## 1. Fourier级数的背景简介

- 在讲完微积分的基本理论(即微分、积分、及其关系)之后，接下来转入在应用微积分方法解决实际问题时所产生的一个极其重要的理论，即Fourier级数(它是更一般的"Fourier分析"的重要组成部分).

- Fourier分析的核心思想是将复杂的函数分解为简单的三角函数之和(或积分)，而三角函数 $\sin(2\pi\omega x)$, $\cos(2\pi\omega x)$ 中，最重要的参数 $\omega$ 表示"频率". 因此，这种分解可被解读为"按照频率对函数进行分解". 这种迥然不同的分解方式是Fourier分析具有广泛应用的原因之一. [一个大家都见过的"Fourier分析"实例：五线谱！]

- 虽然Fourier分析中的很多思想在古希腊时期就有萌芽(比如为了给地心说打补丁而提出的"本轮与均轮"学说)，最终明确构建出该理论的是法国数学家Fourier. 他1807年完成了一篇用Fourier级数方法解热传导方程的杰出论文，后最终于1822年发表于旷世名著《热的解析理论》. 该书的题辞是柏拉图的名言：$\boxed{\text{数控制着火}}$.

- 下面简单介绍一下Fourier所解的方程. 为简单起见，考虑一维模型：

一根长为 $l$ 的细杆，初始时刻温度分布为 $T(x,0)=f(x)$，
杆的两端保持温度不变. 对于物理参数(比如热容)进行归一化处理后，
"$t$时刻$x$处温度"函数 $T(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \\ T(0,t) = T(l,t) = 0, & t>0 \\ T(x,0) = f(x), & 0<x<l. \end{cases}$$

热传导方程

在那个年代，对于一般的初始温度分布 $f$，没有一般的方法解这个偏微分方程.
[即使到现在，人们也只会对极少数非常特殊的偏微分方程求出其解析解.]
不过，对于很特殊的 $f$，已经得到其解了. 例如

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \\ T(0,t) = T(\pi,t) = 0 & (t>0) \\ T(x,0) = \sin x & (0<x<\pi) \end{cases} \longrightarrow T(x,t) = \underbrace{e^{-t}}\,\underbrace{\sin x}.$$

不同变量的函数之乘积

$\sin 2x \longrightarrow T(x,t) = e^{-4t}\sin 2x$

- Fourier 的创见在于：一般的~~■~~初始热分布函数 $f(x)$ 可被写成一些特殊(三角函数)的和，其中每个作为初始热分布时的热传导方程是容易解的。于是，最终"一般问题的解"就是这些特殊解的叠加！ （可能是无穷多个）

- 下面是 Fourier 所采用"分离变量法"的具体过程：

分离变量法

先找"变量分离形状的解"，即解形如 $T(x,t)=X(x)T(t)$. [此时忽略初始条件]

代入方程，得到

$$T'(t)\,X(x)=T(t)X''(x)$$

即 $$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

因左边只依赖于 $t$，右边只依赖于 $x$，故存在常数 $\lambda$ 使得

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

即 $$\begin{cases} T'(t)+\lambda T(t)=0 \\ X''(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

注意，此时方程的边值条件 $T(0,t)=0 \Rightarrow X(0)=0$

$T(l,t)=0 \Rightarrow X(l)=0.$

于是函数 $X(x)$ 满足 ODE

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{ODE}} X(x)=C\cdot\sin(\sqrt{\lambda}\,x).$$

且 $X(l)=0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\,l)=0 \Rightarrow \lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$

记作 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

将该 $\lambda$ 代入关于 $T(t)$ 的方程得

$$T'(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T(t)=0$$

$$\Rightarrow T(t)=e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t}\cdot C$$

于是我们得到第 $n$ 个解 $\boxed{T_n(t)X_n(x)=e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$.

把这些解叠加，就得到一般的解

$$X(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \qquad (*)$$

这个解所对应的初始条件为

$$f(x)=X(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (**)$$

于是，只要能把 $f(x)$ 展开成 $(**)$ 形式的"三角级数"，就得到解 $(*)$！

此外，对实际问题建模，所得方程取决于实际问题。例如同样是热传导问题，但我们不再"把杆的两端置于冰水中"，而是涂上"隔热涂层"，防止热量从端点处进出。此时 $T(x,t)$ 的方程变成

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) = 0 & (t>0) \\ T(x,0) = f(x), & (0<x<l) \end{cases}$$

不难验证，若 $f(x) = \cos x$，则 $T(x,t) = e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t}\cos x$ 是它的解。

重复上述"分离变量法"的过程，可得其一般解为

$$T(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\, e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}$$

其中 $a_n$ 由 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$ 给出。

## 2. 周期函数的 Fourier 级数展开

- 为了让该理论自恰，还有一系列问题需要回答：

① 是否任意函数（需要满足一定的"正则性"）均可展开为 Fourier 级数？

Fourier 级数即下述形式的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

② 何时这样的三角级数是收敛的？

③ 若收敛，是否可以逐项求导？［这是上述分离变量法背后用到的

下面考虑第①个问题，即如何将函数写成 Fourier 级数，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

注意右边的函数都是周期为 $2l$ 的函数。为此，我们先假设 $f$ 是周期为 $2l$ 的函数，即满足

$$f(x+2l) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

对于这样的函数，我们只需要关注它在任何一个周期（例如 $[-l,l]$，或 $[0,2l]$ 等）内的取值即可，因为其在别处的值可由它在该区间内的值确定。

• Fourier 分析的意义在于"把函数当作点看待". 例如，令

$V_{2l}$ = {所有(有一定正则性的)周期为 $2l$ 的函数所组成的集合}.

