4.4 Lie 群作用

群是用于描述对称性的数学语言. 从这个角度看，Lie 群所描述的是“一族光滑依赖于 (有限个) 参数的对称”，这是 Lie 群在几何、分析、物理等各领域应用广泛的根本原因. 本节就从“Lie 群作为光滑流形的对称群”的角度，展开初步的讨论.

4.4.1 光滑作用

¶ 光滑作用

设 M 为一个光滑流形. 那么 M 上“最大的对称群”就是 M 到自身的微分同胚群 $\text{Diff}(M)$. 但它不是一个 Lie 群，因为它“太大了”：其维数是无穷的，即它是包含无穷多参数的对称. [6] 另一方面，前面已经见过参数最少的“光滑族对称”：完备向量场生成的流 ϕ_t，只有一个参数 $t \in \mathbb{R}$，并把 $\mathbb{R}$ 实现为 M 的一个光滑族对称群. 类比于该情形，“Lie 群 G 是光滑流形 M 的对称群”的数学表述就应该是“G 中每个元素都对应于 $\text{Diff}(M)$ 的元素，且该对应保持群运算 (并满足特定光滑性要求)”：

定义 4.4.1.（Lie 群作用）

设 G 是一个 Lie 群而 M 是一个光滑流形.

(1) *称任意群同态 $\tau : G \to \text{Diff}(M)$ 为 G 在 M 上的一个* **作用**. *换句话说, 所谓“G 在 M 上的一个* **作用**”*，指的是：对于 $g \in G$, 都指定一个微分同胚 $\tau(g) : M \to M$，且该指定满足*

$$\tau(g_1g_2) = \tau(g_1) \circ \tau(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

(2) *若 $\tau : G \to \text{Diff}(M)$ 是 G 在 M 上的一个作用 G，且赋值映射*

$$\text{ev} : G \times M \to M, \quad (g, m) \mapsto \tau(g)(m)$$

是光滑的，则称该作用是 **光滑作用**. ♣

注意此处定义群作用的光滑性跟前文中定义流的光滑性，方式是一致的，绕开了在 $\text{Diff}(M)$ 定义拓扑与光滑结构这个复杂的问题. 为了简洁起见，

- 下文在不引起混淆地情况下，总是记 $\tau(g)(m)$ 为 $g \cdot m$.
- 如无例外说明，本书后文也只考虑光滑作用.

[6] 粗略地看，可以将 $\text{Diff}(M)$ 当作是一个“无穷维 Lie 群”(基于 C^∞ 拓扑的特殊性，其局部模型空间是 Fréchet 空间)，此时不难“看出”其 Lie 代数不是别人，正是熟悉的 $\Gamma^\infty(TM)$, 即 M 上全体光滑向量场组成 Lie 代数：几何上看，切向量是参数曲线的“变化率”(见习题)，而注3.3.5中已指出，$\text{Diff}(M)$ 中过 Id 的曲线 (即 M 上的一族光滑依赖于 t 且满足 $\rho_0 = \text{Id}$ 的微分同胚 $\rho_t : M \to M$)，其在在任意时刻的变化率都是 M 上的一个向量场. “微分同胚群-光滑向量场代数”这个无穷维 Lie 群-Lie 代数对应有很多跟有限维类似的性质，比如在习题 3 中也看到，正如有限维情形 Lie 代数是单参数群可交换的障碍一样，$\Gamma^\infty(TM)$ 是 $\text{Diff}(M)$ 中单参数群可交换的障碍. 此外，这个对应还有很多很有意思的“子对应”，例如命题4.2.13揭示了“$\Gamma^\infty(TG)$ 中由左不变向量场 (等价于它们生成的流) 组成的子代数对应于 $\text{Diff}(M)$ 中由右平移组成的子群 (等价于 G 本身)”，而 Riemann 几何中的“Killing 向量场-等距同构群对应”以及辛几何中的 (无穷维)“辛/Hamilton 向量场-辛/Hamilton 微分同胚群对应”都是意义深远的。不过，如果深究一下，也可以发现这个无穷维对应远远不如有限维情形那么好，比如，并非每个向量场（即 Lie 代数 $\Gamma^\infty(TM)$ 中的元素）都对应于 $\text{Diff}(M)$ 的某个单参数子群；即使限制在紧流形或者紧致向量场情形，使得这样一个对应确实存在，在单位元附近的“指数映射”也未必是 (无穷维) 局部微分同胚.

