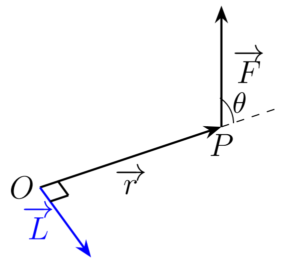
1.2.3 两个空间向量的叉乘

除了点乘外，对于两个**空间向量**，还可以定义一种新的运算，即叉乘。

¶ 叉乘的物理含义

力矩：如图，力 $\overrightarrow{F}$ 作用在物体上，使之绕 O 点转动，则力矩 $\overrightarrow{L}$ 为如下向量：

- 大小：$\left|\overrightarrow{L}\right| = |\overrightarrow{r}|\left|\overrightarrow{F}\right| \sin\theta$ （其中 $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$）
- 方向：与 $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}$ 垂直，且 $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{L}$ 形成**右手系**。



¶ 叉乘的定义

定义 1.2.10: 叉乘 (外积/向量积)

对于两个**空间向量** $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$，定义它们的叉乘为

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$$

其中向量$\overrightarrow{c}$

- 大小：$|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right| \sin\theta$；
- 方向：与 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 垂直，且 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ 形成右手系。

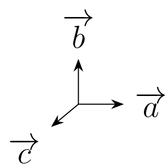
注意两个向量叉乘的结果是一个向量，而不是数量。

例 1.2.11

考虑如图的三个单位向量，它们两两垂直且形成右手系。则

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b}$$



从例子中可以看到叉乘的一个重要的新现象：向量$\vec{b}\times\vec{a}$与$\vec{a}\times\vec{b}$大小相同但方向相反。换而言之，叉乘不再满足交换律，而是满足**反交换律**：

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}}$$

此外，跟点乘类似，叉乘也满足**双线性性**：

- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

注 1.2.12: 关于叉乘的注记

(1) **维度限制**：叉乘仅对 $\mathbb{R}^3$ 中的向量有定义，其结果也是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量。

(2) 当$\vec{a}$与$\vec{b}$平行时，上述定义中有关方向的右手系描述不再有意义，但这不影响叉乘的定义：此时$\theta=0$或π，从而叉乘的结果为零向量，确实不具有方向！

平行判定：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ 当且仅当 $\vec{a},\vec{b}$ 平行（共线）。

(3) **不满足结合律**：考虑例1.2.11的三个两两垂直的单位向量，则

$$(\vec{a}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}\times\vec{b}=\vec{0},\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times\vec{c}=-\vec{b}$$

所以叉乘不满足结合律！ [不要出现诸如 $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}$ 之类的表达式！]

(4) 因为 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 垂直，故总有 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$。

¶ 叉乘几何意义与几何应用

平行四边形的面积：根据定义，以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积

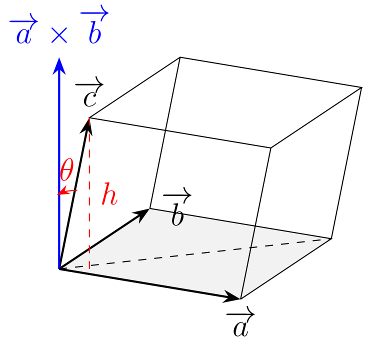
$$Area=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

即叉乘的长度。注意该长度也是以$\vec{a},\vec{b}$ 为边的三角形面积的两倍。

平行六面体的体积：进一步，还可以计算平行六面体的体积：

$$\begin{aligned}Volume&=\vec{a},\vec{b}\text{ 平行四边形面积}\times\text{高}\\&=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\cos\alpha|\cdot|\vec{c}|\\&=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|\end{aligned}$$

