为切丛光滑截面的光滑向量场

回忆一下，如果把所有点处的切空间都放在一起，所得的集合 TM 上可被赋予光滑流形的结构，使得典范投影

$$\pi : TM \to M, \quad \pi(p, X_p) = p$$

是一个淹没映射。TM 就是流形 M 的切丛。另一方面，注意到"赋予每点 $p \in M$ 一个向量 $X_p \in T_pM$"等价于说"给定一个满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}$ 的映射 $X : M \to TM$". 一般地，

定义 3.1.4.（切丛的截面）

若映射 $X : M \to TM$ 满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}$，则称 X 为切丛 TM 的一个**截面**. 若 X 还是光滑映射，则称它为 TM 的一个**光滑截面**。♣

显然 TM 的截面就是流形 M 上的向量场。下面证明切丛 TM 的光滑截面跟 M 的光滑向量场是同义词，从而给出了向量场光滑性的另一个刻画（这也是记号 $\Gamma^\infty(TM)$ 的真正含义）：

命题 3.1.5. (光滑向量场 = 切丛的光滑截面)

X 是 M 上的光滑向量场当且仅当它是切丛 TM 的光滑截面. ♠

证明 设 (φ, U, V) 是 M 的一个局部坐标卡，则 $(T\varphi, \pi^{-1}(U), V \times \mathbb{R}^n)$ 是 TM 的一个局部坐标卡，其中 $T\varphi$ 由下式给出

$$T\varphi(p, X_p) = (\varphi(p), d\varphi_p(X_p)),$$

其中当视作 $\mathbb{R}^n$ 中的向量时，$d\varphi_p(X_p)$ 应该被解释为 $d\varphi_p(X_p)$ 在基 $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$ 下的系数. 根据定义 $d\varphi(\partial_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$，从而由 $d\varphi_p$ 的线性性可知

$$X_p = \sum X^i(p)(\partial_i)_p \quad \Longrightarrow \quad d\varphi_p(X_p) = \sum X^i(\varphi^{-1}(x)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}.$$

因此，映射 X 在局部坐标系下的表达式是

$$T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^n) = \left(x^1, \cdots, x^n, X^1(\varphi^{-1}(x)), \cdots, X^n(\varphi^{-1}(x))\right).$$

于是映射 $X : M \to TM$ 是光滑映射当且仅当所有的系数 X^i 是光滑的. □

注 3.1.6. 注意即使向量场 X 是整体定义的 (即处处有定义并且 独立于局部坐标卡选取)，坐标向量场 ∂_i 和 X 在它们下的系数 X^i 都仅仅是局部定义的 (即仅定义在 U 上 并且 依赖于坐标卡映射的选取). 虽然在每个坐标卡中都能将任意向量场 X 写成 n 个特殊向量场 (例如坐标向量场) 的线性组合，一般而言不存在恰好 n 个在 M 上的整体定义的向量场，使得任意向量场都能写成它们的线性组合：后者需要对 M 加上非常强的拓扑限制才能做到。

¶ 作为导子的光滑向量场

还可以用定义2.1.4中导子的语言理解向量场。因为代数 $C^\infty(M)$ 是它自身的双模，所以根据该定义，任意满足 Leibniz 法则

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg), \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

的线性映射 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 的取值于它自身的一个导子。

另一方面，设 X 为光滑流形 M 上 (未必光滑) 的向量场. 对于任意 $f \in C^\infty(M)$ 以及任意 $p \in M$，向量 X_p 作用在 f 上会给出了一个数 $X_p(f) \in \mathbb{R}$. 因此 X 将 M 上的光滑函数 f 映为到函数

$$Xf : M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto Xf(p) := X_p(f).$$

显然，若 X 是光滑的，则 Xf 是光滑的。事实上，

命题 3.1.7. (光滑性判据 II) 光滑流形 M 上的向量场 X 光滑当且仅当对任意 $f \in C^\infty(M)$,都有 $Xf \in C^\infty(M)$. ♠

证明 练习. [提示: 如何得到向量 X_p 在局部坐标下的系数 X^i? 参见定理2.4.6的证明！] □

于是 M 上的每个光滑向量场都给出了一个线性映射

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad f \mapsto Xf.$$

此外，根据切向量 $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 所满足的 Leibniz 法则, 立刻可知向量场 X 满足 Leibniz 法则

$$X(fg) = fX(g) + X(f)g, \qquad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

因此 M 上的光滑向量场 X 都是 $C^\infty(M)$ 的取值于它自身的一个导子. 反之，

命题 3.1.8. （光滑向量场 = 导子） X 是 M 上的光滑向量场当且仅当它是 $C^\infty(M)$ 的取值于它自身的导子. ♠

证明 只需证明 $C^\infty(M)$ 的取值于它自身的导子 D 都是 M 上的光滑向量场。为此，对于任意 $p \in M$, 定义

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \quad X_p(f) := Df(p).$$

不难验证 X_p 是 $C^\infty(M)$ 上取值于 $\mathbb{R}$ 的一个导子，从而由定义2.1.5，X_p 是在 p 处的切向量. 由此可得 M 上的向量场 X, 它的光滑性可由命题3.1.7得到. □

这可以作为光滑向量场的第三种 (等价的) 定义.