- 若光滑流形 M 上赋予了光滑 G 作用 τ，则将“M 和 τ”简称为一个 **G-流形**. 此外，若 M 子集 S 在群作用下不变，即

$$g \cdot s \in S, \quad \forall g \in G, s \in S,$$

则称 S 为一个 G **不变集合**.

注 4.4.2. 上面定义给出的是 Lie 群 G 在光滑流形 M 上的**左作用**. 类似地，也可以定义 G 在 M 上的 **右作用**为一个反同态 $\hat{\tau}: G \to \mathrm{Diff}(M)$, 即满足

$$\hat{\tau}(g_1 g_2) = \hat{\tau}(g_2) \circ \hat{\tau}(g_1), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

不难在左作用和右作用之间进行转化,例如对于任意左作用 τ,通过令 $\hat{\tau}(g)(m) = \tau(g^{-1})(m)$ 就得到一个右作用 $\hat{\tau}$.

下述命题是显然的：

命题 4.4.3.（“子”作用）

设 Lie 群 G 光滑地作用在流形 M 上.

(1) 若 H 是 G 的 Lie 子群，则 G 作用限制到 H 后是 H 在 M 上的光滑作用。

(2) 若 M 的光滑子流形 S 是 G 不变子集，则 G 作用限制到 S 后是 G 在 S 上的光滑作用。

¶ 光滑作用的例子

例 4.4.4. 对于任意 $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，令

$$r_\theta : S^2 \to S^2, \quad (x^1, x^2, x^3) = (x^1 \cos\theta - x^2 \sin\theta, x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta, x^3)$$

S^2 的以 x^3 轴为旋转轴且“从 x^3 正向看过去为逆时针旋转”的旋转变换. 则每个 r_θ 都是微分同胚，且 $r_{\theta_1} r_{\theta_2} = r_{\theta_1+\theta_2}$. 故 $\theta \mapsto r_\theta$ 是 S^1 在 S^2 上的一个光滑作用.

例 4.4.5. 任意线性 Lie 群可以通过线性变换典范地作用在相应维数的欧氏空间上。例如，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的典范线性作用为

$$\forall X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \rightsquigarrow \quad X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto Xv.$$

这也是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的子群被称为线性 Lie 群的原因.

例 4.4.6. 将上述 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 作用限制在特殊正交群 $SO(n)$ 上，就得到 $SO(n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑作用. 在该作用下，S^{n-1} 是一个不变子集，因而自动得到 $SO(n)$ 在 S^{n-1} 上的一个光滑作用. 【事实上，进一步可以得到上述 S^1 在 S^2 上的旋转作用：只需把 S^2 上的 $SO(3)$ 作用限制到子群 $SO(2) \times \{e\} \simeq S^1$ 即可.】

例 4.4.7. 任何 Lie 群 G 都能够以左乘、右乘逆元以及共轭这三种方式作用在它自身之上. 例如，G 在 G 自身的共轭作用是由

$$g \in G \quad \rightsquigarrow \quad c(g) : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}.$$

给出的. 更一般地, G 的任意 Lie 子群 H 能够以左乘、右乘以及共轭方式作用在 G 上.