一般地，把$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**。



1.3 向量代数：坐标表示及运算

1.3.1 向量的坐标表示

¶ 空间向量分解定理

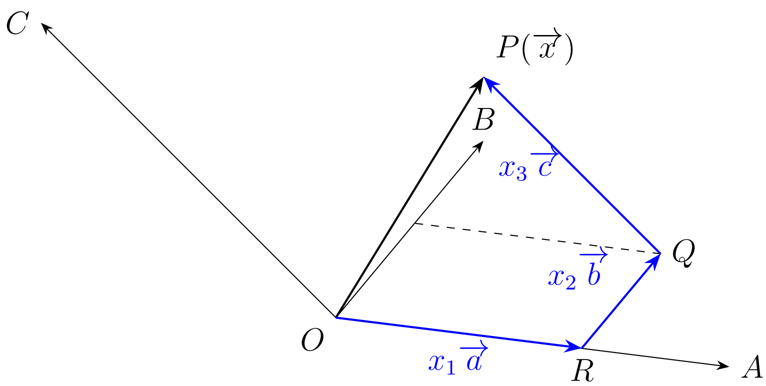
微积分的基础是解析几何，即用数表示几何对象。下面首先用数表示向量：

定理 1.3.1: 空间向量分解定理

设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是空间中不共面的三个向量，则对于任意空间向量 $\vec{x}$，存在**唯一**的一组数组 (x_1, x_2, x_3) 使得

$$\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$$

证明： $\boxed{\text{存在性}}$ 记 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}, \vec{x} = \overrightarrow{OP}$。



过 P 作 $PQ \parallel OC$，交平面 OAB 于 Q。【注意：这一步用到了$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$不共面】 过 Q 作 $QR \parallel OB$，交直线 OA 于 R。

由 $OR \parallel OA$，知存在 x_1 使得 $\overrightarrow{OR} = x_1\vec{a}$。由 $RQ \parallel OB$，知存在 x_2 使得 $\overrightarrow{RQ} = x_2\vec{b}$。由 $QP \parallel OC$，知存在 x_3 使得 $\overrightarrow{QP} = x_3\vec{c}$。

根据向量加法的三角形法则：

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$$

$\boxed{\text{唯一性}}$ 假设还有一组数 (x_1', x_2', x_3') 使得 $\vec{x} = x_1'\vec{a} + x_2'\vec{b} + x_3'\vec{c}$。则

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (x_1 - x_1')\vec{a} + (x_2 - x_2')\vec{b} + (x_3 - x_3')\vec{c}$$

因为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，所以由上节课所证明的性质（线性无关性），只能有：

$$x_1 - x_1' = 0, \quad x_2 - x_2' = 0, \quad x_3 - x_3' = 0$$

故满足条件的数组是唯一的。 $\square$

¶ 任意基（未必直角）下的计算

定义 1.3.2: 基与坐标

(1) 称空间中不共面的三个向量 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ 为空间的一组**基** **(Basis)**。

(2) 给定一组基 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$，称 $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ 为向量 $\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$ 在该基下的**坐标**。

注 1.3.3

显然基是不唯一的，但给定基后，任意向量都有**唯一**的坐标。于是，只要选定一组基，就可以建立向量与数组之间的一一对应：

$$\vec{x} \longleftrightarrow \langle x_1, x_2, x_3\rangle$$

问题：向量的运算跟它的坐标有什么关系？设
$\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} \longleftrightarrow \langle x_1, x_2, x_3\rangle$， $\vec{y} = y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c} \longleftrightarrow \langle y_1, y_2, y_3\rangle$。

- **加法**：

  $$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{a} + (x_2 + y_2)\vec{b} + (x_3 + y_3)\vec{c} \longleftrightarrow \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\rangle$$

  $\rightsquigarrow$ 比画三角形简单多了!

- **数乘**：
  $$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1)\vec{a} + (\lambda x_2)\vec{b} + (\lambda x_3)\vec{c} \longleftrightarrow \langle \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\rangle$$

  $\rightsquigarrow$ So easy!

