$\boxed{\text{Math 1007.11}}$ 数分(B2) @2211

π @2025
Lec. 9

Last time

- 多元函数：$z=f(x,y)$，图形与等高线.
- 极限：点列极限，函数极限.

注：新现象：$\boxed{\text{累次极限}}$

对于二元函数 $f(x,y)$，除了考虑 (x_0,y_0) 处的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 外，还可以考虑它在该点处的累次极限. 其基本想法是：先固定一个变量，把函数当作另一个变量的一元函数，从而可求其极限，所得的值依赖于所固定的变量，于是可再对该变量求极限

跟据顺序的不同，有两种累次极限：

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$ ← 先固定 y，对 x 求极限，然后对所得结果求极限.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

例：$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$

- $\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在. $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0.$

- 但是，$\left|x\sin\frac{\pi}{y}\right|\le x\le \rho((x,y),(0,0))$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

[极限存在，但累次极限可以不存在]

极限只关注一个点附近
累次极限关注坐标轴附近
(但只有指定方向)

例：$f(x,y)=\dfrac{x^3}{x+y^4}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=x^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0.$

但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，因为若取 $y=\sqrt[4]{-(x+x^3)}$ $(x\to 0^-)$，则

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{x+(-x-x^3)}=-1\neq 0!$$

[累次极限存在，但极限可以不存在！]

注：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，且 $\forall x\neq x_0$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

同理 $\forall y\neq y_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}$ - - - - - - - - $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

1. 多元函数连续性

请对比 $n=1$ 情形

· 接下来考虑二元函数的连续性。类似于一元函数，可定义

定义：·设 $f(x,y)$ 在 $P_0=(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义，且

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称 f 在 P_0 处连续。

·若 f 在区域 D 上每一点处都连续，则称 f 在 D 上连续。

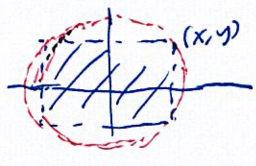
即：$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ s.t. $\rho(P,P_0)<\delta \Rightarrow |f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$.
[注意此处不必取空心邻域，因为 f 在 P_0 处有定义且显然满足上式.]

例：考虑函数 $f(x,y)=\begin{cases}(1+x^2+y^2)^{\frac{\pi}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ e^{\pi} & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{\uparrow}{=} e^{\pi} = f(0,0) \Rightarrow f$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

见 P8.5

例：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4|xy|}{\pi(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ← 面积之比.



对于 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$，由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \pi(x^2+y^2) = \pi(x_0^2+y_0^2)\neq 0$，我们有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \frac{4|x_0y_0|}{\pi(x_0^2+y_0^2)} = f(x_0,y_0)$$

但对于 $(x_0,y_0)=(0,0)$，考虑 $y=kx$，则

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0}\frac{4|k|x^2}{\pi(x^2+k^2x^2)} = \frac{4k}{\pi(1+k^2)}$$

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

结论：f 在 $(0,0)$ 处不连续，在任意 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 处连续.

注意：若固定 $x=0$，则 $f(0,y)\equiv 0$. 此时 f 在 $(0,0)$ 处连续！

· 不难把上次课最后关于极限的性质翻译成关于连续的性质.

定理：$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Longleftrightarrow \forall (x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$，有 $f(x_n,y_n)\to f(x_0,y_0)$.

定理. 设 f,g 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f\pm g,\ fg,\ \frac{f}{g}\ (g(x_0,y_0)\neq 0)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

定理：设 f 在 (x_0,y_0) 处连续，$g(z)$ 在 $z=f(x_0,y_0)$ 处连续，则 $g\circ f$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

⇒ "初等函数"在定义域内连续.

注：不难定义多元向量值函数的连续性，

$\vec{F}(x,y) = \langle F_1(x,y),\ F_2(x,y)\rangle$ 连续 $\Longleftrightarrow F_1(x,y),\ F_2(x,y)$ 连续.

由此可得：若 $\vec{F}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$G(u,v)$ 在 $\vec{F}(x_0,y_0)$ 处连续，则 $G\circ\vec{F}$ 在 (x_0,y_0) 处连续

9.2

· 还可以把一元连续函数的介值定理与最值定理推广到多元函数.

事实上, 这两个性质背后的根源是拓扑: 连通性、有界闭性 ("紧致")

定理 (介值定理) 设函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 是连通的, 且 f 是连续函数, 则对于任意 $P_1, P_2 \in D$, f 在 D 中取到 $f(P_1)$ 与 $f(P_2)$ 间的所有值.

证明: 不妨设 $f(P_1) < f(P_2)$.

用反证法, 假设 f 取不到 z_0, 且 $f(P_1) < z_0 < f(P_2)$.

下面证明 D 不是连通的. 为此, 令

$$A = D \cap f^{-1}((-\infty, z_0)), \quad B = D \cap f^{-1}((z_0, +\infty)).$$

则 $P_1 \in A$, $P_2 \in B$, 故 A, B 非空. 显然,

$$D = A \cup B, \quad 且\ A \cap B = \phi.$$

此外, A 中不包含 B 中点的聚点:

如若不然, $P_n \in B$, $P_0 \in A$ 且 $P_n \to P_0$.

但 $f(P_n) > z_0$, 于是由连续性知 $f(P_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) \geq z_0$.

这跟 $P_0 \in A$, 从而 $f(P_0) < z_0$ 矛盾.

同理 B 中不含 A 中点的聚点.