例 4.4.8. 在例4.2.10中出现的伴随表示 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是一个群作用. 事实上，李群的“表示”是一类特殊的群作用：若 Lie 群 G 作用在线性空间 V 上，且 $\tau(G) \subset \mathrm{GL}(V)$，

则称该作用为 G 的一个**表示**. “Lie 群表示论”一方面利用 Lie 群研究连续族的线性对称，另一方面利用线性代数研究 Lie 群本身的结构，是一个优美且重要的数学分支。

例 4.4.9. 设 X 是 M 上的一个完备向量场，那么它生成的流

$$\rho:\mathbb{R}\to \mathrm{Diff}(M),\quad t\mapsto \rho_t=\phi_t^X$$

是 $\mathbb{R}$ 在 M 上的一个光滑作用. 反之, 任给 $\mathbb{R}$ 在 M 上的光滑作用 $\rho:\mathbb{R}\to\mathrm{Diff}(M)$, 令

$$X(m)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho_t(m)$$

其中 $\gamma_m(t):=\rho_t(m)$, 就得到 M 上的一个光滑向量场 X, 使得该 $\mathbb{R}$ 作用正好就是 X 生成的流.

¶ 群作用的线性化

于是 Lie 群 G 在 M 上的光滑作用是一个“光滑的”群同态 $\tau: G\to \mathrm{Diff}(M)$. 既然 Lie 群同态会诱导出相应的 Lie 代数之间的同态，那么自然的问题是 τ 是否也会诱导出某个 Lie 代数同态 $d\tau:\mathfrak{g}\to\Gamma^\infty(TM)$? 如果这个映射 $d\tau$ 存在，那么它可以被视为是 Lie 群作用的线性化.

事实上，不难找到这个映射 $d\tau$. 例4.4.9事实上已经揭示了群 G 为 $\mathbb{R}$ 时如何找到所求的向量场，而这也为一般情形提供了思路：对于一般的 Lie 群 G 作用，以及任意 $X\in\mathfrak{g}$，可以先得到 G 中的单参数子群 $\exp(tX)$(它可被视为“藏在 G 中的一个 $\mathbb{R}$”)；G 中的这个单参数子群通过群同态 τ 可以给出 $\mathrm{Diff}(M)$ 中的单参数子群 $\tau(\exp(tX))$，从而用例4.4.9的方法就可以给出所需要的向量场：

定义 4.4.10.（诱导向量场） 假设 Lie 群 G 光滑地作用在 M 上. 对于任意的 $X\in\mathfrak{g}$ 以及任意 $m\in M$，令

$$X_M(m)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(tX)\cdot m.$$

向量场 X_M 是被称为 Lie 代数元素 X 在该群作用下的**诱导向量场**. ♣

注意向量场 X_M 的从 $m\in M$ 出发的积分曲线就是 $\gamma_m(t)=\exp(tX)\cdot m$, 因为由定义可知 $\gamma_m(0)=m$，以及

$$\dot\gamma_m(t)=\frac{d}{dt}(\exp tX\cdot m)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(\exp sX\circ\exp tX\cdot m)=X_M(\gamma_m(t)).$$

换句话说,X_M 生成的流就单参数 Lie 群 $\exp(tX)$ 在群作用下的像集合 $\rho_t=\tau(\exp(tX))$.

于是，从 Lie 群 G 在光滑流形 M 上的任意光滑作用 τ 开始，可以得到一个映射

$$d\tau:\mathfrak{g}\to\Gamma^\infty(M),\quad X\mapsto X_M.$$

线性映射 $d\tau$ 可以被视作是映射 $\tau: G\to\mathrm{Diff}(M)$ 的微分，不过跟之前熟悉的情况稍有不同的是，$d\tau$ 并不是一个 Lie 代数同态，而是一个 Lie 代数的反同态. 它被称为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在光滑流形 M 上的**无穷小作用**.

4.4.2 轨道与商空间

¶ 轨道与稳定化子

对于给定的群作用，下面两个概念是最自然的：

定义 4.4.11.（轨道与稳定化子）

设 G 是 Lie 群，$\tau: G \to \mathrm{Diff}(M)$ 是 G 在 M 上的一个光滑作用，$m \in M$.

