Math 1007.11 数分(B2) @2211

Last time.

- 广义 Fourier 级数: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$, $a_n = \langle f, \varphi_n \rangle$.
  - Legendre 多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \rightsquigarrow \varphi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$.
  - Bessel 不等式: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \le \int_a^b |f(x)|^2\,dx$
  - 完备 $\Leftrightarrow$ Parseval $\Rightarrow$ 收敛性
- Fourier 积分表示: $f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda$

Today: Fourier 变换

[相比于 Fourier 级数, 只是把离散的 $n$ 变成连续的 $\lambda$
把……求和……积分]

## 1. Fourier 变换的计算例子

- 通过用有限逼近无限的方法, 上节课最后我们引入了

f 绝对可积: f 在任意有限区间上 Riemann 可积, 且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ 收敛

定义: ・设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的绝对可积函数, 称
$$F(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$
为 f 的 Fourier 变换

・反之, 设 F 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的绝对可积函数, 称
$$f(x) = \check{F}(x) = \mathcal{F}^{-1}(F)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$
为 F 的 Fourier 反变换

注: 不同的书对 Fourier 变换的定义可能不一致! 例如
$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}\,dx$
$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\lambda}\,dx$

上节课提及, 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 连续, 且在任何有限区间上分段可微, 则
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$
即 $\boxed{\text{若 } F = \mathcal{F}(f), \text{ 则 } f = \mathcal{F}^{-1}(F)}$ (Fourier 变换与 Fourier 反变换是互逆的过程).

- 下面给出一些例子.

例 1: $f(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$
$$\Rightarrow F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\lambda x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\lambda)x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\lambda)x}\,dx$$
$$= \frac{1}{1-i\lambda}e^{(1-i\lambda)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+i\lambda}e^{-(1+i\lambda)x}\Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{1-i\lambda} + \frac{1}{1+i\lambda} = \frac{2}{1+\lambda^2}.$$

$\lim_{x\to-\infty} e^{(1-i\lambda)x} = \lim_{x\to-\infty} e^{x-i\lambda x} = \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot e^{-i\lambda x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{\downarrow 0}\underbrace{(\cos\lambda x + i\sin\lambda x)}_{\text{有界}} = 0.$

$e^{i\lambda x} = \underbrace{\cos(\lambda x)}_{\text{偶}} + \underbrace{i\sin(\lambda x)}_{\text{奇}}$

$\Rightarrow$ f 的 Fourier 积分展开为 $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+\lambda^2}e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{1+\lambda^2}\,d\lambda$

例2：$f_a(x)=\begin{cases}1, & |x|\le a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$

$$\Rightarrow \hat{f}_a(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-a}^{a}e^{-i\lambda x}dx$$

$$= -\frac{1}{i\lambda}e^{-i\lambda x}\Big|_{-a}^{a}$$

$\boxed{\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\sin t}$

$$= \frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\sin(\lambda a).$$

$\boxed{\frac{2}{\lambda}\sin(\lambda a)\sin(\lambda x)\text{ 关于}\lambda\text{奇}}$

$$\Rightarrow f_a(x)\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\lambda}\sin(\lambda a)e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda a)\cos(\lambda x)}{\lambda}dx.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda a)\cos(\lambda x)}{\lambda}d\lambda = \begin{cases}1, & |x|<a\\ \frac{1}{2}, & |x|=a\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$$

例3：$f_k(x)=e^{-kx^2}\quad (k>0)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(f_k)(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}e^{-i\lambda x}dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-kx^2}\cos(\lambda x)dx$$

$\boxed{令\ t=\sqrt{k}x}$

$$= \frac{2}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}}t\right)dt$$

穿越到不久后的未来，我们将会证明 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$

$$= \frac{2}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4k}\lambda^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-\frac{1}{4k}\lambda^2}.$$

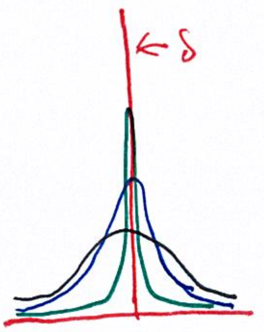
$\Rightarrow$ ① 对于 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$，有 $\hat{f}(\lambda)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

② 高斯函数 $f_k(x)=e^{-kx^2}$ 为钟形曲线，其中 $k$ 控制"宽度"。于是，Fourier变换把"高斯波"(时/空域)映为"高斯波"(频域)，但把"宽"与"窄"互换。

③ $\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}e^{-kx^2}\right)=e^{-\frac{1}{4k}\lambda^2}$.