则 $\forall f, g\in V \Rightarrow \alpha f+\beta g\in V$. 换而言之, $V$ 是个线性空间. [它们和我们已经熟悉的空间 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ 相比, 在于它是无穷维的!]

— 于是, $f(x)\in V_{2l}$ 是一个点(向量), 而 $1$, $\cos\frac{n\pi x}{l}$, $\sin\frac{n\pi x}{l}\in V$ 也都是向量.

再盯着展开式

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

[现在还不知道右端是否收敛, 因而用了 ~ 而不是 =]

看5秒钟: 唉, 这不就是把(无穷维)向量 $f$ "展开到"(无穷个)向量 $1$, $\cos\frac{n\pi x}{l}$, $\sin\frac{n\pi x}{l}$, … 上吗?

就跟我们熟悉的把 $\vec{v}$ 展开成 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 一样.

— 答案: • 我们之所以把 $\vec{v}$ 展开成 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的组合, 不仅仅因为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 线性无关, 而且因为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是两两正交的.

• 为了描述向量的正交性(即垂直关系), 还需要引入角度的概念. 而要引入角度, 等价地, 就是要引入内积的概念.

— 内积满足的基本性质是 (见 2.4)

① (非负性): $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$, 且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

② (对称性): $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

③ (双线性性): $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\,\vec{a}\cdot\vec{b}$.

— 那么, 怎么在周期 $2l$ 的函数空间 $V_{2l}$ 上定义内积?

作一个粗糙的类比. 不妨设 $f$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 从而函数 $f$ 可用它在 $m$ 个点的值逼近: 取 $a_1=-l<a_2<a_3\cdots<a_m=l$.

$$f\in V_{2l}\longleftrightarrow (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m))\in\mathbb{R}^m.$$

内积.

$$\langle f,g\rangle=? \qquad \langle \overrightarrow{f(a)}, \overrightarrow{g(a)}\rangle = f(a_1)g(a_1)+f(a_2)g(a_2)+\cdots+f(a_m)g(a_m).$$

自然的想法: 将 $\langle f,g\rangle$ 定义为右端 $m\to\infty$ 的极限. 为了保证收敛性, 将右端乘以小区间长度, 即 $\frac{2l}{m}$. 于是,

$$\langle f,g\rangle=\lim_{m\to\infty}\frac{2l}{m}\left(f(a_1)g(a_1)+\cdots+f(a_m)g(a_m)\right) = \int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx.$$

· 定理：$\| \langle f,g\rangle = \int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx$ 是 $V_{2l}$ 上的一个内积。

证明：只要验证内积定义中的三条即可。

① $\langle f,f\rangle = \int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx \geq 0$，且"="$\Leftrightarrow f(x)=0$ [假设 $f$ 可积且逐段光滑]。

② $\langle f,g\rangle = \int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx = \langle g,f\rangle$

③ 双线性性是积分线性性的推论。 □

· 有了内积空间，下一步就是~~找~~一组单位正交基，并把空间中每个向量都用单位正交基表示

[例如，在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 是一组单位正交基，此时任意 $\vec{x}$ 可被写成

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

其中 $x_1 = \vec{x}\cdot\vec{e}_1$，$x_2 = \vec{x}\cdot\vec{e}_2$，$x_3 = x\cdot\vec{e}_3$.

见 3.3

对于内积空间 $(V_{2l},\langle\cdot,\cdot\rangle)$，我们也有一组简单易用的单位正交基：

定理：$\| \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}, \cdots$ 是 $(V_{2l},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的一组"单位正交基"。

"单位正交"的证明：

· $\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2l}}\,dx = 1$ $\left(\Rightarrow \|\frac{1}{\sqrt{2l}}\|=1\right)$

· $\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$ $(n\geq 1)$ $\left(\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2l}} \perp \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

· $\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{m\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$ $(\Rightarrow \cdots\cdots)$

· $\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$ $\left(\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi x}{l} \perp \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ □

"基"的证明：本章后续再讲。

· 有了单位正交基，就可以像 3.3 一样做展开了：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

注意，此处用 ~ 而不是 =，单位正交基也打引号。事实上，右边这个级数的收敛性是比较复杂的事情。例如，若 $f$ 分段可微，则该级数收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。若 $f$ 连续且分段可微，则该级数收敛于 $f$，而且收敛还是一致的。

其中 $a_0 = 2\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2l}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2l}} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{l}}\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}\rangle = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{l}}\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\rangle = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$.

同一个公式

· 例：$f(x) = \begin{cases} x, & 0\leq x\leq \pi \\ 0, & -\pi\leq x<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right).$$