(1) 称 M 的子集

$$G \cdot m = \{g \cdot m \mid g \in G\} \subset M$$

为该群作用下点 $m \in M$ 所在的**轨道**.

(2) 称 G 的子群

$$G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\} < G$$

为该群作用下点 m 的**稳定化子** (也叫做该群作用在点 m 处的 **迷向子群**). ♣

例 4.4.12. 对于例4.4.4中 S^1 在 S^2 上的旋转作用而言，

- 南极点和北极点的轨道是它们自身，其它点的轨道是所在的纬度圆；
- 南极点和北极点的稳定化子是 S^1，其它点的稳定化子是 $\{e\}$.

轨道和稳定化子都有良好的结构：

命题 4.4.13. (轨道与稳定化子的线性化)

设 $\tau: G \to \mathrm{Diff}(M)$ 是一个光滑作用, $m \in M$. 那么

(1) 轨道 $G \cdot m$ 是 M 的浸入子流形，且它在 m 处的切空间是

$$T_m(G \cdot m) = \{X_M(m) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

(2) 稳定化子 G_m 是 G 的一个闭 Lie 子群，且它的 Lie 代数是

$$\mathfrak{g}_m = \{X \in \mathfrak{g} \mid X_M(m) = 0\}.$$

♠

证明 这里仅证明 (2). 【(1) 的证明见例4.4.20之后.】因为 $G_m = ev_m^{-1}(m)$，所以 G_m 在 G 中是闭子集. 它还是 G 的一个子群，因为 τ 是一个群同态. 由 Cartan 闭子群定理，G_m 是 G 的一个闭 Lie 子群. 此外，G_m 的 Lie 代数是

$$\mathfrak{g}_m = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in G_m, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

由于对于任意 $X \in \mathfrak{g}_m$，均有 $\exp(tX) \cdot m = m$，所以在 $t = 0$ 处取微分, 就得到

$$\mathfrak{g}_m \subset \{X \in \mathfrak{g} \mid X_M(m) = 0\}.$$

反过来, 若 $X_M(m) = 0$, 则 $\gamma(t) \equiv m$（$t \in \mathbb{R}$）是向量场 X_M 的一条经过 m 的积分曲线. 于是 $\exp(tX) \cdot m = \gamma(t) = m$, 即对所有的 $t \in \mathbb{R}$，均有 $\exp(tX) \in G_m$. 故 $X \in \mathfrak{g}_m$. □

¶ 轨道空间

假设 G 光滑地作用在 M 上. 考虑 M 上的等价关系

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists g \in G\text{使得}g \cdot x = y.$$

显然每个等价类就是该群作用的一条轨道。记全体等价类即全体轨道的集合为

$$M/G := M/\sim,$$

并称之为**轨道空间**. 例如，如果群作用是传递的, 那么 M/G 只包含一个元素. 商空间 M/G 上自然赋有商拓扑. 一般而言该拓扑可能很糟糕, 比如不是 Hausdorff 的.

例 4.4.14. 考虑乘法群 $\mathbb{R}_{>0}$，它在 $\mathbb{R}$ 上有一个自然的乘法作用. 该作用共有三条轨道，即全体正数组成的轨道，记为 $+$；全体负数组成的轨道，记为 $-$，和 0 这一个元素组成的轨道，仍记为 0. 于是全体轨道的集合为 $\{+,0,-\}$. 在商拓扑下，轨道空间开集是以下集合：

$$\mathcal{T} = \{\{+\},\{-\},\{+.-\},\{+,0,-\},\emptyset\}.$$

显然，在该拓扑下，轨道空间不是 Hausdorff 的.

例 4.4.15. 考虑例4.4.4中所给出的 S^1 在 S^2 上的群作用，则 $S^2/S^1 \simeq [-1,1]$，是 Hausdorff 空间，但不是光滑流形.

