

Review I

1. 向量代数 v.s. 几何

向量代数 (算)

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\lambda \vec{a} = \langle \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$-\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

$$-\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

向量几何 (用)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\text{dir}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$-\vec{PQ} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle$$

• 伸长/缩短, 保向/反向

$$-\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ 或 } \vec{b} = \vec{0}$$

$$-\vec{a}, \vec{b} \text{ 共线} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \text{ s.t. } \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$$

$$-\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0) \text{ s.t. } \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$-\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \left[\text{方向角 } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}|}, \dots \right]$$

$$-\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$$-\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \cdot \hat{n}$$

$$-|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \text{Area}(\triangle) \quad \left[\text{三角形面积} \right]$$

$$-\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}]$: 右手系

$$-|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}| = \text{Volume}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 生成的平行六面体})$$

例1. 由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 和 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ 可得

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad [\text{Lagrange 恒等式}]$$

应用1. (24.2) $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2$

应用2: 设 $\triangle ABC$ 边长为 a, b, c . 则其面积 S 满足

$$S^2 = \frac{1}{4} |\vec{AB} \times \vec{AC}|^2 = \frac{1}{4} (b^2 c^2 - b^2 c^2 \cos^2 A) = \frac{1}{4} (b^2 c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right)^2)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2} = \frac{1}{16} (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \quad \text{海伦公式}$$

2. $\mathbb{R}^3$ 中的几何

• 直线方程 ① $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

② $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{方向 } \vec{v} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \times \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$

[平行, 共面, 点到直线的距离, 异面直线距离, 夹角 ...]

• 平面方程 ① $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \Leftrightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

② $ax + by + cz + d = 0 \rightarrow \text{法向 } \vec{n} = \langle a, b, c \rangle$

③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

[点到平面的距离, 两平面的夹角, ...]

$$\text{dist}(0, \pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

④ $\begin{cases} x = x_0 + t\vec{l}_1 + s\vec{l}_2 \\ y = y_0 + tm_1 + sm_2 \\ z = z_0 + tn_1 + sn_2 \end{cases}$

• 空间曲线 ① $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{② } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{切向 } \nabla F \times \nabla G$

$\rightarrow$ 曲线长度公式 $\text{Length} = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$

$\rightarrow$ 切线方程 $\vec{r} = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$

$\rightarrow$ 曲率 $k = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$

• 空间曲面 ① $F(x, y, z) = 0 \rightarrow \text{法向: } \nabla F \rightarrow \text{切平面: } \nabla F \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

② $\begin{cases} x = f_1(t, s) \\ y = f_2(t, s) \\ z = f_3(t, s) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}(u, v) \rightarrow \text{法向 } \left\langle \frac{\partial y, z}{\partial (u, v)}, \frac{\partial z, x}{\partial (u, v)}, \frac{\partial x, y}{\partial (u, v)} \right\rangle$

$\rightarrow$ 面积公式 $\text{Area} = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$

— 特殊曲面:

① 广义柱面 $f(x, y) = 0$ 或 $f(y, z) = 0$ 或 $f(x, z) = 0$

② 旋转面: " $f(y, z) = 0$ in $y-z$ 平面" $\xrightarrow{\text{绕 } z \text{ 轴转}} f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$

③ 二次曲面: **九大类**: 椭圆/抛物/双曲柱面, 椭圆面, 单叶/双叶双曲面, 二次锥面. (椭圆/双叶抛物面)

— 坐标变换: ① 平移 ② 拉伸 ③ 旋转 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

④ 极坐标, 柱坐标, 球坐标

3. 函数与连续性

- 欧氏拓扑: 度量 $\leadsto$ 邻域 $\begin{cases} \rightarrow \text{内点/外点/边界点} \rightarrow \text{开集/闭集} \\ \rightarrow \text{孤立点/聚点} \rightarrow \text{连通集} \end{cases} \leadsto \text{区域, 闭区域}$

常用的邻域: 圆形, 方形

点列的极限 $\leftrightarrow$ 按坐标求极限

① 有限点列必有收敛子列 ② 闭集包含其收敛子列的极限

多元函数: $f(x, y), F(x, y, z), \dots$

一 定义域 (区域, 闭区域, 或“行之间”) D , 值域.

