MATH 1007.11 微分(B2) @ 2211

02/26/2025
Lec. 2
Z. W.

Last time.
- 课程内容简介
- 向量几何：概念，运算(加法与数乘)

Today：向量几何：共线/共面，点乘，叉乘.

1. 共线/共面向量

- Q：给定向量 $\vec{a}$，运用加法与数乘，能得到哪些向量？

  $\vec{a} \rightsquigarrow \vec{a}+\vec{a} = 2\vec{a}$，$3\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}$，$\lambda\vec{a}$，⋯ ~~⋯~~.

  想一想为什么？

  A：能得到所有形如 $\lambda\vec{a}$ 的向量.

  几何：当 $\vec{a}\neq 0$ 时，它们就是所有与 $\vec{a}$ 共线(平行)的向量.

  [Recall：$\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线 ⇔ 同向或反向 ⇔ 可以通过平移使之处于同一直线的向量]

- Q：给定向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，运用加法与数乘，能得到哪些向量？

  $\vec{a}$，$\vec{b}$ $\rightsquigarrow$ $\vec{a}+\vec{b}$，$2\vec{a}+\vec{b}$，$\pi\vec{a}+e\vec{b}$，⋯

  A：能得到所有形如 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 的向量.

  定义：称形如 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 的向量为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的线性组合

  几何：当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平行时，它们还是与 $\vec{a}$ (及 $\vec{b}$) 共线的向量.

  当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行时，它们就是所有与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共面的向量.

  [类比：$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面 ⇔ 可以通过平移使之处于同一平面中的向量.]

  继续类比：称形如 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$ 的向量为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的线性组合.

  继续思考：给定 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 与 $\vec{c}$，运用加法与数乘，能得到哪些向量？

  取决于 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的位置！：若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共线，则得到共线向量

  若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，则得到共面向量，

  若⋯⋯ 不共面，则得到全空间向量.

· Q: 如何判定给定向量是否共线或共面?

A: 可以用线性组合.

意思: λ, μ 不全为 0. [$\Leftrightarrow \lambda^2+\mu^2 \neq 0$]

命题: (1) $\vec{a}, \vec{b}$ 共线 $\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \neq (0,0)$ 使得 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$.

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \nu) \neq (0,0,0)$ 使得 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$.

几何性质　　　　代数刻画.

证明: (1) ($\Rightarrow$) 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $1\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0}$ 满足要求.

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线 $\Rightarrow \exists t$ 使得 $\vec{b} = t\vec{a}$

$\Rightarrow t\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$ 满足要求.

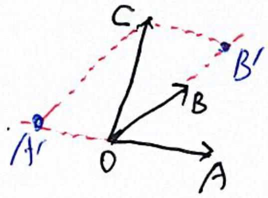
($\Leftarrow$) 设 $\exists (\lambda, \mu) \neq (0,0)$ 使得 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$.

不妨设 $\lambda \neq 0$. 则 $\vec{a} = (-\frac{\mu}{\lambda})\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ 共线.

(2). ($\Rightarrow$) 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线, 则 $\exists (\lambda, \mu) \neq 0$ 使得 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$ 满足要求.

若 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 则记 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ [取特定几何实现!]



如图, 在该平面(由共面的定义, O,A,B,C 在一个平面内)内作以 OC 为对角线的平行四边形, 则

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$

$= \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$.

$\Rightarrow \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + (-1)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ 满足要求.

($\Leftarrow$) 设 $\exists (\lambda, \mu, \nu) \neq (0,0,0)$ 使得 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$.

不妨设 $\lambda \neq 0$, 则 $\vec{a} = (-\frac{\mu}{\lambda})\vec{b} + (-\frac{\nu}{\lambda})\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面. □

2. 两个向量的点乘

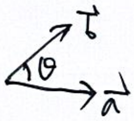
• 向量可用于表示诸多物理量，如速度，位移，力等.

Q：外力 $\vec{F}$ 对于位移 $\vec{r}$ 的物体做了多少功？

A：$\pm$（$\vec{F}$ 在 $\vec{r}$ 方向的投影）·（$\vec{r}$ 的大小）

（可以是正，也可以是负，取决于投影的方向）

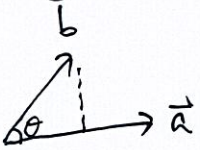
• 为了求出投影向量，需要二者的夹角.



