Math1007.11 微分(B2) @2211

05/14/2015 Lec. 33 Z.W.

Last time

- 向量值积分及其 Gauss型/Stokes型 公式.
  - $\int \langle g_1, g_2, \cdots, g_m\rangle = \langle \int g_1, \int g_2, \cdots, \int g_m \rangle$.
  - $\iiint_V \nabla f\, dV = \oiint_{\partial V} f\, d\vec{S}$, $\iiint_V \nabla\times\vec{F}\, dV = \oiint_{\partial V} d\vec{S}\times\vec{F}$, $\iint_S d\vec{S}\times\nabla f = \oint_{\partial S} f\, d\vec{r}$
  - $\nabla\cdot\vec{F}(P) = \lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\oiint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}$, $\nabla f(P) = \lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\oiint_{\partial V} f\, d\vec{S}$, $\nabla\times\vec{F}(P) = \lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\oiint_{\partial V} d\vec{S}\times\vec{F}$.
- 单连通+无旋 ⇒ 有势
  - 3种方法求势函数.

Today: 向量势; 微分形式

1. 向量势：无源场 = 旋度场

- Recall: 若 $\vec{F} = \nabla f$，则 $\vec{F}$ 称有有势场.
  - 有势 ⟺ 保守 $\underset{\text{(单连通)}}{\rightleftarrows}$ 无旋

    i.e. $\vec{F} = \nabla f \iff \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \;\underset{\text{(单连通)}}{\iff}\; \nabla\times\vec{F} = 0$

- Today: ($\mathbb{R}^3$) $\vec{F} = \nabla\times\vec{G} \iff \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0 \iff \nabla\cdot\vec{F} = 0$

类似地，可以研究

定义：若存在 $\mathbb{R}^3$ 中的向量场 $\vec{G}$，使得 $\vec{F} = \nabla\times\vec{G}$，则称 $\vec{F}$ 为旋度场 (螺线矢量场)，并称 $\vec{G}$ 为 $\vec{F}$ 的向量势.

类似于"保守 $\underset{\text{单连通}}{\iff}$ 无旋"，我们有：

[为了避免陷入复杂的拓扑，我们假设 $\vec{F}$ 是 $\mathbb{R}^3$ (或球体内) 上处处定义好的 C^1 向量场.
[一般地，需要任意闭曲面围住定义域内区域，即等于该区域的边界]]

定理：设 $\vec{F}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 C^1 的向量场 则 $\vec{F}$ 无源 ⟺ $\vec{F}$ 在任何闭曲面上通量为0.

证明：若 $\vec{F}$ 无源，即 $\nabla\cdot\vec{F} = 0$，S是闭曲面，所围区域为 V，则由 Gauss.

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\, dV = 0.$$

- 若 $\vec{F}$ 在任意闭曲面上的通量为0，则对于任意点 P，

$$\nabla\cdot\vec{F}(P) = \lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\oiint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S} = 0. \qquad \square$$

• 接下来研究旋度场与无源场的关系. 由

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{G}=0$$

可知 任意3维旋度场都是无源场.

于是由Maxwell方程组可知磁场是旋度场

· 下面说明反过来也成立, 即定义在整个$\mathbb{R}^3$上的无源场一定是旋度场.

在证明这个性质之前, 先考虑一个看似无关但实际很有关系的问题.

(唯一性)问题: 设 $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ 是旋度场 $\vec{F}$ 的两个向量势, 它们相差多少?

回答: 由定义, $\nabla\times\vec{G}_1=\vec{F}=\nabla\times\vec{G}_2$, 故 $\nabla\times(\vec{G}_1-\vec{G}_2)=0$.

即 $\vec{G}_1-\vec{G}_2$ 是无旋场. 因为它们是定义在整个$\mathbb{R}^3$上的(⇒单连通), 所以由上节课所学, $\vec{G}_1-\vec{G}_2$ 是有势场! 换而言之, $\exists f$ 使得

$$\vec{G}_1-\vec{G}_2=\nabla f.$$

接下来设 $\vec{F}=\langle P,Q,R\rangle$ 是无源场, 定义在整个$\mathbb{R}^3$上.