- **点乘**：
  $$\begin{aligned}\vec{x}\cdot\vec{y} =& (x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c})\cdot(y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c})\\ =& x_1y_1\vec{a}\cdot\vec{a} + x_1y_2\vec{a}\cdot\vec{b} + x_1y_3\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &+ x_2y_1\vec{b}\cdot\vec{a} + x_2y_2\vec{b}\cdot\vec{b} + x_2y_3\vec{b}\cdot\vec{c}\\ &+ x_3y_1\vec{c}\cdot\vec{a} + x_3y_2\vec{c}\cdot\vec{b} + x_3y_3\vec{c}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

  $\rightsquigarrow$ 事情变复杂了，除非 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是两两垂直的单位向量：此时 $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{c} = 1$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{a}\cdot\vec{c}$ 等交叉项为 0。

- **叉乘**： 还可以类似处理叉乘，
  $$\begin{aligned}\vec{x}\cdot\vec{y} =& (x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c})\times(y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c})\\ =& x_1y_1\vec{a}\times\vec{a} + x_1y_2\vec{a}\times\vec{b} + x_1y_3\vec{a}\times\vec{c}\\ &+ x_2y_1\vec{b}\times\vec{a} + x_2y_2\vec{b}\times\vec{b} + x_2y_3\vec{b}\times\vec{c}\\ &+ x_3y_1\vec{c}\times\vec{a} + x_3y_2\vec{c}\times\vec{b} + x_3y_3\vec{c}\times\vec{c}\\ =& (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{a}\times\vec{b} + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{b}\times\vec{c} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{c}\times\vec{a}\end{aligned}$$

  $\Longrightarrow$ 需要让 $\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}$ 是简单向量， 最好用例1.2.11的基!

1.3.2 标准正交基下的计算公式

¶ 标准正交基

为了让点乘与叉乘的计算变简单，需要选取特殊的基。

定义 1.3.4: 标准正交基

(a) 若 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 是两两**正交(垂直)**的**单位向量**，即：

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$$

则称$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 是一组单位正交基。

(b) 若 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$不仅仅是单位正交基，还构成右手系，则称之为一组**标准正交基**。

注意，由(a)和(b)可知标准正交基满足

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

¶ 标准正交基下的点乘和叉乘计算

于是当我们选定了一组标准正交基 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 后，不仅加法和数乘可以转化为简单的代数运算，而且点乘和叉乘也被转化为数的运算。

- **点乘：**

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{1} + x_1y_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{0} + \cdots = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad \text{So easy!}$$

特别地：$\vec{x}$的模长为$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$.

- **叉乘：**

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} &= x_1y_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{\vec{0}} + x_1y_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + x_1y_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + \ldots \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3\end{aligned}$$

对应坐标为 $\langle x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1\rangle$。

¶ 二阶与三阶行列式

为了简化叉乘的记号以及便于记忆，可以引入**行列式**：

- **二阶行列式：**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

- 三阶行列式：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} &= a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\end{aligned}$$

特别地，两个向量的叉乘在形式上可以用行列式表示：

命题 1.3.5: 叉乘公式

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix}\overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

¶ 行列式的几何意义

作为应用，可以用行列式计算面积和体积：

1. （平行四边形面积）考虑两个平面向量$\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2\rangle$与$\overrightarrow{b} = \langle b_1, b_2\rangle$。将它们躺平放到空间里，即视为向量$\overrightarrow{a}' = \langle a_1, a_2, 0\rangle$ 与$\overrightarrow{b}' = \langle b_1, b_2, 0\rangle$。则由$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$所张成的平行四边形面积等同于由$\overrightarrow{a}', \overrightarrow{b}'$所张成的平行四边形面积，其大小为

$$Area = |\overrightarrow{a}' \times \overrightarrow{b}'| = |\langle 0, 0, a_1b_2 - a_2b_1\rangle| = \left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|$$

换而言之：**由平面向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$所张成的平行四边形面积等于将由$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$“堆在一起”所形成的2阶行列式的绝对值。**

2. （平行六面体的体积）考虑三个空间向量$\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\overrightarrow{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$与$\overrightarrow{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$所张成的平行六面体。它的体积为

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \left|\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})\right|\\ &= \left|\langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \left\langle \begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right\rangle\right|\\ &= \left|a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right|\\ &= \left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right| \quad \text{(行列式的绝对值!)}\end{aligned}$$

换而言之：**由空间向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$所张成的平行六面体体积等于将由$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$“堆在一起”所形成的3阶行列式的绝对值。**