定义：任意两个非零向量的夹角定义为"将它们放在同一个起点，所得到的介于 0 到 π 之间的角".

注：① 夹角 $=0 \Rightarrow$ 同向，夹角 $=\pi \Rightarrow$ 反向

② "$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角" + "$(-\vec{a})$ 与 $\vec{b}$ 的夹角" $=\pi$.



• 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ. 则如图可知

$$\underbrace{\text{“}\vec{b}\text{ 在 }\vec{a}\text{ 上的投影向量”}}_{\boxed{\text{记作 } \vec{b}_{\vec{a}}}} = \left\{\begin{array}{l}\text{长度为 } |\vec{b}|\cdot|\cos\theta| \\ \text{方向与 } \vec{a} \begin{cases}\text{相同 } (\theta\le\frac{\pi}{2}) \\ \text{相反 } (\theta>\frac{\pi}{2})\end{cases}\end{array}\right\}\text{的向量.}$$

$$= (|\vec{b}|\cos\theta)\underbrace{\vec{e}_{\vec{a}}}_{dir(\vec{a})}$$

$\Rightarrow$ A（续）：力 $\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 位移所做的功为

$$W = \begin{cases} |\vec{F}|\cos\theta\cdot|\vec{r}|, & (\theta\le\frac{\pi}{2}) \\ -|\vec{F}|(-\cos\theta)\cdot|\vec{r}|, & (\theta>\frac{\pi}{2}) \end{cases} = |\vec{F}|\,|\vec{r}|\cos\theta.$$

定义：向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的点乘（内积，数量积）为

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta.$$

其中 θ 为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角.

注意：两个向量点乘的结果是数，故不存在"三个向量的点乘"，更谈不上结合律.

注：① 当 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，夹角没有定义，但有 $|\vec{a}|=0$ 或 $|\vec{b}|=0$，故此时可以约定 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ←[这是数，不是向量 $\vec{0}$].

注：由 $|\cos\theta|\le 1$ 可得 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\,|\vec{b}|$. [Cauchy-Schwarz]

② 当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角 $<\frac{\pi}{2}$ 时，$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$

—————— $>\frac{\pi}{2}$ —————— <0

③ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$. [注：根据约定，$\vec{0}$ 具有任意方向. 故 $\vec{0}$ 与任意向量垂直！]

注：根据定义，总有 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}_{\vec{b}}\cdot\vec{b} = \vec{b}_{\vec{a}}\cdot\vec{a}$.

• 向量间的点乘是一种新的运算，它满足以下性质：

命题：对于任意向量 $\vec a, \vec b, \vec c$ 以及任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，均有

(1)（非负性）$\vec a \cdot \vec a \geq 0$，且 $\vec a \cdot \vec a = 0$ 当且仅当 $\vec a = \vec 0$.

(2)（对称性）$\vec a \cdot \vec b = \vec b \cdot \vec a$.

(3)（双线性性）(a) $(\vec a + \vec b) \cdot \vec c = \vec a \cdot \vec c + \vec b \cdot \vec c$

(b) $(\lambda \vec a) \cdot \vec b = \lambda \, \vec a \cdot \vec b$

证明：(1) 若 $\vec a = \vec 0$，由定义 $\vec a \cdot \vec a = \vec 0$.

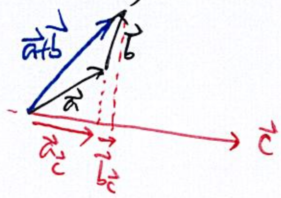
若 $\vec a \neq \vec 0$，则 $\vec a$ 与 $\vec a$ 的夹角 $\theta = 0$. 故

$$\vec a \cdot \vec a = |\vec a|\,|\vec a| \cos\theta = |\vec a|^2 > 0.$$

(2) $\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\,|\vec b| \cos\theta = |\vec b|\,|\vec a| \cos\theta = \vec b \cdot \vec a$. [此处用了：$\vec a$ 与 $\vec b$ 的夹角 $=$ $\vec b$ 与 $\vec a$ 的夹角]

(3) (a) 注意"$\vec a + \vec b$ 在 $\vec c$ 上的投影"就是"$\vec a$ 在 $\vec c$ 上的投影"+"$\vec b$ 在 $\vec c$ 上的投影".

$$(\vec a + \vec b)_{\vec c} = \vec a_{\vec c} + \vec b_{\vec c}$$



故有 $(\vec a + \vec b) \cdot \vec c = (\vec a + \vec b)_{\vec c} \cdot \vec c = (\vec a_{\vec c} + \vec b_{\vec c}) \cdot \vec c$

共线的向量间的点乘就是数的乘法

$= \vec a_{\vec c} \cdot \vec c + \vec b_{\vec c} \cdot \vec c$

$= \vec a \cdot \vec c + \vec b \cdot \vec c$.