要证明$\vec{F}$是旋度场, 就要找到向量场 $\vec{G}=\langle p,q,r\rangle$, 使得

$$\langle P,Q,R\rangle=\vec{F}=\nabla\times\vec{G}=\langle r_y-q_z,\ p_z-r_x,\ q_x-p_y\rangle.$$

换而言之, 需要解方程组

$$r_y-q_z=P,\quad p_z-r_x=Q,\quad q_x-p_y=R.$$

核心观察: 这个方程组的解并不唯一, 那我们可以试图寻找一个比较容易算出来的解. 若$\vec{G}_1=\langle p_1,q_1,r_1\rangle$是一个解, 那么由上述"唯一性", 对于任意$f$, $\vec{G}=\vec{G}_1+\nabla f=\langle p_1+f_x,\ q_1+f_y,\ r_1+f_z\rangle$ 也是解.

另一方面, 一定存在函数f使得 $r_1+f_z=0$ [比如取 $f=-\int r_1\,dz$].

所以, 一定存在形如 $\vec{G}=\langle p,q,0\rangle$ 的向量势!

于是, 只要求解较简单的方程组

$$-q_z=P,\quad p_z=Q,\quad q_x-p_y=R.$$

由前两个方程可得

$$q(x,y,z)=-\int_0^z P(x,y,t)\,dt+q(x,y,0)$$

$$p(x,y,z)=\int_0^z Q(x,y,t)\,dt+p(x,y,0).$$

[这里P, Q都是已知的, 所以只需求出$p(x,y,0)$, $q(x,y,0)$]

代入第3个方程，得

$$R(x,y,z) = q_x - p_y = -\int_0^z P_x(x,y,t)\,dt + q_x(x,y,0) - \int_0^z Q_y(x,y,t)\,dt - p_y(x,y,0)$$

$$= \int_0^z -\underline{(P_x+Q_y)}(x,y,t)\,dt + q_x(x,y,0) - p_y(x,y,0)$$

$\boxed{\vec{F}\ 无源 \Rightarrow P_x+Q_y+R_z=0 \Rightarrow -(P_x+Q_y)=R_z}$

$$= \int_0^z R_z(x,y,t)\,dt + q_x(x,y,0) - p_y(x,y,0)$$

$$= R(x,y,z) - R(x,y,0) + q_x(x,y,0) - p_y(x,y,0).$$

于是我们得到了一个很简单的方程

$$q_x(x,y,0) - p_y(x,y,0) = R(x,y,0).$$

两个未知函数，一个方程，基本上随便解都可以。比如，可以取

$$q(x,y,0)\equiv 0,\quad p(x,y,0) = -\int_0^y R(x,t,0)\,dt$$

于是，对于无源场 $\vec{F}=\langle P,Q,R\rangle$，我们就找到了一个向量势 $\vec{G}=\langle p,q,0\rangle$，其中

$$p(x,y,z) = \int_0^z Q(x,y,t)\,dt - \int_0^y R(x,t,0)\,dt$$

$$q(x,y,z) = -\int_0^z P(x,y,t)\,dt.$$

注：在这个过程，积分下限0并不重要，可以改成任意 z_0.（以及 y_0）.

特别地，若 $\vec{F}$ 是在以 (x_0,y_0,z_0) 为球心的小球内无源，则该小球内存在向量势.

由此可得：定义在一般区域 V 上的光滑向量场 $\vec{F}$ 是无源场当且仅当 $\vec{F}$ 在每点附近存在向量势.

例：试证 $\vec{F}=\langle xy+1,\ z,\ -yz\rangle$ 是旋度场，并求其向量势.

解：由 $\nabla\cdot\vec{F} = y+0-y=0$ 可知 $\vec{F}$ 是无源场，从而是旋度场.

