Math 1007.11 微分(B2).@2211

03/17/2025
Lec.10

Z.W.

Last time

- 多元函数连续性："极限 = 值"
- 偏导数："沿特定方向的导数" ⟶ 一元微积分

注意：① 在给定点处的偏导数仅刻画了"过该点的两条特定曲线上"的信息，
并未刻画在该点附近(= 曲面片)的信息.

特别地，在 (x_0, y_0) 处存在两个偏导数 $\not\Rightarrow$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例：
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4|xy|}{\pi(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

上次课(9.2页)已证明它在 $(0,0)$ 处不连续(甚至极限不存在).

但
$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$$
$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0.$$

② 虽然我们是把 $f(x,y)$ 中 y 固定(视为常数)，然后求出偏导数 $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，
但是！f 毕竟是二元函数！对每个固定的 y，$f_x(x,y)$ 是 x 的一元函数

⇒ $f_x(x,y)$ 还是一个关于 x, y 的二元函数！

1. 高阶偏导数

- 对于二元函数 $f(x,y)$，其偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 依然是二元函数.
  于是，可以对它们继续求偏导数！

$$f(x,y) \begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \begin{cases} f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial f_x}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \begin{cases} f_{xxx} \\ \dots \end{cases} \\ f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \begin{cases} f_{xyx} \\ \dots \end{cases} \end{cases} \\ f_y(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \begin{cases} f_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \begin{cases} f_{yxx} \\ f_{yxy} \end{cases} \\ f_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial f_y}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & \begin{cases} f_{yyx} \\ f_{yyy} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

"子又有子，子又有孙，子子孙孙无穷匮也".

例: $f(x,y)=x^y$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+y\cdot(x^{y-1}\ln x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=(yx^{y-1})\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(x^y\ln x)\ln x$.

细心的同学会发现: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

但是确实存在混合偏导不相等的例子, e.g. $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

更细心的同学则早该发言打断:上面第4行算的是 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, 第5行算的是 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, 写反了!

为什么会写反?因为我知道,对于比较好的函数,它们一定是一样的.

定理: 设 $f(x,y)$ 在区域 D 中有定义,且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 都连续,则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

["求导次序可交换"]

注: 这个定理看似奇怪. 根据前面所述,偏导数只跟 f 在特定曲线上的值有关, 那照理说就不该"可交换次序". 事实上,稍微思考一下会发现,二阶偏导 f_{xx} 跟 f_x 一样,依赖于"x-方向的值",但二阶混合偏导 f_{xy} 却是"对于 y 方向附近的每个,依赖于它在 x-方向的值",即 f_{xy} 依赖于整个邻域的值,而不再是单个方向的值! 而这也正是定理证明所借的东西.

证明: 任取 $P_0=(x_0,y_0)\in D$, 及其方形邻域 $S(P_0,\varepsilon)\subset D$.

取 $|\Delta x|,|\Delta y|<\varepsilon$. 令 $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$

$\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$

则 $\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$

$=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)$

对 φ 使用微分中值定理

$\Rightarrow \exists\, 0<\theta_1,\eta_1<1$ 使得

$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=(\Delta x)\cdot\varphi'(x_0+\theta_1\cdot\Delta x)=(\Delta x)\left[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\right]$

对 f_x (视作 y 的函数) 使用微分中值定理

$=(\Delta x)(\Delta y)f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\eta_1\Delta y)$

同理, $\exists\, 0<\theta_2,\eta_2<1$ s.t.

$\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=(\Delta x)(\Delta y)f''_{yx}(x_0+\theta_2\Delta x,y_0+\eta_2\Delta y)$

$\Rightarrow f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\eta_1\Delta y)=f''_{yx}(x_0+\theta_2\Delta x,y_0+\eta_2\Delta y)\Rightarrow f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(y_0,x_0)$. □

令 $\Delta x,\Delta y\to 0$, 并用 f_{xy}, f_{yx} 连续性.

2. 多元函数可微性

- 前面 9.4 已提到，偏导数是一种"简便但不太正确"的方式处理多元函数的可微性.
  因为它并未包含函数在一点处附近足够多的局部信息，而只涉及两个方向的信息.
  当然，还可以换个方向（即用另一个方向的平面去截曲面，考虑所得曲线的斜率）算导数.
  → [方向导数]
  但这依然不是正确的方式：一方面方向太多，另一方面也没必要（不同方向有关联）.
  那么，什么是"正确的方式"呢？

- 正确的方式还是要回到一元函数情形. 但不是像偏导数那样直接套用结论（"拿来主义"），而是真正理解一元函数的微分，消化吸收再创新.

$n=1$ 情形：$y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微有以下几个等价的描述：

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ 存在.

$$\Updownarrow$$

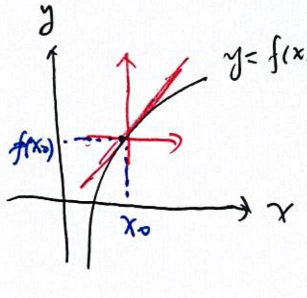
$\exists a\,(=f'(x_0))$ s.t. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{x-x_0}=0$

$$\Updownarrow$$

$\exists a$ s.t. $f(x)=\underbrace{f(x_0)+a(x-x_0)}_{f\text{ 在 }x_0\text{ 处的线性化（即切线）}}+o(x-x_0)$

$$\Updownarrow$$

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近可被 $\underbrace{y=f(x_0)+a(x-x_0)}_{\text{切线方程}}$ "很好地逼近".
精度高阶无穷小.