注意：· $\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{k}{\pi}}e^{-kx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=1$ 见(20.3)

· $\lim_{k\to+\infty}\sqrt{\frac{k}{\pi}}e^{-kx^2}$："宽度为0，积分为1" $\rightsquigarrow$ Dirac δ-函数！




于是，$\boxed{\mathcal{F}(\delta)=1}$.

· 同Fourier级数类似，若函数 f 是奇函数或偶函数，则其 Fourier 变换可略微化简.

① f 是偶函数 $\Rightarrow$ $F_e(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\,dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx$$ [称为 f 的余弦变换]

$\Rightarrow$ $F_e(\lambda)$ 也是偶函数，从而 Fourier 反变换为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_e(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_e(\lambda)\,(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_e(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda.$$

② f 是奇函数 $\Rightarrow$ $F_o(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)\,dx$$

$$=-2i\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(\lambda x)\,dx$$ [称 $iF_o(\lambda)$ 为 f 的正弦变换]

$\Rightarrow$ $F_o(\lambda)$ 也是奇函数，从而 Fourier 反变换为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_o(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} iF_o(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda.$$

注：若 f 定义域为 $(0,+\infty)$，则可进行奇/偶延拓，然后计算正弦/余弦变换.

例4：$f(x)=\sin x\quad (0<x<\pi)$.

解. · 余弦变换 $F_e(\lambda)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx$

$$=2\int_{0}^{\pi}\sin x\cdot\cos(\lambda x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}\big(\sin(1+\lambda)x+\sin(1-\lambda)x\big)\,dx$$ ($\lambda=\pm1$ 时)

$$=-\frac{\cos(1+\lambda)x}{1+\lambda}\Big|_0^{\pi}-\frac{\cos(1-\lambda)x}{1-\lambda}\Big|_0^{\pi}$$ 或 0

$$=\frac{2}{1-\lambda^2}-\frac{\cos(1+\lambda)\pi}{1+\lambda}-\frac{\cos(1-\lambda)\pi}{1-\lambda}$$ ($\lambda\neq\pm1$) 或 0 ($\lambda=\pm1$)

· 正弦变换. $iF_o(\lambda)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(\lambda x)\,dx$

$$=2\int_{0}^{\pi}\sin x\cdot\sin(\lambda x)\,dx$$

$\lambda=1$ $\downarrow$ $\quad$ $\lambda=-1$ $\downarrow$

$$=\int_{0}^{\pi}\big(\cos(1-\lambda)x-\cos(1+\lambda)x\big)\,dx$$ 或 $\pi$ 或 $-\pi$

$$=\frac{\sin(1-\lambda)x}{1-\lambda}\Big|_0^{\pi}-\frac{\sin(1+\lambda)x}{1+\lambda}\Big|_0^{\pi}$$ 或 $\pi$ 或 $-\pi$

$$=\frac{\sin(1-\lambda)\pi}{1-\lambda}-\frac{\sin(1+\lambda)\pi}{1+\lambda}$$ ($\lambda\neq\pm1$)

## 2. Fourier 变换的~~性质~~基本性质

· 下面给出 Fourier 变换

$$f \xmapsto{\mathcal{F}} \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

的一些性质. 这些性质能用于简化 Fourier 变换的计算. 以下假设 $f$ 绝对可积. $\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0}$

① 线性: $\boxed{\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)}$. [显然]

② 时移: $\boxed{\mathcal{F}(f(x-a))(\lambda) = e^{-i a\lambda}\mathcal{F}(f)(\lambda)}$. $\boxed{\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{\lambda}{a})}$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda(x+a)} dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\frac{\lambda}{a}x} dx$$

若 $a<0$, 则积分上下限交换, 会给出一个负号.