~~不妨设 $\vec{G}=\langle p,q,0\rangle$ 是一个向量势，则~~

由 P.1

该向量场的一个向量势为 $\vec{G}=\langle p,q,0\rangle$，其中

$$p(x,y,z) = \int_0^z t\,dt - \int_0^y 0\,dt = \frac{z^2}{2}$$

$$q(x,y,z) = -\int_0^z (xy+1)\,dt = -xyz - z.$$

即 $\vec{G} = \langle \frac{z^2}{2},\ -xyz-z,\ 0\rangle$. □

2. 微分形式的概念.

• 至此我们发现：对于 $\mathbb{R}^3$ 上的 C^1 向量场 $\vec{F}$，

· $\nabla\times\vec{F}=\vec{0} \Rightarrow \exists f$ 使得 $\vec{F}=\nabla f$

· $\nabla\cdot\vec{F}=0 \Rightarrow \exists \vec{G}$ 使得 $\vec{F}=\nabla\times\vec{G}$.

它们看起来如此相似，背后是否有共同的原因呢？

答案是 YES！为此，我们需要引入微分形式的语言.

• 什么是微分形式？我们在(II型，即有向)积分中的各种被积对象都是微分形式.

于是，对于 $n=3$ 而言，微分形式有

0-形式： $f(x,y,z)$ ← 哪儿用过？ $\boxed{\underbrace{\int_{\partial L} f}_{\text{这里没有带 } d\cdots\text{，故只有光秃秃的 } f.}} = \int_L \nabla f\cdot d\vec{r}$，其中 $\int_{\partial L} f = f(\text{终})-f(\text{起})$.

1-形式： $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

2-形式： $P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$ [之前我们把"$\wedge$"省略了，现在把它请回来]

3-形式： $P\,dx\wedge dy\wedge dz$. ← [原则上，这里也该有"带方向的体积元". 我们生活在 $\mathbb{R}^3$ 中，所以往往容易忽略它. 就像生活在 $\mathbb{R}^2$ 中的"人"会忽略平面中"带方向面积元"，但只要跳出 $\mathbb{R}^2$，从 $\mathbb{R}^3$ 看，就能轻松看见它！]

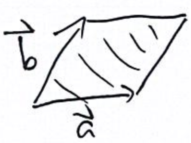
当我们把 dx, dy, dz 当作特定方向的"有向长度微元"时，

$dx\wedge dy,\quad dy\wedge dz,\quad dy\wedge dx,\ \cdots$

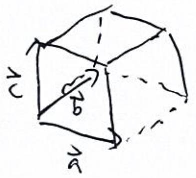
就是对应(微平行四边形)的有向面积，而

$dx\wedge dy\wedge dz,\quad dx\wedge dz\wedge dy,\ \cdots$ [还可以把微分形式视作"反对称多重线性映射". 此处不展开该视角.]

就是对应(微平行六面体)的有向体积. 它们跟常见的面积、体积相比，是它们可正可负，而常见的面积/体积是有向面积/有向体积的绝对值. 见(3.5)底部



有向面积 $\cancel{\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}}$ $\vec{a}\times\vec{b}$ 面积 $\cancel{\left|\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right|}$ $|\vec{a}\times\vec{b}|$.



有向体积 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 体积 $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$.

特别地， $dx\wedge dy=-dy\wedge dx,\quad dy\wedge dz=-dz\wedge dy,\quad dx\wedge dz=-dz\wedge dx$

$dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0.$

从而 $dx\wedge dy\wedge dz=dy\wedge dz\wedge dx=dz\wedge dx\wedge dy=-dy\wedge dx\wedge dz=-dx\wedge dz\wedge dy$
$=-dz\wedge dy\wedge dx.$

$dx\wedge dx\wedge dy=dx\wedge dx\wedge dz=dy\wedge dy\wedge dz=dx\wedge dz\wedge dx=\cdots\cdots=0.$

· 下面在微分形式之间引入"外积运算"。做法很简单，就是用上述公式，即
"交换"∧"两端的微元则添负号"，"出现 $dx\wedge dx\wedge\cdots$ 这样的项则为 0"。
我们可以具体算一下：