(b) 对 $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ 讨论即可. □

• 作为推论，可以用向量大小与加法表达点乘：

推论：对于任意 $\vec a, \vec b$，均有

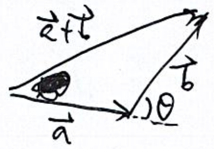
$$\vec a \cdot \vec b = \frac{1}{2}\left(|\vec a + \vec b|^2 - |\vec a|^2 - |\vec b|^2\right)$$

代数证明：$|\vec a + \vec b|^2 = (\vec a + \vec b) \cdot (\vec a + \vec b) = \vec a \cdot \vec a + \vec a \cdot \vec b + \vec b \cdot \vec a + \vec b \cdot \vec b$

$= |\vec a|^2 + 2\vec a \cdot \vec b + |\vec b|^2$

$\Rightarrow |\vec a + \vec b|^2 - |\vec a|^2 - |\vec b|^2 = 2\vec a \cdot \vec b$.

几何证明：



余弦定理

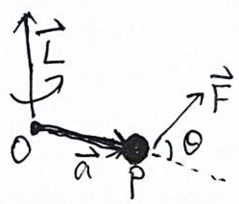
$|\vec a + \vec b|^2 = |\vec a| + |\vec b|^2 - 2|\vec a|\,|\vec b| \cos(\pi - \theta)$

$= |\vec a| + |\vec b|^2 + 2\vec a \cdot \vec b$.

3. 两个空间向量的叉乘

• 除了点乘外，对于两个空间向量，还可以定义一种新的运算，即叉乘.

它同样有着物理含义：



如图，力 $\vec F$ 作用在物体上（P处），使之绕 O 点转动，$\vec a = \vec{OP}$.

则力矩 $\vec L$ 为如下向量.

$\vec L$ = 大小为 $|\vec F||\vec a|\sin\theta$.
方向与 $\vec a,\vec F$ 垂直，且 $\vec a,\vec F,\vec L$ 形成右手系

定义：对于两个空间向量 $\vec a$ 与 $\vec b$ 定义它们的叉乘为 (外积，向量积)

$\vec a\times\vec b$ = 大小为 $|\vec a||\vec b|\sin\theta$，方向与 $\vec a,\vec b$ 垂直，且 $\vec a,\vec b,\vec a\times\vec b$ 形成右手系

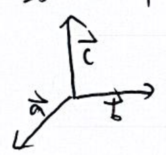
注意：叉乘仅对 $\mathbb{R}^3$ 中向量有定义，其结果也是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量.

注：① $|\vec a||\vec b|\sin\theta$ = 以 $\vec a,\vec b$ 为边的平行四边形的面积

= 2× 以 $\vec a,\vec b$ 为边的三角形面积 ⟶ 应用！

② $\vec a\times\vec b=\vec 0$ 当且仅当 $\vec a,\vec b$ 平行.

③ 考虑如图的三个两两垂直的单位向量，则



$$(\vec a\times\vec a)\times\vec b=\vec 0\times\vec b=\vec 0$$
$$\vec a\times(\vec a\times\vec b)=\vec a\times\vec c=-\vec b$$

所以叉乘不满足结合律！ [不要出现诸如 $\vec a\times\vec b\times\vec c$ 之类的表达式！]

• 下面列举叉乘运算的基本性质.

命题：对于任意空间向量 $\vec a,\vec b,\vec c$ 以及任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，有

(1)(反对称性) $\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$

(2)(双线性性) (a) $(\vec a+\vec b)\times\vec c=\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c$

(b) $(\lambda\vec a)\times\vec b=\lambda\,\vec a\times\vec b$.

证明从略.

[④ 因为 $\vec a\times\vec b$ 与 $\vec a,\vec b$ 垂直，故 $\vec a\cdot(\vec a\times\vec b)=0$，$\vec b\cdot(\vec a\times\vec b)=0$

⑤ 以 $\vec a,\vec b,\vec c$ 为边的平行六面体体积为 $|\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|$.