¶ 光滑流形上的微分算子

在 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上的 n 阶微分算子 P 指的是以下形式的算子

$$P = \sum_{|j| \le n} a_j(x^1, \cdots, x^m) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{j_m},$$

其中为了简单起见，总假设系数 a_j 是光滑的，从而 P 是一个从 $C^\infty(U)$ 到 $C^\infty(U)$ 的一个线性算子。类似地，可以定义

定义 3.1.9.（流形上的微分算子）

若线性映射 $P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 在局部上具有以上形式，即在任意局部坐标卡 (φ, U, V) 中 P 可以被表示为 (其中为了方便起见依然假设 $a_j \in C^\infty(U)$)

$$P = \sum_{|j| \le n} a_j(p)\,(\partial_1)^{j_1} \cdots (\partial_m)^{j_m},$$

则称 P 为光滑流形 M 上的 n 阶**微分算子**。.

因此根据定义，M 上的光滑向量场都是 M 上 (特殊) 的一阶微分算子.

一般地，如果 $X_1, \cdots, X_n$ 是 M 上的光滑向量场, 那么复合映射 $X_1 \circ \cdots \circ X_n$ 是 M 上的 n 阶微分算子. 反过来，应用单位分解不难证明，任意 n 阶微分算子在局部上可以被表示成“至多 n 个光滑向量场的复合”的线性组合 (其中我们视“乘以光滑函数”为“用 0 个向量场作用在光滑函数上”)。

注 3.1.10. 注意到根据定义，任意微分算子满足下面的**局部性**:

$$\operatorname{supp}(Pf) \subset \operatorname{supp}(f), \qquad \forall f \in C^\infty(M).$$

Peetre 证明反方向也是正确的，

> 光滑流形 M 上任意满足上述局部性的线性映射 $P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 都是 M 上的一个微分算子。

这可被视为是流形上微分算子 (以及更一般的向量丛截面上的微分算子) 的内蕴定义。

3.1.3 光滑向量场的 Lie 括号

¶ 向量场的可交换性

在多元微积分中的一个非常重要的性质是任意两个偏导数都可交换，即

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \forall i, j.$$

该性质对于流形上任意给定局部坐标系中的坐标向量场也成立：

引理 3.1.11.（坐标向量场的可交换性）

对于任意坐标卡 (φ, U, V) 以及任意 $1 \le i, j \le m$, 都有 $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$.

证明 对于任意 $f \in C^\infty(U)$,

$$\partial_i\partial_j f = \partial_i\left[\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\circ\varphi\right] = \frac{\partial\left[\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right]}{\partial x^i}\circ\varphi = \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j}\circ\varphi,$$

于是由欧氏空间结论可知引理成立。 □

类似地，任给两个向量场 $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$, 可以定义 XY 为如下的复合映射

$$XY: C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad f \mapsto X(Yf).$$

然而，一般地，对于两个向量场而言，XY 与 YX 是不同的：

例 3.1.12. 考虑 $M=\mathbb{R}$，$X=x\frac{d}{dx}$，$Y=\frac{d}{dx}$，则对于任意 $f\in C^\infty(M)$，

$$XY(f)=X(f')=xf''$$

而

$$YX(f)=Y(xf')=xf''+f'.$$

事实上，上述例子也可以看出，虽然 XY 和 YX 都是二阶微分算子，但它们的二阶项是一样的（从而复合两个向量场时得到的二阶项是“可交换”的），于是它们的差是一个一阶微分算子 (向量场)：

命题 3.1.13.（向量场的换位子依然是向量场）

若 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$, 则 $XY-YX\in\Gamma^\infty(TM)$.

证明方法很多，留作习题。

注 3.1.14. 该“最高阶可交换性”现象还可以推广到流形上高阶微分算子的情形：若 P_1 是 m_1 阶微分算子，P_2 是 m_2 阶微分算子，则 $P_1\circ P_2$ 和 $P_2\circ P_1$ 都是 m_1+m_2 阶微分算子，而 $P_1\circ P_2-P_2\circ P_1$ 是 m_1+m_2-1 阶微分算子.

注 3.1.15. 注意,参与“复合”的元素是向量场而不是向量:对于两个向量 $X_p,Y_p\in T_pM$，不能定义其复合 X_pY_p，因为对于 Y_p 定义域中的元素 $f\in C^\infty(M)$，Y_pf 是一个数，不再是函数，于是 $X_p(Y_pf)$ 是没有意义的.

¶ Lie 括号

向量场 $XY-YX$ 在流形的分析中扮演了非常重要的角色：

定义 3.1.16.（两个向量场的 Lie 括号）

对于任意 $X,Y\in\Gamma^\infty(TM)$, 称

$$[X,Y]=XY-YX$$

为 X 和 Y 的 **Lie 括号**.

可以证明，Lie 括号运算

$$[\cdot,\cdot]:\Gamma^\infty(TM)\times\Gamma^\infty(TM),$$

具有如下性质：

命题 3.1.17.（$\Gamma^\infty(TM)$ 的 Lie 代数结构）

对于任意 $X,Y,Z\in\Gamma^\infty(TM)$，有

(a)【反对称性】$[X,Y]=-[Y,X]$.

(b)【$\mathbb{R}$-线性性】$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

(c)【Jacobi 恒等式】$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

用代数的语言来讲，这说明 $[\cdot,\cdot]$ 给出了线性空间 $C^\infty(M)$ 上的一个 Lie 代数结构。