上标表示次数；即 1-形式还是 2-形式、3-形式。

① $\omega_1^1 = P_1dx + Q_1dy + R_1dz$，　$\omega_2^1 = P_2dx + Q_2dy + R_2dz$

$$\Rightarrow \omega_1^1\wedge\omega_2^1 = (P_1dx+Q_1dy+R_1dz)\wedge(P_2dx+Q_2dy+R_2dz)$$
$$= P_1P_2\,\cancel{dx\wedge dx} + P_1Q_2\,dx\wedge dy + P_1R_2\,\underbrace{dx\wedge dz}_{-dz\wedge dx}$$
$$+ Q_1P_2\,\underbrace{dy\wedge dx}_{-dx\wedge dy} + Q_1Q_2\,\cancel{dy\wedge dy} + Q_1R_2\,dy\wedge dz$$
$$+ R_1P_2\,dz\wedge dx + R_1Q_2\,\underbrace{dz\wedge dy}_{-dy\wedge dz} + R_1R_2\,\cancel{dz\wedge dz}$$
$$= (Q_1R_2-R_1Q_2)\,dy\wedge dz + (R_1P_2-P_1R_2)\,dz\wedge dx + (P_1Q_2-P_2Q_1)\,dx\wedge dy$$

似曾相识的计算。参见 (3.3)"坐标系下叉乘的计算"。

<u>几何意义</u>：$\omega_1^1\wedge\omega_2$ 是"以有向长度微元 $P_1\underbrace{dx}_{\vec{i}方向}+Q_1\underbrace{dy}_{\vec{j}方向}+R_1\underbrace{dz}_{\vec{k}方向}$ 与 $P_2dx+Q_2dy+R_2dz$

所张成的微平行四边形的有向面积"

[因为 $\langle P_1|dx|, Q_1|dy|, R_1|dz|\rangle\times\langle P_2|dx|, Q_2|dy|, R_2|dz|\rangle = \langle (Q_1R_2-R_1Q_2)|dy||dz|, \cdots\rangle$]

注：每个向量场 $\vec{F}=\langle P,Q,R\rangle$ 对应于一个 1-形式 $\omega_{\vec{F}}^1 = Pdx+Qdy+Rdz$、
以及 2-形式 $\omega_{\vec{F}}^2 = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$
则上述结果表明

$$\boxed{\omega_{\vec{F}_1}^1\wedge\omega_{\vec{F}_2}^1 = \omega_{\vec{F}_1\times\vec{F}_2}^2}$$

但 ∧ 在任意维均可以上类似定义。所以 ∧ 是叉乘在任意维的某种对应物！

② $\omega_1^1 = P_1dx+Q_1dy+R_1dz$，　$\omega_2^2 = P_2\,dy\wedge dz + Q_2\,dz\wedge dx + R_2\,dx\wedge dy$

$$\Rightarrow \omega_1^1\wedge\omega_2^2 = (P_1dx+Q_1dy+R_1dz)\wedge(P_2\,dy\wedge dz+Q_2\,dz\wedge dx+R_2\,dx\wedge dy)$$
$$= (P_1P_2+Q_1Q_2+R_1R_2)\,dx\wedge dy\wedge dz.$$

注：每个函数 f 对应了一个 0-形式 $\overset{\text{记}\,\omega_f^0}{f}$ 和 3-形式 $\underbrace{f\,dx\wedge dy\wedge dz}_{=\,\omega_f^3}$。则上式表明

$$\boxed{\omega_{\vec{F}_1}^1\wedge\omega_{\vec{F}_2}^2 = \omega_{\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2}^3}$$

<u>几何意义</u>："有向长度微元"与"有向微平行四边形面积"所构成"微平行六面体体积"。

③ 0-形式即函数 f 与任意微分形式 ω 的外积就是把 f 乘到所有系数上。

即　$\omega_f^0\wedge\omega_{\vec{F}}^1 = \omega_{f\vec{F}}^1$，　$\omega_f^0\wedge\omega_{\vec{F}}^2 = \omega_{f\vec{F}}^2$，　$\omega_f^0\wedge\omega_g^3 = \omega_{fg}^3$.

注：① $\mathbb{R}^3$ 中没有"4-形式"。② 以上均可定义至 $\mathbb{R}^n$ 中。