为了看得更清楚，我们把坐标原点移至 $(x_0, f(x_0))$ 处.
于是切线方程
$$y=f(x_0)+\overset{f'(x_0)}{a}(x-x_0)$$
在新坐标 $\begin{cases}\tilde{y}=y-f(x_0)\\ \tilde{x}=x-x_0\end{cases}$ 下就变成了
$$\underbrace{\tilde{y}}_{y\text{ 在 }f(x_0)\text{ 处的增量}}=f'(x_0)\underbrace{\tilde{x}}_{x\text{ 在 }x_0\text{ 处的增量}}$$

换而言之，"y 的变化量与 x 的变化量之间近似满足线性关系，即由线性映射
$$df_{x_0}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad h\longmapsto \boxed{df_{x_0}(h)=f'(x_0)h}$$
给出.

$h=\Delta x=x-x_0$

特殊情况：若 $f(x)=x$，则 $d(dx)_{x_0}(h)=h$. 即 $dx:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是恒等映射.

结合起来，可得 $(df_{x_0})(h)=f'(x_0)\,dx(h)$，即 $\boxed{df_{x_0}=f'(x_0)\,dx}$ ← 联上线性映射的等式！

· 有了上述讨论，二元函数的微分就不难理解了.

粗略来说：· $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微是指它在该点处可被线性映射很好地逼近.

· 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则微分 $df_{(x_0,y_0)}$ 是个线性映射!（"f 的线性化"）

不过，跟 $n=1$ 情形不同之处在于，f 是二元函数，所以它的线性化也是二元函数，即

$$df_{(x_0,y_0)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(h,k) \longmapsto df_{(x_0,y_0)}(h,k) = \quad h + \quad k.$$

[其中 $h=\Delta x = x-x_0$, $k=\Delta y = y-y_0$]

定义：设 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义. 若存在常数 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 f 在 P_0 附近可被线性映射 $ah+bk$（其中 $h=x-x_0$, $k=y-y_0$）逼近，

即
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-[a(x-x_0)+b(y-y_0)]}{\rho((x,y),(x_0,y_0))} = 0. \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x,y)=f(x_0,y_0)+a(x-x_0)+b(y-y_0)+o(\rho((x,y),(x_0,y_0)))}.$$

则称 f 在 P_0 处可微，并称线性映射

$$df_{(x_0,y_0)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(h,k) \longmapsto ah+bk$$

为 f 在 P_0 处的微分.

注意：由定义，若 f 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，即 f 在 (x_0,y_0) 处连续. 善哉！

注：若 f 在 P_0 处可微，则在曲面 $z=f(x,y)$ 上的点 $P_0'(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处，有一张平面（斜率） $z=a(x-x_0)+b(y-y_0)+f(x_0,y_0)$，它是该点处所有平面中，跟该曲面"最贴近"的平面，换而言之，它是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 P_0' 处的切平面.

注：如同一元情形，若考虑函数 $f(x,y)=x$，则 $dx(h,k)=h$.

------ $f(x,y)=y$，则 $dy(h,k)=k$.

[原因如下：更一般地，设 $f(x,y)=ax+by$. 则
$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+a(x-x_0)+b(y-y_0)+0.$$
所以根据定义，f 在 (x_0,y_0) 处可微，且 $df_{(x_0,y_0)}(h,k)=ah+bk$!]

于是，可以把 f 的微分写成
$$df_{(x_0,y_0)}(h,k)=a\,dx(h,k)+b\,dy(h,k)$$

即 $df_{(x_0,y_0)}=a\,dx+b\,dy.$

· 那么，问题来了：啰嗦了这么久，这神秘的 a, b 到底是什么？

定理：设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在 (x_0,y_0) 处两个偏导数都存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=b.$$

换而言之，f 在 (x_0,y_0) 处的微分为

$$df_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy.$$

证明：根据定义，当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时有

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+a(x-x_0)+b(y-y_0)+o(\underbrace{\rho((x,y),(x_0,y_0))}_{=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}).$$

特别地，取 $y=y_0$，即考虑 $(x,y_0)\to(x_0,y_0)$ [$\Leftrightarrow x\to x_0$]，则

$$f(x,y_0)=f(x_0,y_0)+a(x-x_0)+o(x-x_0).$$

即 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=a.$

这说明 f 在 (x_0,y_0) 处有 x-偏导数，且 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=a$.

同理可得 y-偏导数. □

· 注意：偏导数存在并不表示函数可微，因为我们已经看到，偏导数存在时函数甚至未必连续，而可微函数却一定是连续的.

事实上，即使函数连续且偏导数都存在，也未必可微.

例：$f(x,y)=|x+y|-|x-y|$ （连续函数之差依然连续）

$\Rightarrow f(x,0)=0,\ f(0,y)=0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$

但是若取 $x=y=h\to0$，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,h)-f(0,0)-(0\cdot h+0\cdot h)}{\sqrt{h^2+h^2}}=\lim_{h\to0}\frac{2|h|}{\sqrt2|h|}=\frac{2}{\sqrt2}\neq0.$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处不可微.

那么问题又来了：何时"存在偏导数 ⇒ 可微"？且听下回分解！