例 4.4.16. 考虑 S^1 在柱面 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上自然的旋转群作用，则 $S^1 \times \mathbb{R}/S^1 \simeq \mathbb{R}$.

¶ 自由作用

为了商空间有更好的结构，需要考虑特殊的群作用.

定义 4.4.17.（自由作用）

设 Lie 群 G 光滑作用在流形 M 上. 如果对任意的 $m \in M$，均有 $G_m = \{e\}$，则称该作用是**自由的**. ♣

例如, 对任意的子群 $H \subset G$, H 在 G 上通过左乘/右乘定义的自然作用是自由的.

下面这个定理是群作用理论中根本的定理之一：如果给 Lie 群作用加一点点要求，例如群的紧性，那么轨道空间就是 Hausdorff 的；如果进一步要求作用是自由的，那么商空间还是光滑流形！

定理 4.4.18.（紧 Lie 群作用）

假设 G 是紧 Lie 群，光滑地作用在 M 上, 那么

(1) (a). 每条轨道 $G \cdot m$ 都是 M 上的嵌入闭子流形，并且满足

$$T_m(G \cdot m) = \{X_M(m) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

(b). 轨道空间 M/G 是 Hausdorff 的.

(2) 如果该作用是自由的, 那么

(a). 轨道空间 M/G 是一个 $(\dim M - \dim G)$ 维光滑流形.

(b). 商映射 $\pi : M \to M/G$ 是一个淹没. ♡

注 4.4.19. 如果 Lie 群 G 不是紧的, 但是它在 M 上的群作用是**逆紧的**，即映射

$$\alpha : G \times M \to M \times M, \quad (g, m) \mapsto (g \cdot m, m)$$

是逆紧映射，则定理依然成立 (此处我们再一次看到：映射逆紧是空间紧性条件的替代品.). 不难证明，紧 Lie 群的任意光滑群作用都是逆紧的.

例 4.4.20. 显然 G 到自身的左乘、右乘作用是逆紧的 (因为此时 α 是同胚). 此外，若一个 G 作用是逆紧的，则将它限制到 G 的任何闭 Lie 子群后也是逆紧的. 特别地，若 H 是 G 的闭子群，则 H 在 G 上的右作用是自由的且逆紧的，从而商空间 G/H 是一个光滑流形.

作为应用，下面给出命题4.4.13(1) 的证明.

证明 【命题4.4.13(1) 的证明】假设 G 光滑地作用在 M 上，则由命题4.4.13(2) 可知 G_m 是 G 的闭 Lie 子群，从而由例4.4.20，G_m 在 G 上的右作用的商空间 G/G_m 是光滑流形. 考虑映射

$$F : G/G_m \to M, \quad gG_m \mapsto g \cdot m.$$

由稳定化子 G_m 的定义可知 F 是单射，且其像集恰为 $G \cdot m$. 此外, 由

$$g \cdot F(hG_m) = g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m = F(ghG_m)$$

可知 $\tau_g \circ F = F \circ \hat{L}_g$，其中 $\hat{L}$ 为 G 在 G/G_m 上自然的左作用. 两边求微分后可得

$$(d\tau)_{h \cdot m} \circ (dF)_{hG_m} = (dF)_{ghG_m} \circ (d\hat{L}_g)_{hG_m}.$$

由于 τ_g 和 $\hat{L}_g$ 都是流形的微分同胚，它们的微分都是线性同构，于是 F 是常秩映射. 但 F 是单射，所以它是单射浸入，从而它的像 $G \cdot m$ 是 M 的浸入子流形.