这跟 D 连通矛盾. □

注: 若 D 是道路连通, 则证明更简单: 取连接 P_1, P_2 的道路 $\vec{\gamma}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, 使得 $\vec{\gamma}(0) = P_1$, $\vec{\gamma}(1) = P_2$, 则 $g(t) := f \circ \vec{\gamma}(t)$ 是一元连续函数, 且 $g(0) = f(P_1)$, $g(1) = f(P_2)$. 于是由一元函数介值定理知上述定理成立.

[细节请阅读课本中的证明]

定理 (最值定理) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续, 则 f 在 $\overline{D}$ 取到最大值和最小值 $\boxed{(即 \exists P_1, P_2 \in \overline{D} 使 f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2), \ \forall P \in \overline{D})}$.

[注: 对于 f 在聚点 P_0 处的连续性, 依然可以用 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$ 定义. 注意闭区域的边界点都是聚点. 本课暂不考虑孤立点处的连续性] ~ 拓扑学

[结论依然成立!!]

证明: 先证 f 有界. 还是用反证法:

设 $\exists P_n \in \overline{D}$ 使得 $f(P_n) \to +\infty$. 由 (8.3) 定理 A 和定理 B, $\exists$ 子列 $P_{n_k} \to P_0 \in \overline{D}$.

于是由 f 的连续性可得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P_0)$, 与 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = +\infty$ 矛盾!

于是 f 的值域 R 是有界集. 令 $L = \inf R$, $U = \sup R$. 则 $\exists \widetilde{P_n} \in \overline{D}$, $\widetilde{Q_n} \in \overline{D}$ 使 $f(\widetilde{P_n}) \to L$, $f(\widetilde{Q_n}) \to R$. 再次使用 (8.3) 定理 A 与定理 B, 就得到 $P_1, P_2 \in \overline{D}$ 使得 $f(P_1) = L$, $f(P_2) = R$. 它们就是最小值和最大值点. □

注：类似于一元函数，还可以定义"一致连续"的概念.

定义：若区域 D 上的连续函数 $f(x,y)$ 满足：
(定义) $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ 使得 $\rho((x,y),(x_0,y_0))<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$
则称 f 是 D 上的一致连续函数.

注意它跟"连续"定义的差别
定义"连续"时，先选 (x_0,y_0) 和 ε，再选 δ，
于是 δ 与 ε、(x_0,y_0) 都有关
定义"一致连续"时，先选 ε，再选 δ，
此时 δ 只与 ε 有关，跟后面的 (x_0,y_0) 无关！

例：$f(x,y)=\pi(x^2+y^2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上连续函数.
在 $\mathbb{R}^2$ 上不是一致连续函数！
[类似于：$f(x)=x^2$ 连续但不一致连续]

跟数分一类似（有界闭区间上的连续函数一定一致连续），有

定理：有界闭区域上的连续函数一定是一致连续的.

证明思路：反证法 + 对可能出现的坏点列取子列（用 8.3 定理 A.3），导出矛盾.
[细节参见课本]

2. 多元函数的偏导数

- 在研究完连续性之后，下一个自然的问题就是多元函数的可微性

先给出一种简便但不太正确的方式，即类似于累次极限的情形，先固定一个变量，把函数当作一元函数，按照数分一所学的方式求导.
[后面会看到，在一定的附加条件下（线性代数的加持）下，这种方式非常高效地给出了所需的二元函数微分".]

定义：设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义. 如果极限
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$
存在，则称它是 f 在 P_0 处关于 x 的偏导数，记为 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. 类似，若
$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$
存在，则称 $\cdots\cdots y\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

注：由定义，若记 $f_1(x)=f(x,y_0)$，则 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_1'(x_0)$.
$\cdots\cdots$ $f_2(y)=f(x_0,y)$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_2'(y_0)$！

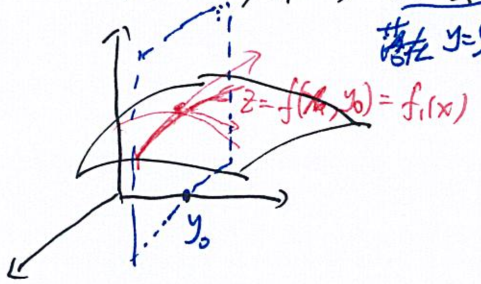
· 偏导数的几何意义.

函数 $f_1(x)=f(x,y_0)$ 在 $y=y_0$ 中的图像 $z=f_1(x)$ 是一条曲线

(平行于 xz 平面)　[它就是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线]

该曲线在 $(x_0, f_1(x_0))$ 处切线的斜率就是 $f_1'(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

落在 $y=y_0$ 平面中



类似可给出 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ 的几何意义

由于偏导数就是一元函数导数，故一元函数可导法则依然成立，比如

$$\frac{\partial(f\pm g)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\pm\frac{\partial g}{\partial x},\qquad \frac{\partial(fg)}{\partial x}=f\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}g,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}g-f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\ \cdots$$

例: 记半径为 r，高度为 h 的圆柱体体积为 $V=V(r,h)$.

求 $\frac{\partial V}{\partial r}(1,\frac{1}{2})$, $\frac{\partial V}{\partial h}(1,\frac{1}{2})$.

解: $V=\pi r^2 h$

$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r}=2\pi r h \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r}(1,\frac{1}{2})=\pi$

$\frac{\partial V}{\partial h}=\pi r^2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial h}(1,\frac{1}{2})=\pi$.

Happy π-day.