一 几何表示: 图像, 等值线/等值面.

一 映射的复合: $f \rightarrow$ “曲面上的一条曲线”

一 极限: $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = a \iff$ ① P_0 是 D 的聚点 ② $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall P \in B_-(P_0, \delta)$, 有 $|f(P) - a| < \varepsilon$. (去心邻域)

[四则运算, 夹挤原理, 复合函数求极限]

注: 累次极限 v.s. 极限的关系.

比较: 累次积分 v.s. 二重积分

① 一般而言二者无必然关系.

② 若 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 且 $\forall x \neq x_0, \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$.

一 多元函数连续性: $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$. $\hookrightarrow$ 四则, 夹挤, 复合

① 介值定理: 连通集上的连续函数, 其值域是一个区间.

② 最值定理: 有界闭集上的连续函数, 取到其最大值与最小值.

③ 一致连续性.

· 向量值函数: $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \langle F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) \rangle$.

一 一元: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 曲线:

一 二元: $\vec{r} = \vec{r}(t, s)$ 曲面:

一 连续性: 按分量逐个考虑.

例2: 研究函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \frac{1}{x+y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 及其偏导数在 $(0, 0)$ 的连续性.

解: ① 由 $|(x+y)^2 \sin \frac{1}{x+y}| \leq (x+y)^2$ 及 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y)^2 = 0$ 可知 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, 从而 f 在 $(0, 0)$ 连续.

② $(x, y) \neq (0, 0)$ 时 $f_x(x, y) = 2(x+y) \sin \frac{1}{x+y} + (x+y)^2 \left(\cos \frac{1}{x+y} \right) \frac{-2x}{(x+y)^2}$ (夹挤原理) (求导)

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

故 f_x 在 $(0, 0)$ 处连续. 同理 f_y 在 $(0, 0)$ 处连续.

问: f 在 $(0, 0)$ 处是否可微?

$\frac{2}{r} \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta) \cos \frac{1}{r}$ 无极限 (25.3)

4. 微分及其应用

- 偏导数: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ [几何意义: 特定曲线切线斜率]
- 高阶偏导: $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, ... [若 f_{xy}, f_{yx} 都连续, 则 $f_{xy} = f_{yx}$]
- 梯度: $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$ (或 $\langle f_x, f_y, f_z \rangle$)
 - $\nabla f \perp$ "等值面", 且指向增长最快方向, 大小为"最大方向导数值".
- 方向导数: $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \nabla f \cdot \vec{e}$. [若 $\vec{e} = \langle \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z \rangle$, 则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = f_x \alpha_x + f_y \alpha_y + f_z \alpha_z$]
 - [条件: 可做] 方向向量是一个单位向量. 如果面对的不是单位向量, 先化为单位向量.

可微性 [可被线性映射逼近]: $f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$

可微 $\iff$ f_x, f_y 存在
 $\iff$ f_x, f_y 连续

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

线性逼近 $\rightarrow$ 切平面

映射 $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的微分是一个线性映射 $dF_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. $\hookrightarrow$ Jacobian 矩阵

复合映射的链式法则 ("线性映射的复合" = Jacobian 矩阵之积)

e.g. $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

$z = f(x, y)$, $x = x(t, s)$, $y = y(t, s) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$

隐函数定理、反函数定理. [C' 映射可由其线性化"大致决定"]

$F(x, y, z) = 0$, $F_z \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

Taylor 展开 [高阶逼近], $f(p) = f(p_0) + \sum f_{x_i}(p_0)h_i + \frac{1}{2!} \sum f_{x_i x_j}(p_0)h_i h_j + \dots$

微分中值公式: $f(p) - f(p_0) = \sum h_i f_{x_i}(p_0 + \theta \cdot p - p_0)$. $\vec{p} - \vec{p}_0 = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$

极值与最值 ① 局部极值: 驻点 ($\nabla f = 0$) + 二阶导判定 (Hessian 矩阵正定性)

② 整体最值: 驻点 + 边界最值.