最后求 $T_m(G \cdot m)$，由定理2.4.6可知任意 $X_M(m)$ 是 $G \cdot m$ 在点 m 处的切向量. 另一方面，计算维数可知

$$\dim G \cdot m = \dim G/G_m = \dim G - \dim G_m = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_m = \dim \mathrm{Im}(d\tau),$$

于是结论成立. □

¶ 传递作用与齐性空间

最后考虑一类非常特殊但在几何中很重要的群作用：

定义 4.4.21. （传递作用与齐性空间）

设 Lie 群 G 光滑作用在流形 M 上. 如果该作用只有一条轨道, 即 $M = G \cdot m$，则称该作用是**传递的**，并称 M 为一个**齐性空间**. ♣

由定义，显然每个 Lie 群都是齐性空间，但反之不然。注意对于一个给定的齐性空间 M, 传递地作用在 M 上的 Lie 群 G 不必是唯一的.

根据命题4.4.13(1) 的证明，映射

$$F : G/G_m \to M, \quad gG_m \mapsto g \cdot m$$

是单射浸入. 事实上，若 G 是紧 Lie 群，或者 G 在 M 上的作用是逆紧作用，则 F 是嵌

入. 特别地，若 G 传递地作用在 M 上，且 G 紧或者该作用逆紧，则对于任意 $m \in G$，映射 F 给出了一个微分同胚.

$$M \simeq G/G_m.$$

所以，齐性空间都是 Lie 群在自身的闭子群作用下的商空间.

由定义可知, 齐性空间具有大量可控的“将一点的邻域映为任意一点的邻域”的几何对称性 (对比一下，连通流形 M 总是可以用微分同胚将一点的邻域映为任意一点的邻域，但微分同胚群太大，不可控，对于理解 M 的结构帮助不大)，可以借用 Lie 群的优美性质去研究，是一类几何上非常好的光滑流形.

例 4.4.22. 设 $k < n$. 考虑

$$\mathrm{Gr}_k(n) = \{\mathbb{R}^n \text{ 中的 } k \text{ 维线性子空间 }\}.$$

那么 $\mathrm{O}(n)$ 在 $\mathrm{Gr}_k(n)$ 上的作用是传递的, 并且 $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ 的稳定化子是 $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$. 于是

$$\mathrm{Gr}_k(n) \simeq \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k))$$

流形 $\mathrm{Gr}_k(n)$ 被称为 **Grassmannian 流形**. 注意 $\mathrm{Gr}_1(n) = \mathbb{RP}^{n-1}$ 就是实射影空间.

例 4.4.23. 微分几何里的一个著名结果是：每个 Riemann 流形的等距变换群都是 Lie 群. 如果该等距变换群的作用是传递的，则该 Riemann 流形称为 Riemann 齐性空间。下面是三个经典的 Riemann 齐性空间（分别对应于零曲率、正曲率、负曲率情形）实现为其等距变换群的商空间：

(a) 在集合 $O(n) \times \mathbb{R}^n$ 上赋予如下乘法，

$$(A, b) \cdot (A', b') = (AA', b + Ab').$$

所得的群叫做**欧氏群**，记为 $E(n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. 考虑 $E(n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上由下式给出的群作用(这就是力学中熟知的（不保定向的）**刚体运动**)，

$$(A, b) \cdot x = Ax + b.$$

该作用是传递的. 于是 $\mathbb{R}^n$ 是齐性空间. 不仅如此, 原点的稳定化子是 $O(n)$, 故

$$\mathbb{R}^n \simeq E(n)/\mathrm{O}(n).$$

(b) 根据 Gram-Schmidt 正交化, $\mathrm{O}(n)$ 在 S^{n-1} 上的自然作用是传递的. 从而 S^{n-1} 是一个齐性空间. 不仅如此, 如果选择 m 为 S^{n-1} 的“北极点”, 那么可以验证 G_m 等于 $\mathrm{O}(n-1)$. 于是

$$S^{n-1} \simeq \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1).$$

(c) 特殊线性群 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 通过 **Möbius 变换** 作用在上半平面 $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

这个作用是传递的, 且可验证 $i \in \mathbb{H}$ 的稳定化子是 $\mathrm{SO}(2)$. 于是 $\mathbb{H}$ 是齐性空间，且

$$\mathbb{H} \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2).$$