③ 频移: $\boxed{\mathcal{F}(f(x) e^{-i\lambda_0 x})(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda+\lambda_0)}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda_0 x} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\lambda+\lambda_0)x} dx$$

④ 微分的 Fourier 变换: $\boxed{\mathcal{F}(f')(\lambda) = i\lambda \mathcal{F}(f)(\lambda)}$. (*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = \underbrace{f(x) e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + i\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

注: 这是 Fourier 变换最重要的性质之一.
Fourier 变换把求"导运算"(时域) 变成"乘法运算"(频域)!

进一步, 若 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \cdots = \lim_{x\to\pm\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$, 则

$$\boxed{\mathcal{F}(f^{(k)}(x))(\lambda) = (i\lambda)^k \mathcal{F}(f)(\lambda).}$$ (迭代使用(*)).

⑤ Fourier 变换的微分: 设 $\mathcal{F}(f)$ 及 $\mathcal{F}(xf)$ 存在, 则 $\boxed{\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{F}(-ix f(x))(\lambda)}$

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix) e^{-i\lambda x} dx$$

进一步, 若 $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(xf), \cdots, \mathcal{F}(x^k f)$ 存在, 则

$$\boxed{\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{F}((-ix)^k f(x))(\lambda)}$$

⑥ 积分的 Fourier 变换: 设 $\mathcal{F}(f)$ 存在且 $\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$, 则 $\boxed{\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right) = \frac{1}{i\lambda}\mathcal{F}(f)(\lambda).}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \cdot e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{t}^{+\infty} e^{-i\lambda x} dx\right) f(t)dt = \frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\lambda}\lim_{x\to\infty} e^{-i\lambda x} f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{i\lambda}e^{-i\lambda x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt}_{=0} = 0$$

例5：由例1，$f(x)=e^{-|x|} \Rightarrow \mathcal{F}(f)(\lambda)=\frac{2}{1+\lambda^2}$

于是①对于任意 $k>0$，

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(e^{-k|x|}\right)(\lambda)=\mathcal{F}\left(f(kx)\right)=\frac{1}{k}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\lambda}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\frac{2}{1+\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2}=\frac{2k}{k^2+\lambda^2}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(e^{-k|x+a|}\right)(\lambda)=e^{-ia\lambda}\,\mathcal{F}\left(e^{-k|x|}\right)(\lambda)=e^{-ia\lambda}\cdot\frac{2k}{k^2+\lambda^2}.$$

② $$\mathcal{F}\left(xe^{-|x|}\right)(\lambda)=i\,\mathcal{F}\left(-ixe^{-|x|}\right)(\lambda)$$

$$=i\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2}{1+\lambda^2}\right)$$

$$=-\frac{4i\lambda}{(1+\lambda^2)^2}.$$

③ $$\mathcal{F}\left(xe^{-|x|}\sin\alpha x\right)(\lambda)=\mathcal{F}\left(xe^{-|x|}\cdot\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}\right)(\lambda)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}\left(xe^{-|x|}\right)(\lambda-\alpha)-\mathcal{F}\left(xe^{-|x|}\right)(\lambda+\alpha)\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\left[\frac{-4i(\lambda-\alpha)}{\left(1+(\lambda-\alpha)^2\right)^2}+\frac{4i(\lambda+\alpha)}{\left(1+(\lambda+\alpha)^2\right)^2}\right]$$

$$=\frac{-2(\lambda-\alpha)}{\left(1+(\lambda-\alpha)^2\right)^2}+\frac{2(\lambda+\alpha)}{\left(1+(\lambda+\alpha)^2\right)^2}$$

例6.（例3，续）不用穿越也能求 $\mathcal{F}\left(e^{-kx^2}\right)$：先考虑 $k=1/2$

$$F(\lambda)=\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}-i\lambda x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}F(\lambda)=-i\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}-i\lambda x}\,dx=i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\,d\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=-i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-i\lambda)e^{-i\lambda x}\,dx=-\lambda F(\lambda).$$

$$\Rightarrow F(\lambda)=C\cdot e^{-\lambda^2/2}.$$

(20.3) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

令 $\lambda=0$，可得 $C=F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$.

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\lambda^2/2}.$$

② 时域伸缩

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(e^{-kx^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{-\frac{1}{4k}\lambda^2}.$$