③ 条件极值: Lagrange 乘子法. (几何意义)

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = c \end{cases}$$

~~向量值函数的微分~~

向量值映射的微分. ① $\vec{r} = \vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}'(t)$ [加法, 数乘, 点乘, 叉乘: ...]

② 向量场: 旋度 $\nabla \times \vec{F}$, 散度 $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}$. $\begin{cases} \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \end{cases}$

例 3. 向量值函数未必满足微分中值定理: $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle \Rightarrow \vec{r}(\pi) - \vec{r}(0) \neq \vec{r}'(\xi)(\pi - 0)$

但是满足微分中值不等式: $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leq |\vec{r}'(\theta)|(b-a)$. [存在 $\theta \in (a, b)$]

证明: $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leq L(\delta) = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = |\vec{r}'(\xi)|(b-a)$

两点之间直线最短

一维函数微分中值定理.

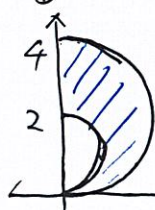
5. 多元函数的积分

	二重积分 $\iint_D f(x,y) dx dy$	三重积分 $\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz$	n重积分 $\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$	曲线积分 $\int_C f(x,y,z) ds$	曲面积分 $\iint_S f(x,y,z) dS$
Riemann和 (三板斧)	$\lim \sum f(p_i^*) \underbrace{\Delta p_i^*}_{\Delta x_i \Delta y_i}$	$\lim \sum f(p_i^*) \underbrace{\Delta V_i}_{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}$	$\lim \sum f(p_i^*) \underbrace{\Delta Q_i}_{\dots}$	$\lim \sum f(p_i^*) \underbrace{\Delta s_i}_{ \vec{r}'(t) \Delta t_i}$	$\lim \sum f(p_i^*) \underbrace{\Delta S_i}_{ \vec{r}_x \times \vec{r}_y \Delta u \Delta v}$
性质	1. 积分 = 几何量 (长度/面积/体积) 线性性 保序性 区域可加性 积分中值定理.				
计算 (累次)	$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$	$\int_D \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z) dz$...	$\int_{\Omega} f(\dots)$ 内层依赖于外层	$\int_a^b f(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt$ (圆珠线) $\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$	$\int_D f(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv$ (圆珠面) $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$
计算 (换元)	$\int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int \tilde{f}(y_1, \dots, y_n) \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} dy_1 \dots dy_n$			参数无关性	
	极坐标: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$	柱坐标: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$ 球坐标: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin \phi$			
应用	几何“量” 平均/加权平均 质量 质心 转动惯量 引力 ...				

(注) 选取合适的坐标, 以及善用对称性, 可能可以简化很多计算.

例4. 求 $I = \iint_D x dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) | 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y, x \geq 0\}$.

解:



分析: 若作为I型, 需分成三次

若作为II型, 需分为两次

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 2 \\ \sqrt{2y-y^2} \leq x \leq \sqrt{4y-y^2} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} 2 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{4y-y^2} \end{array} \right)$$

若用极坐标, 边界方程 $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r \sin \theta = 0 \Leftrightarrow r = 2 \sin \theta$
 $\dots \dots 4y = 0 \dots \dots r = 4 \sin \theta$

于是化为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $2 \sin \theta \leq r \leq 4 \sin \theta$ 最简单.

$$\begin{aligned} \text{故 } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} r \cos \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \frac{1}{3} (64 - 8) \sin^3 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} \cdot u^3 du \\ &= \frac{56}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$